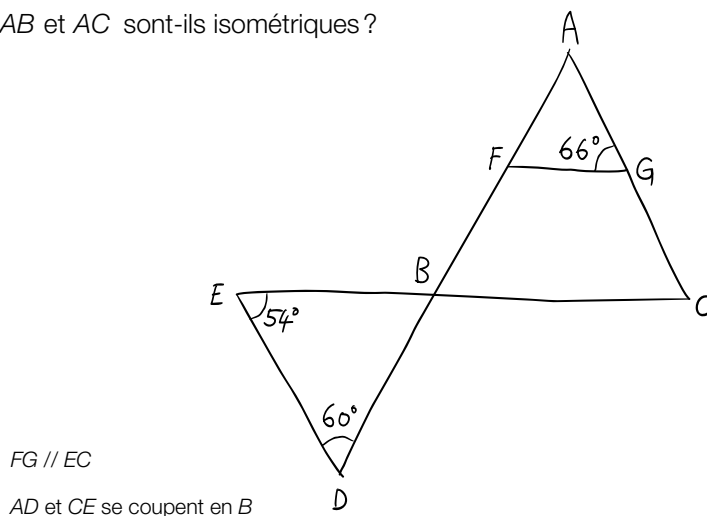


ES45 $AB = AC$?

Les segments AB et AC sont-ils isométriques ?

Fichier: **ES46****ES47 Calculs de mesures**

Trace un segment XY de 7,3 cm.

Construis la médiatrice m de XY .

Trace une demi-droite Xn qui fait un angle de 64° avec XY .

Construis la perpendiculaire p à la demi-droite Xn , qui passe par X .

Celle-ci coupe m en O .

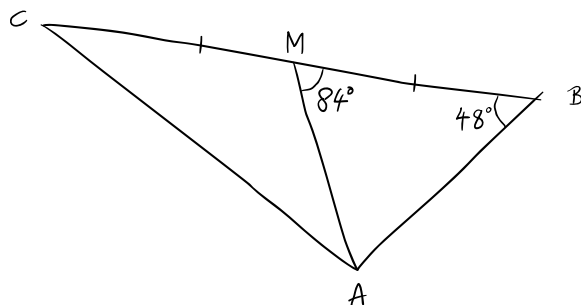
Trace le cercle c (O ; OX) qui coupe m en K et L .

Sur l'arc de cercle $\widehat{XKY}$, place deux points R et S .

Quelles sont les mesures des angles $\widehat{XRY}$ et $\widehat{XSY}$?

ES48 Quelconque ?

De quel type est le triangle ABC ?

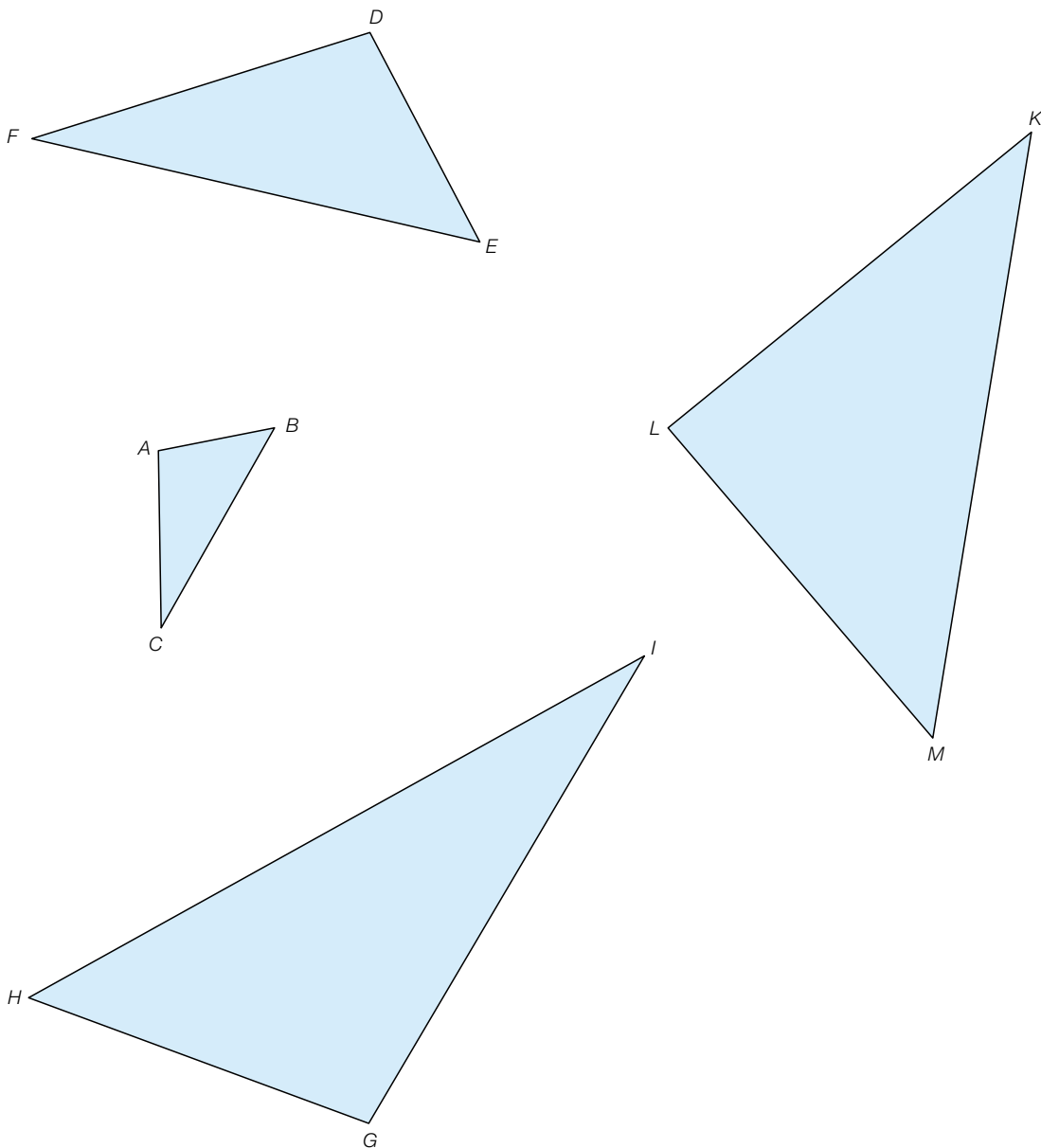


Triangles semblables

ES49 Semblables ou non ?

ABC , DEF et GHI sont des triangles semblables ; KLM n'est pas semblable aux autres triangles.

Comment reconnaître des triangles semblables ?



ES50 Toujours semblables ?

- a) Construis un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 8 cm et 9 cm. Construis un agrandissement de ce triangle de telle façon que le côté de 8 cm mesure dorénavant 12 cm.

Mesure les angles de chaque triangle. Que constates-tu ?

- b) Construis deux triangles ABC et $A'B'C'$, de grandeur différente, dont les angles mesurent :

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} = 70^\circ, \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'} = 50^\circ \text{ et } \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'} = 60^\circ$$

Mesure les côtés de ces triangles, puis calcule les rapports suivants :

$$\frac{AB}{BC} ; \frac{AB}{AC} ; \frac{BC}{AC} ; \frac{A'B'}{B'C'} ; \frac{A'B'}{A'C'} ; \frac{B'C'}{A'C'}$$

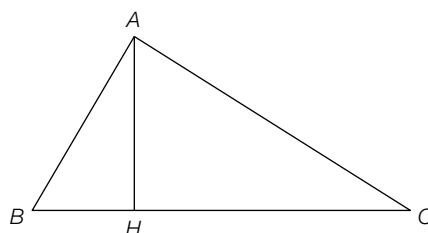
Que constates-tu ?

- c) Fais de même pour les rapports : $\frac{AB}{A'B'} ; \frac{BC}{B'C'} ; \frac{AC}{A'C'}$

ES51 Trois triangles

Le triangle ABC est rectangle en A ; AH est une de ses hauteurs.

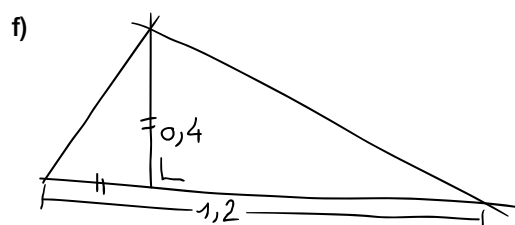
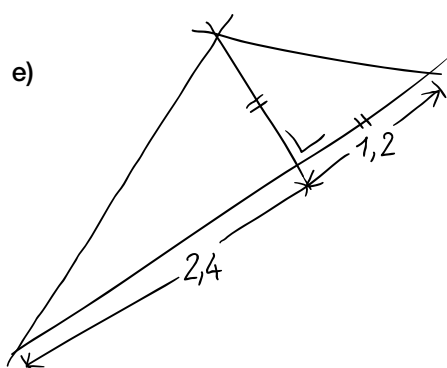
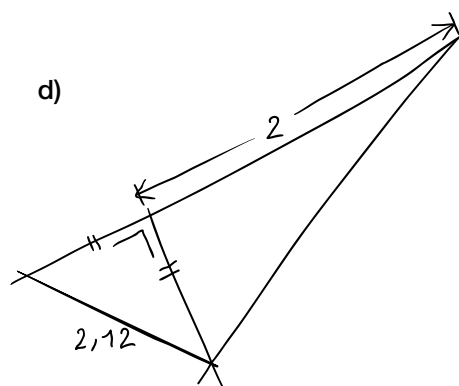
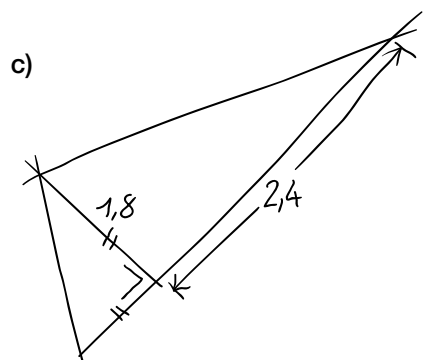
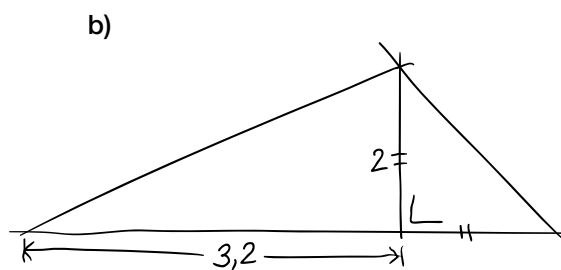
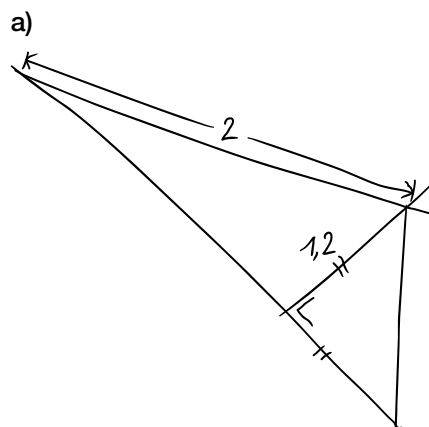
Quels sont les triangles semblables que tu peux trouver dans cette figure ?



ES52 Tri

On considère des triangles dont on a tracé une des hauteurs.

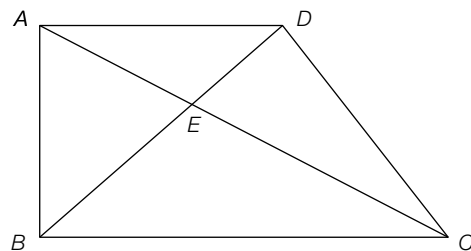
Lesquels sont semblables ?



ES53 Diagonales d'un trapèze

Les diagonales du trapèze rectangle $ABCD$ se coupent en E .

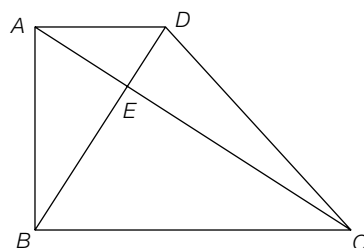
Quels sont les triangles semblables que tu peux trouver dans cette figure ?



ES54 Encore des diagonales

Les diagonales du trapèze rectangle $ABCD$ se coupent perpendiculairement en E .

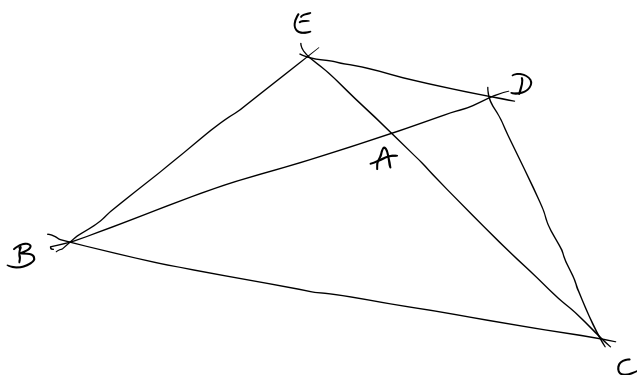
Quels sont les triangles semblables que tu peux trouver dans cette figure ?



ES55 Voilà la question !

Dans cette figure :

- l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus ;
- $\widehat{BEC}$ et $\widehat{CDB}$ sont deux angles droits.



- Les triangles BAE et CAD sont-ils semblables ?
- Les triangles ABC et ADE sont-ils semblables ?



Les « maisons dansantes » à Prague (République tchèque)

Né en 1929, Frank O. Gehry est un architecte canadien renommé ; il a dressé en 1996, au cœur de la ville de Prague, un couple de bâtiments aux formes et aux mouvements des plus originaux.

Associant cônes tronqués, cylindres et prismes droits, Gehry, en collaboration avec l'architecte tchèque d'origine croate Vlado Milunić, s'est inspiré des mouvements ondulants de la rivière Moldau, qui coule à proximité.

Cette construction, qui semble danser sous nos yeux, est surnommée également *Ginger & Fred* pour rendre hommage au mythique couple de danseurs du cinéma des années 1930 à 1950 : Ginger Rogers et Fred Astaire.



Ginger Rogers et Fred Astaire

Représentations de solides

Apprentissages visés

- Reconnaissance, dénomination, description de solides selon leurs propriétés : cylindre, pyramide, cône et sphère
- Réalisation de développements et construction de solides : cylindre, pyramide
- Représentation de solides en perspective
- Utilisation de systèmes de repérage

Sommaire

Pour réactiver certaines connaissances	208
Encore quelques problèmes	208
Pyramide, cylindre, cône, sphère et boule	210



Fichier: Que sais-je ? p. 132

Pour réactiver certaines connaissances

ES56 Esquisse et développement

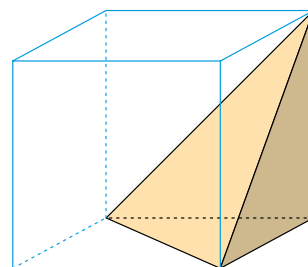
Esquisse une vue en perspective et un développement d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle.

Fichier: ES57 et ES58

Encore quelques problèmes

ES59 Polyèdres inscrits

- Représente quelques polyèdres convexes différents, dont les sommets sont des sommets du cube, comme cet exemple d'un tétraèdre.
- Donne le nom de ceux que tu connais.



ES60 Tendres regards

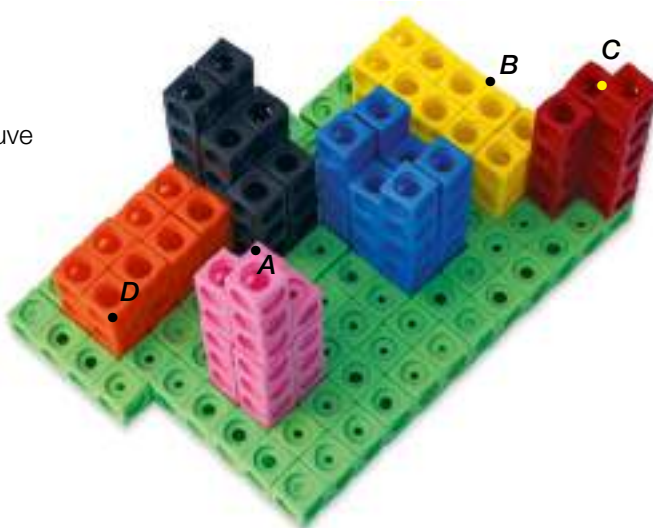
François est amoureux.

- Ce soir, il a décidé de grimper sur le toit de son immeuble rose. Il se place en A , en espérant apercevoir Lucie, qui se trouve sur le toit de l'immeuble jaune, en B .

Son espoir est-il vain ?

- La journée, François se languit au bureau (point D), dans la construction orange, alors que Lucie travaille au dernier étage de la tour bordeaux (point C).

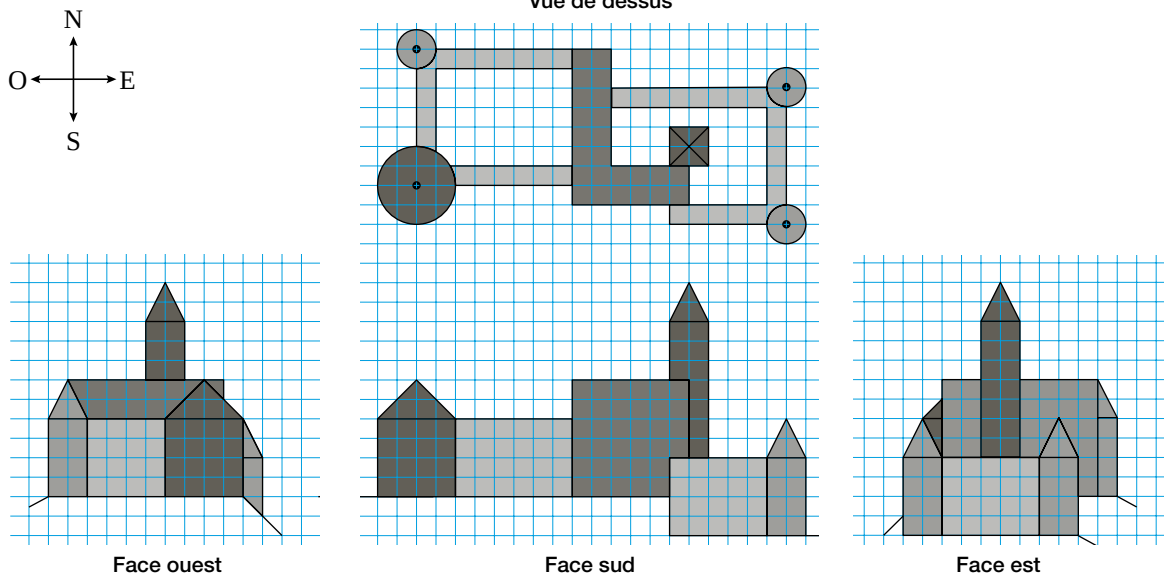
Pourrait-il tendre un fil, pour installer un petit téléphérique entre leurs deux bureaux, sans toucher l'immeuble bleu, afin de lui envoyer des billets doux ?



ES61 Haut-Koenigsbourg

À partir de photos du château du Haut-Koenigsbourg, Maxime réalise quatre dessins : face ouest, face sud et face est du château ainsi que la vue de dessus.

Réalise sur papier quadrillé le dessin de la face nord du château du Haut-Koenigsbourg.



Tiré de Mathématiques sans frontières, 2012



Le Haut-Koenigsbourg est un château médiéval qui se situe en Alsace, dans le département du Bas-Rhin. C'est l'un des sites touristiques les plus visités en France, avec près de 550 000 visiteuses et visiteurs par année.

En 1936, le château fut l'un des lieux de tournage du film *La Grande Illusion* de Jean Renoir.

Pyramide, cylindre, cône, sphère et boule

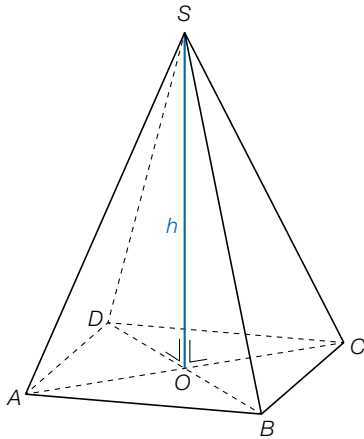
ES64 Régulières ou non ?

Les pyramides **1** et **2** sont régulières, alors que la **3** et la **4** ne le sont pas.

Le segment h représente la hauteur de chaque pyramide.

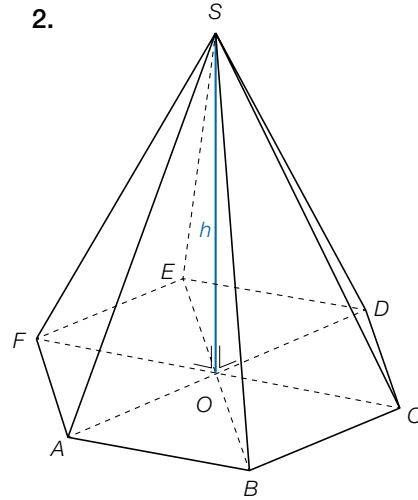
Comment reconnaître une pyramide régulière d'une pyramide non régulière ?

1.



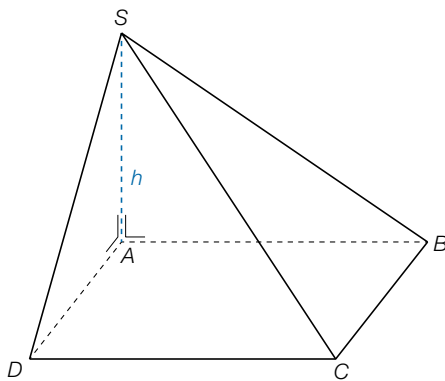
$ABCD$ est un carré

2.



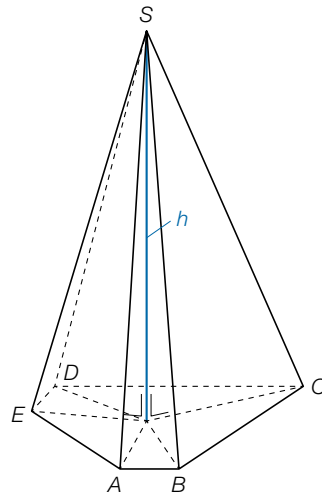
$ABCDEF$ est un hexagone régulier

3.



$ABCD$ est un carré

4.



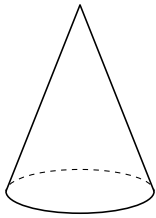
$ABCDE$ est un pentagone non régulier

ES65 Pyramides et autres solides

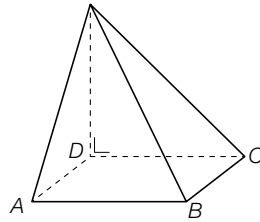
Parmi les figures suivantes, lesquelles représentent des pyramides ?

Précise chaque fois si elles sont régulières ou non.

a)

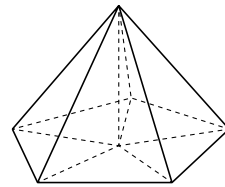


b)

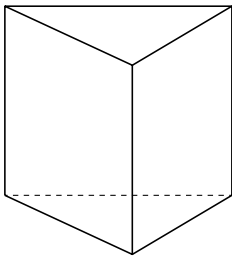


$ABCD$ est un carré

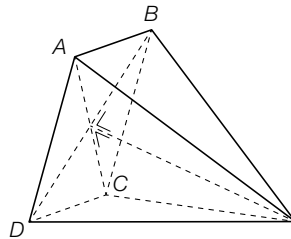
c)



d)

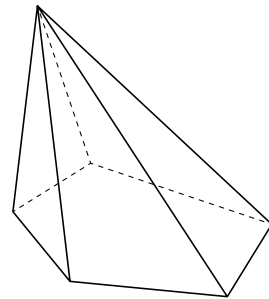


e)

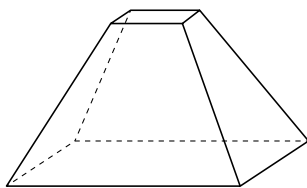


$ABCD$ est un carré

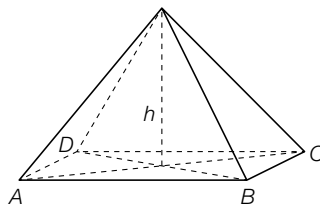
f)



g)

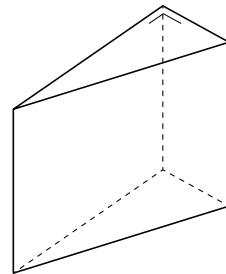


h)

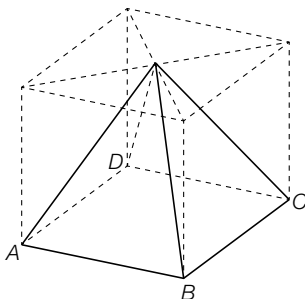


$ABCD$ est un rectangle

i)

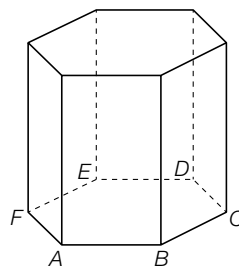


j)



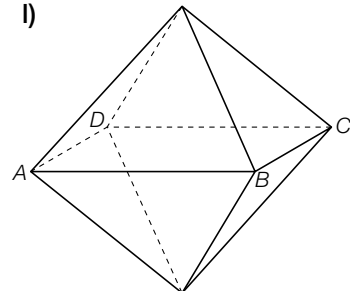
$ABCD$ est un carré

k)



$ABCDEF$ est un hexagone régulier

l)



$ABCD$ est un carré

ES66 À main levée

En codant le dessin, chaque fois que cela est nécessaire, trace à main levée et en perspective :

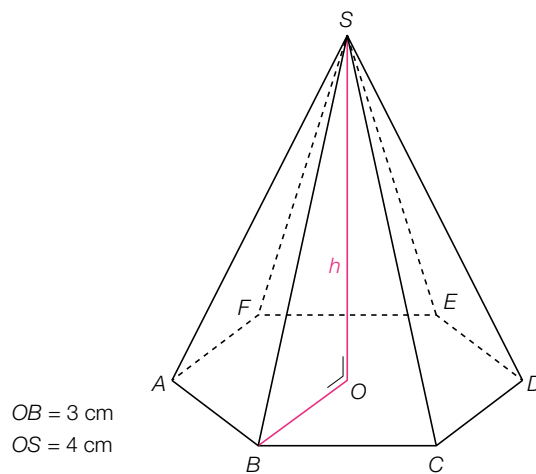
- a) une pyramide régulière à base carrée ;
- b) une pyramide non régulière à base carrée ;
- c) une pyramide non régulière dont la base n'est pas un carré ;
- d) une pyramide régulière dont la base n'est pas un carré.

ES67 Tétraèdre développé

Construis deux développements non superposables du même tétraèdre dont la base est un triangle équilatéral de 4 cm de côté ; les autres faces sont des triangles isocèles dont les côtés isométriques mesurent 5 cm.

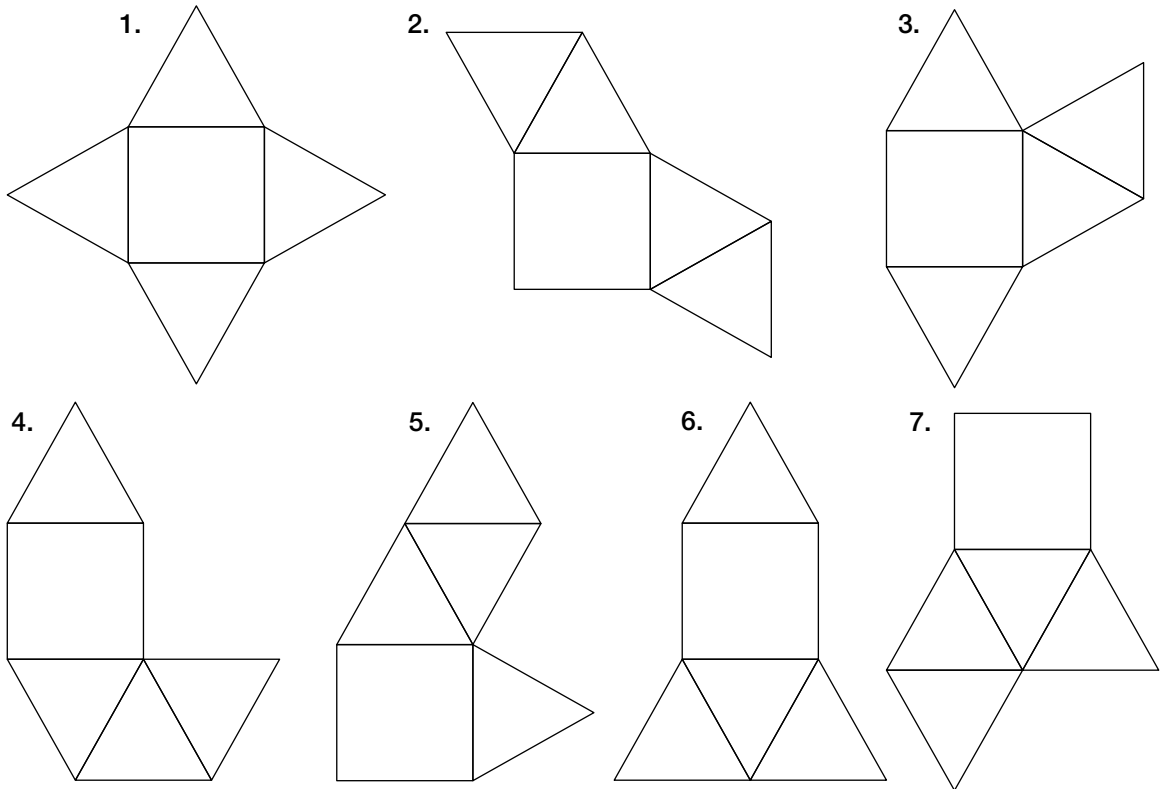
ES68 À base hexagonale

Construis un développement de la pyramide régulière ci-dessous.



ES69 Jules ou Cléopâtre ?

Jules pense avoir dessiné tous les développements possibles d'une pyramide régulière à base carrée :



Cléopâtre prétend qu'il en a oublié et que, de plus, il a commis plusieurs erreurs.

Et toi, qu'en penses-tu ?



Buste de Cléopâtre VII, Saïko

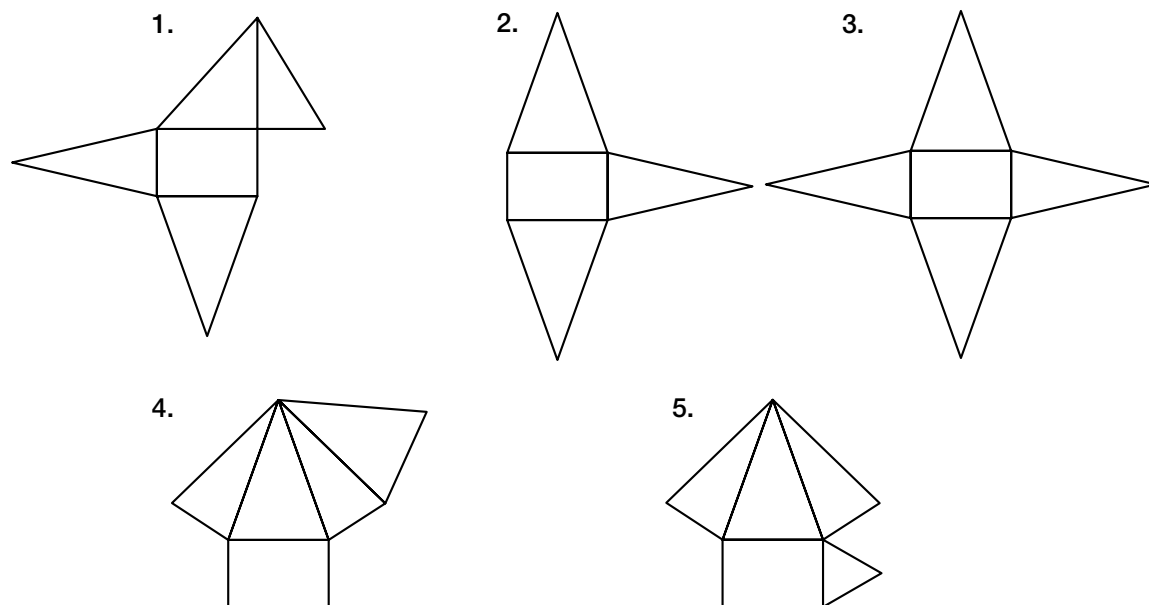
Cléopâtre et Jules César sont un couple mythique qui a inspiré de nombreux films, romans, pièces de théâtre et un des premiers opéras, en 1723 : *Giulio Cesare* de Georg Friedrich Haendel.

Cléopâtre VII est la dernière reine d'Égypte, qu'elle dirige successivement avec ses frères-époux Ptolémée XIII et Ptolémée XIV. Elle est ensuite la compagne et la partenaire des deux généraux romains les plus puissants de cette époque : Jules César, puis Marc-Antoine.

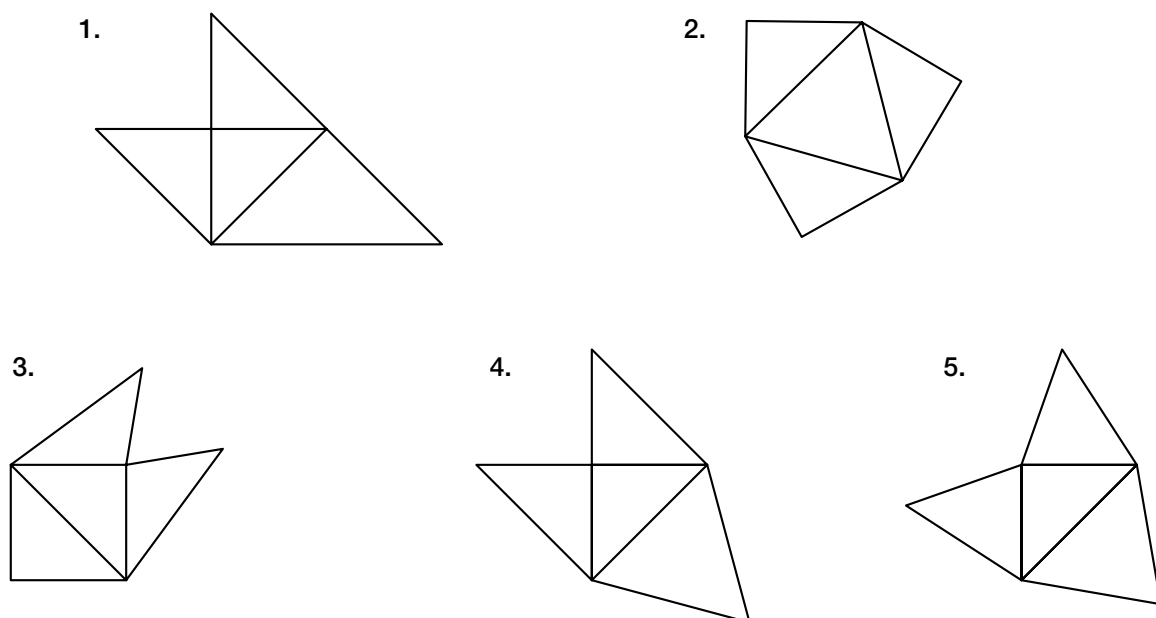
Elle conclut avec eux des alliances politiques et militaires. De 44 à 30 av. J.-C., elle règne avec son fils Ptolémée XV « Césarion », le fils de Jules César. Vaincue par le futur empereur Auguste lors de la bataille d'Actium, Cléopâtre se donne la mort, par morsure d'un serpent. Blaise Pascal, mathématicien et philosophe du XVII^e siècle, dira : « Le nez de Cléopâtre, s'il eût été plus court, toute la face de la terre aurait changé. ».

ES70 Développements de pyramides ?

a) Cinq élèves ont dessiné le développement d'une même pyramide. Quels sont les développements corrects ?



b) Et pour cette pyramide régulière ?



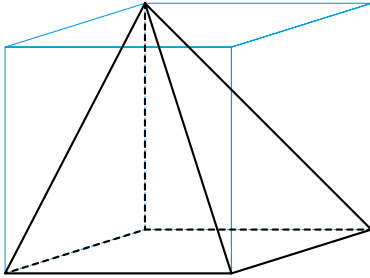
ES71 Pyramides en cube

Dessine un développement de chacune des pyramides suivantes.

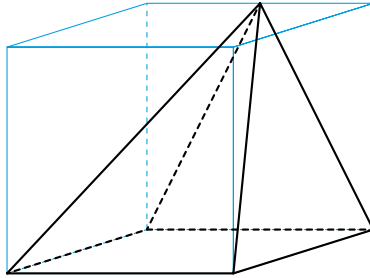
Chacune est située à l'intérieur d'un cube de 5 cm d'arête.

Les sommets des pyramides sont situés soit sur l'un des sommets du cube, soit au milieu d'une de ses arêtes, soit au centre d'une de ses faces.

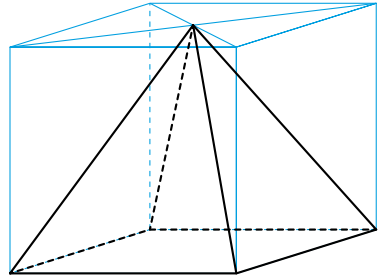
a)



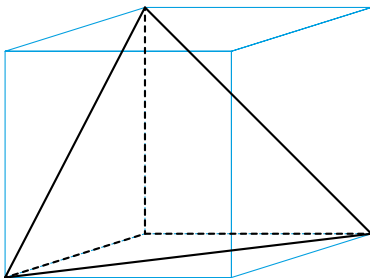
b)



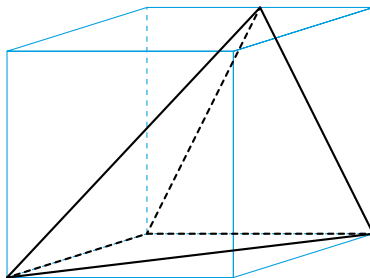
c)



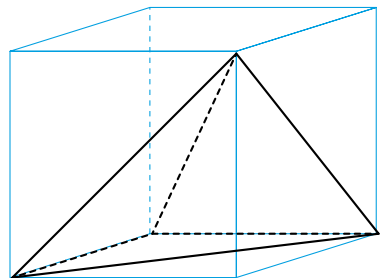
d)



e)



f)

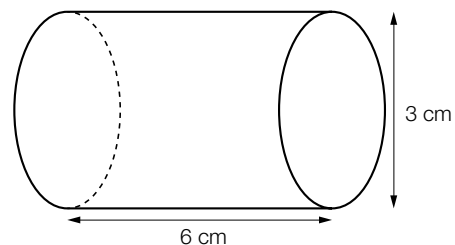


ES72 Cylindre en représentations

- Esquisse un cylindre vu en perspective, puis son développement. Sur ce dernier, colorie de la même couleur les lignes qui devraient avoir les mêmes longueurs.
- Sur une feuille, construis précisément le développement d'un cylindre dont le rayon mesure 2 cm et la hauteur 5 cm.
- Découpe ton développement et fabrique le cylindre afin de vérifier que ton travail est correct.

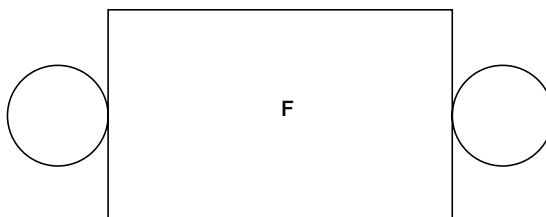
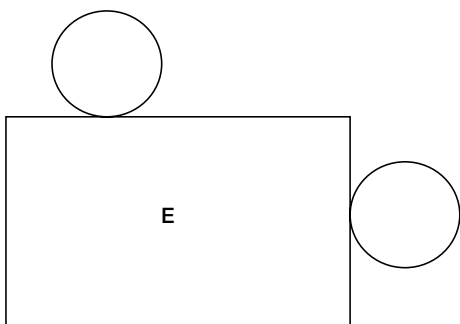
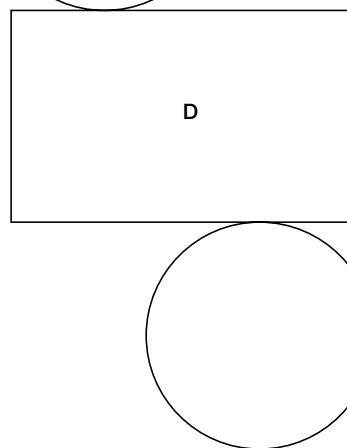
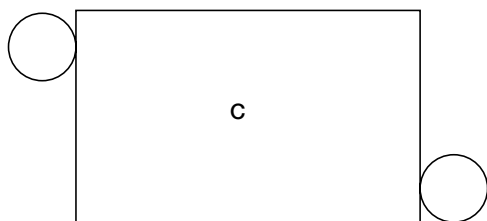
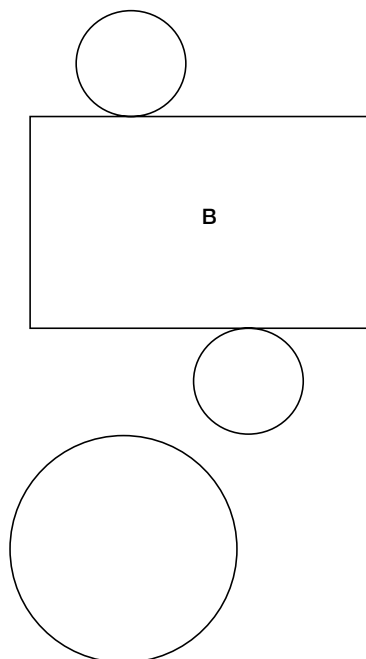
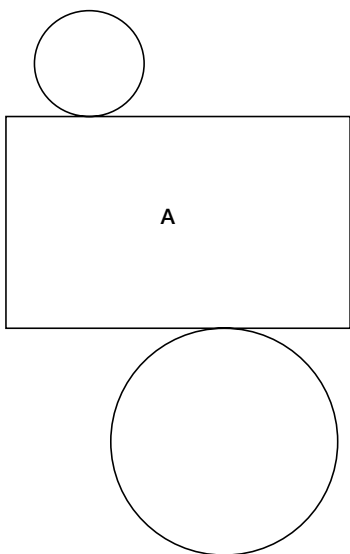
ES73 On développe

Construis le développement de ce cylindre.



ES74 Développements de cylindres ?

Peut-il s'agir de développements de cylindres ?



ES75 Du plan à l'espace

- a) Représente l'ensemble des points situés à 3 cm d'un point O dans le plan (sur une feuille).
Comment nomme-t-on cette figure ?
- b) Sur ta figure, colorie l'ensemble des points dont la distance au point O est plus petite ou égale à 3 cm.
Comment nomme-t-on cette figure ?
- c) Comment nomme-t-on l'ensemble des points situés à 3 cm d'un point O , mais dans l'espace cette fois ?
- d) Comment nomme-t-on l'ensemble des points dont la distance au point O est plus petite ou égale à 3 cm, dans l'espace ?

ES76 Tu me fais tourner la tête

- a) Qu'obtiens-tu si tu fais tourner un cercle autour d'un axe confondu avec un de ses diamètres ?
- b) Qu'obtiens-tu si tu fais tourner un disque autour d'un axe confondu avec un de ses diamètres ?



Verena Loewensberg:
Untitled (1972)

« L'art concret prend forme avec l'aide de la couleur, de l'espace, de la lumière, du mouvement. »

Van Doesburg (1883-1931) – peintre, architecte, poète et théoricien de l'art néerlandais – a proposé, avec d'autres artistes du début du XX^e siècle, une nouvelle approche de l'art pictural expliquée dans leur *Manifeste des bases de la peinture concrète (1930)* : « *Le tableau doit être entièrement construit avec des éléments purement plastiques, c'est-à-dire plans et couleurs. Un élément pictural n'a pas d'autre signification que 'lui-même', en conséquence le tableau n'a pas d'autre signification que 'lui-même'.* »

Par les isométries – translations, rotations, symétries axiales ou centrales – ou, comme dans le tableau ci-dessus, les homothéties, Van Doesburg offre aux figures géométriques les plus simples un mouvement inédit.

À la suite de ce manifeste, d'autres artistes comme la Zürichoise Verena Loewensberg (1912-1986) ou le Suisse Max Bill (1908-1994), reprirent à leur compte ses idées et les développèrent de multiples façons. Par exemple, ce dernier publia en 1949 un ouvrage intitulé *La pensée mathématique dans l'art de notre temps*.

Transformations géométriques

Apprentissages visés

- Reconnaissance et dénomination d'isométries, d'homothéties et de similitudes ; description et identification de leurs caractéristiques
- Anticipation de la position d'une figure après une ou plusieurs isométries
- Construction de l'image d'une figure plane par une homothétie, une similitude
- Réalisation de frises ou de pavages à l'aide d'isométries
- Utilisation de systèmes de repérage

Sommaire

Pour réactiver certaines connaissances	220
Homothéties	220
Encore quelques problèmes	222



Fichier: Que sais-je ? p. 141

Pour réactiver certaines connaissances

ES77 Faux ou vrai ?

Faux ou vrai ? Corrige si c'est faux.

- a) Toutes les isométries conservent les longueurs, la mesure des angles et le parallélisme.
- b) La translation ne conserve ni le sens des vecteurs, ni les directions, ni l'orientation.
- c) La symétrie axiale conserve l'orientation et les directions, mais inverse le sens des vecteurs.
- d) La rotation ne conserve pas les directions, mais conserve le sens des vecteurs.
- e) La symétrie centrale correspond à une rotation de $\pm 180^\circ$ de même centre.
Elle conserve les directions, mais pas le sens des vecteurs.

Fichier: ES78 à ES80

Homothéties

Fichier: ES81 à ES83

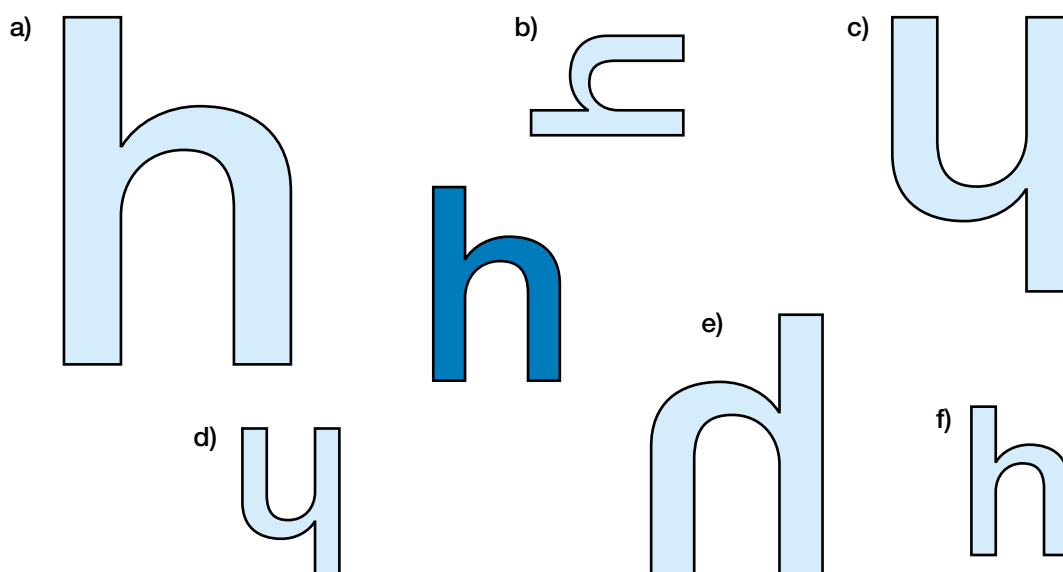
ES84 Y a-t-il un rapport ?

Indique par quelle transformation on peut obtenir les figures **a)** à **f)** à partir de la figure foncée.

H+ homothétie de rapport positif

H- homothétie de rapport négatif

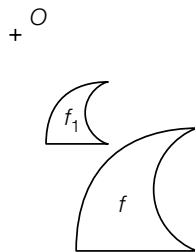
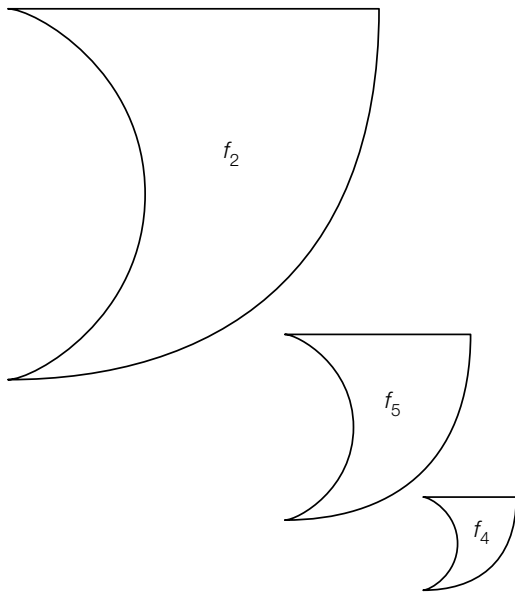
I impossible à l'aide d'une seule homothétie



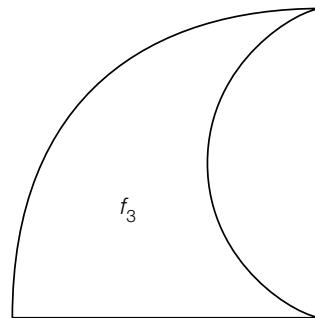
ES85 Le K

Les figures ci-dessous sont les images de f par des homothéties de centre O .
Pour quelle(s) figure(s) le rapport d'homothétie k est-il :

- a) plus grand que 1 ?
- b) compris entre 0 et 1 ?
- c) compris entre -1 et 0 ?
- d) plus petit que -1 ?



Le K est le titre d'un recueil de nouvelles rédigées par Dino Buzzati (1906-1972), l'auteur du célèbre roman *Le Désert des Tartares*. Il s'agit également du titre du premier récit de ce recueil, l'histoire d'un marin accompagné durant ses voyages, dès son plus jeune âge, par une forme sombre... un requin qu'il nomme « Le K ».



Encore quelques problèmes

ES90 Qu'a-t-il trouvé ?

Jacques a construit un rectangle $ABCD$, puis :

- le point A' , symétrique de A par rapport à B ;
- le point B' , symétrique de B par rapport à C ;
- le point C' , symétrique de C par rapport à D ;
- le point D' , symétrique de D par rapport à A .

Il compare alors les aires des quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$ et s'étonne du résultat.

Pourquoi ?

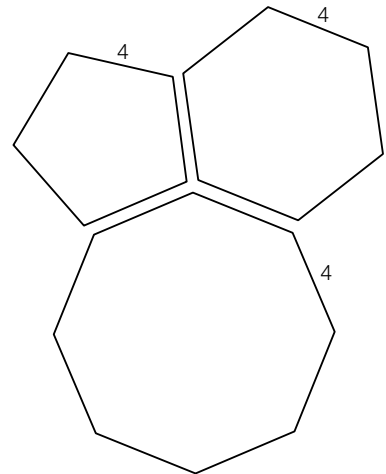
Fichier: **ES91** et **ES92**

ES93 Avec des polygones réguliers

Un carreleur dispose de polygones réguliers de 4 cm de côté : des triangles équilatéraux, des carrés, des pentagones, etc.

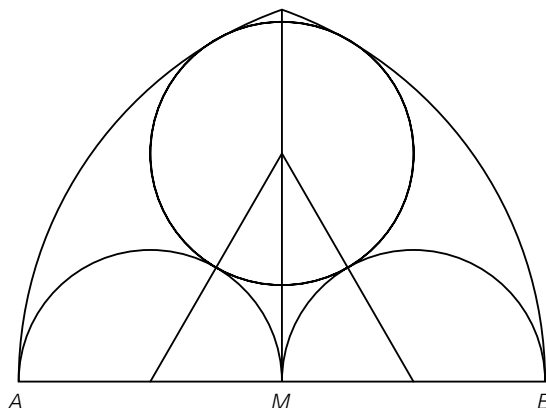
Arrivera-t-il à réaliser cet assemblage ?

Quels motifs de pavage peut-il proposer à ses clients ?



ES94 Vitrail

- a) Reproduis cette figure avec $AB = 8$ cm.
 b) Effectue $\mathcal{H}(M; 1,5)$ et $\mathcal{H}(M; -1,5)$
 à partir de la figure reproduite.



Encore aujourd'hui, les vitraux sont un élément très apprécié de décoration des maisons, des églises et des espaces extérieurs.

La technique du vitrail est très ancienne et n'a guère varié depuis le Moyen-Âge, époque où l'on commença à utiliser de petites baguettes de plomb pour y insérer des morceaux de verre, en lieu et place des cadres de bois.

Depuis le XVI^e siècle, elle a connu plusieurs innovations techniques. Pour la coupe du verre, le diamant a remplacé la tige chauffée au rouge, de même le plomb est devenu plus fin. Au fil des siècles, les procédés de coloration du verre se sont développés et enrichis, permettant d'augmenter la palette de teintes possibles.

L'amitié, vitrail sur le Chemin de Farinet, Saillon (VS)

Robert Héritier pour le graphisme et Théo Imboden pour le travail du verre – Une réalisation des « Amis de Farinet »



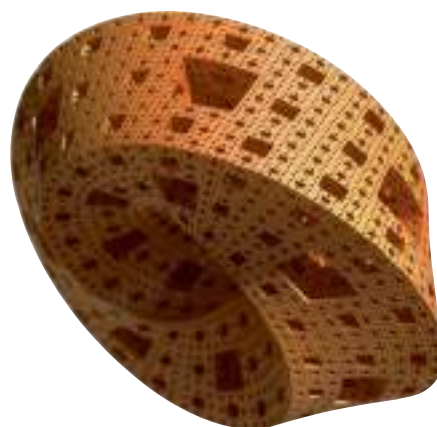
La ville de Hongkong, la nuit

À chaque fois que nous ouvrons nos paupières, les organes de la vue et notre cerveau produisent un extraordinaire travail pour nous permettre d'observer et d'apprécier l'espace qui nous environne.

Percevoir le monde en trois dimensions nous est habituel ; pourtant, à chacun de nos regards, nos deux yeux, de par leur position, voient deux images différentes que les nerfs optiques conduisent simultanément au cerveau. C'est bien là, dans une zone nommée *cortex visuel*, que la reconstruction en trois dimensions du sujet observé se produit, nous permettant ainsi de distinguer le relief.

Les objets de l'espace reproduits en deux dimensions sur les photos, dessins, gravures, etc., ne sont pas toujours faciles à se représenter.

D'un cube esquissé en perspective à l'élégant et fractal ruban de Moebius ci-contre, chacun de nos deux yeux perçoit individuellement les rayons de lumière émis par l'image ; instantanément, notre cerveau associe et traduit ces informations pour nous offrir une vision en relief.



Le ruban de Moebius de Matthieu Deltour

Espace... et problèmes



Un graffiti en trompe-l'œil dans les rues de Londres

Les artistes des temps plus anciens, comme celles et ceux des rues d'aujourd'hui profitent du travail d'interprétation de notre cerveau lorsque nous regardons le monde alentour. Habitué à reconstruire le relief, le cerveau peut se laisser abuser en imaginant une troisième dimension là où il n'y a qu'un plan.

Nombre d'artistes ont ainsi joué sur les illusions d'optique qui nous font percevoir des espaces, des reliefs et des profondeurs, là où il n'y a que des surfaces planes.



Première séance publique d'un film long-métrage couleurs en 3D (Hollywood, Californie, 26.11.1952)

Sur le grand écran plat du cinéma sont projetées, une à une et à grande vitesse, les images des films ; vingt-quatre images successives par seconde sont ainsi diffusées, dont nos yeux captent lumière et couleurs et que notre cerveau associe en continu.

Pour obtenir des films que notre cerveau va interpréter comme étant en 3D, deux images différentes sont diffusées en même temps pour reproduire la situation habituelle de notre vision nommée *binoculaire*. Les lunettes utilisées permettent de tromper notre cerveau en réunissant ces deux images planes et les lui font interpréter en une seule vue en relief.

Ce système n'est pas nouveau puisque les inventeurs du cinématographe, les frères Lumière, l'avaient déjà expérimenté dans les années 1900. Dans les années 1930, puis dans les années 1950, le cinéma en relief a connu divers développements, avant que la grande mode actuelle du cinéma 3D envahisse les salles.

Le dernier principe de projection inventé n'a plus besoin de deux projecteurs différents ; il permet de diffuser très rapidement un seul flux de 144 images par seconde et alterne image gauche et image droite, abusant ainsi notre cerveau et nous offrant l'illusion de la troisième dimension.

Fichier: ES100 à ES102

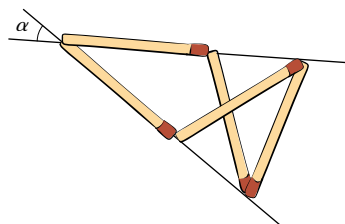
ES103 Être à la même distance

Construis l'ensemble des points qui sont à la même distance d'une droite d fixe et d'un point P fixe, hors de cette droite.

ES104 Les allumettes

On a disposé cinq allumettes de longueurs égales, comme sur cette figure.

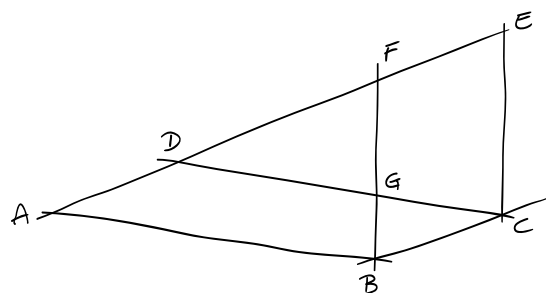
Que vaut l'angle α ?

**ES105 Lesquels ?**

$ABCD$ et $BCEF$ sont des parallélogrammes.

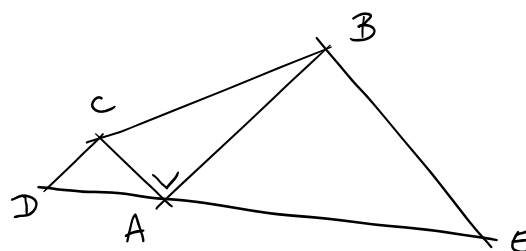
A , D , F et E sont alignés.

Quels sont les polygones qui ont la même aire ?

**ES106 Alignés ?**

Les triangles ABE et ACD sont isocèles :
 $BA = BE$ et $CA = CD$.

Cette information permet-elle d'affirmer que les points D , A et E sont alignés ?

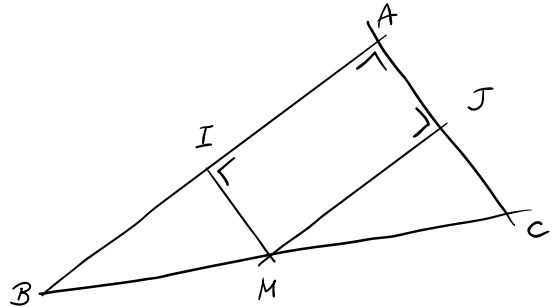


ES107 Mini

Le triangle ABC est rectangle en A .

On projette orthogonalement un point M du segment BC sur les côtés AB et AC , respectivement en I et J .

Où faut-il placer M pour que la longueur du segment IJ soit minimale?

**ES108 En quatre parties**

Le maître : « Comment partager un parallélogramme en quatre parties de même aire ? »

Un élève : « Facile, Monsieur, il suffit de tracer les diagonales de ce parallélogramme, et on a ainsi quatre parties de même aire. »

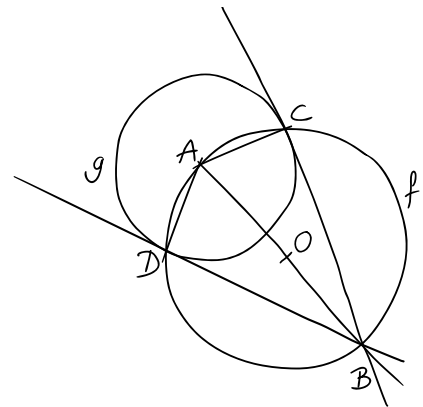
Est-ce vrai ?

Fichier : **ES109****ES110 Droites et cercles**

Dans cette figure :

- AB est un diamètre du cercle f de centre O ;
- A est le centre du cercle g ;
- D et C sont les intersections des deux cercles f et g .

Que dire des segments BD et BC ?

Fichier : **ES111****ES112 Quel solide ?**

À chaque sommet d'un cube de 6 cm d'arête, tu enlèves une pyramide à base triangulaire dont les sommets d'une des bases sont les milieux de trois arêtes concourantes du cube.

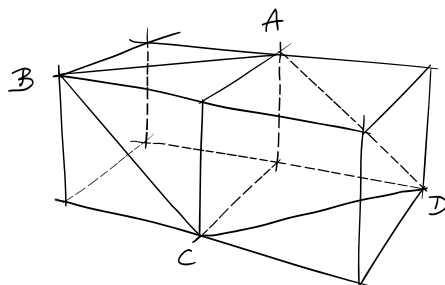
Représente le solide ainsi obtenu en perspective.

Fichier : **ES113 à ES116**

ES117 Ouvrir l'œil, et le bon...

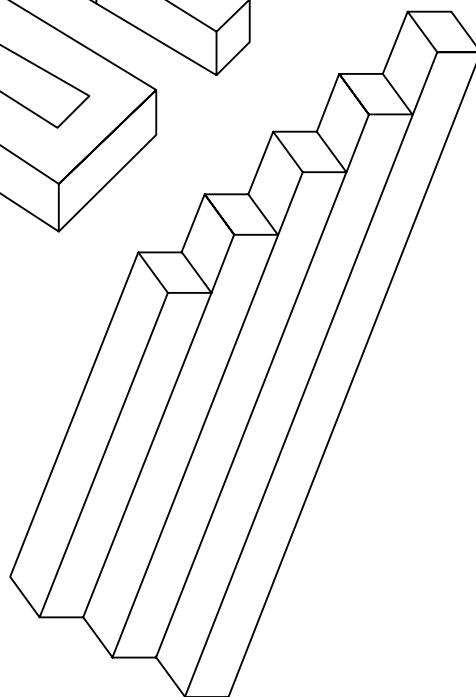
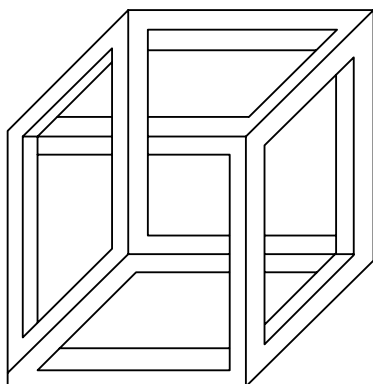
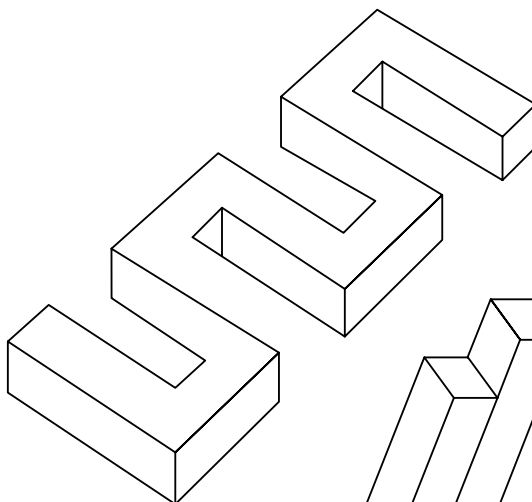
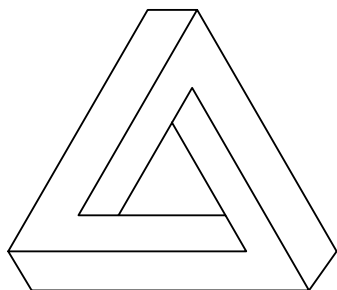
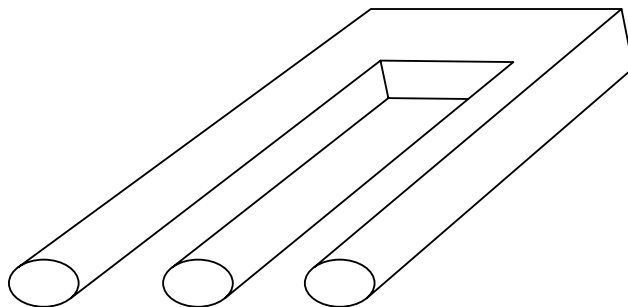
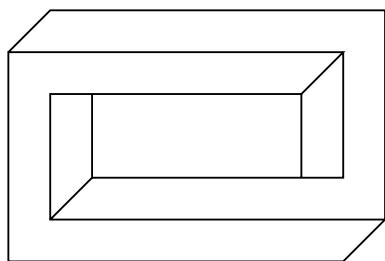
Les points A , B , C et D sont des sommets de deux cubes isométriques, mis côte à côte.

Que dire du quadrilatère $ABCD$?



ES118 Objets insolites

Voici quelques dessins pour le moins étranges! Observe-les, puis essaie d'en agrandir quelques-uns.



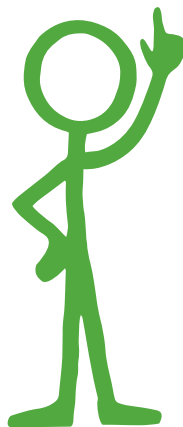
Depuis la 9^e, tu as rencontré à plusieurs reprises les décors et les objets insolites d'Escher, artiste néerlandais. Sam Szafran, né en 1934, est lui un artiste français qui aime également créer l'illusion et jouer avec la perspective, créant ainsi, en particulier, des cages d'escalier bien étranges...



Sans titre (escalier personnage), 2002, pastel sur papier 66,5 × 79 cm

Grandeurs et mesures

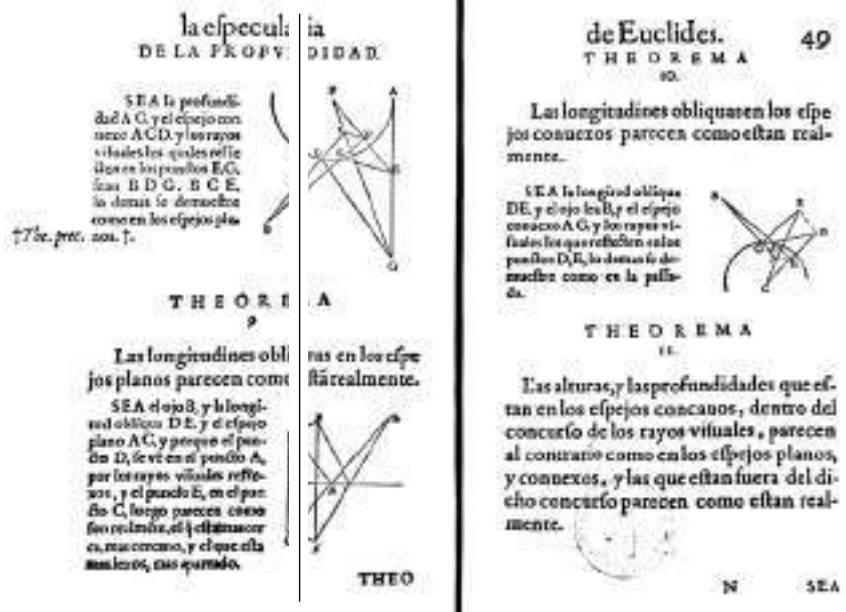
- Lignes, surfaces et théorèmes
- Solides
- Diverses mesures
- Grandeurs, mesures et... problèmes



Grandeurs et mesures

Mobiliser la mesure pour comparer des grandeurs

Résolution de problèmes
de mesurage en lien
avec les grandeurs
et les théorèmes étudiés.



Théorèmes extraits des Éléments d'Euclide, III^e s. av. J.-C. (traduction espagnole)

Périmètre de figures, aire de surfaces, détermination d'angles et de grandeurs diverses... : ces notions semblent bien connues tant les mathématiciens et géomètres grecs ont élaboré des savoirs, des savoir-faire et des outils de mesures depuis des millénaires. Si les théorèmes de Thalès (625-547 av. J.-C.) et de Pythagore (VI^e s. av. J.-C.) sont particulièrement connus, de nombreux autres, dus en particulier à Euclide (III^e s. av. J.-C.), forment un ensemble de propositions permettant de résoudre de nombreux problèmes.

Un des enjeux des géomètres grecs était la résolution de problèmes à l'aide uniquement du compas et de la règle non graduée ; ces scientifiques ne sont pas parvenus à répondre pleinement à toutes leurs interrogations. De célèbres problèmes comme la quadrature du cercle, la trisection de l'angle et la duplication du cube ont attendu bien des siècles avant d'être démontrés comme étant... impossibles à effectuer avec règle et compas. Les trois démonstrations reposent sur les mêmes arguments, assez complexes d'ailleurs : c'est l'algèbre du XIX^e siècle qui a permis d'établir ces preuves.

Lignes, surfaces et théorèmes

Apprentissages visés

- Estimation, comparaison, classement et mesure de grandeurs, dans diverses unités, par manipulation de lignes et de surfaces
- Mesure des dimensions adéquates, calcul de la longueur d'un cercle et d'un arc de cercle, de l'aire d'un disque et d'un secteur circulaire, du périmètre et de l'aire d'une surface par décomposition en figures simples
- Calcul d'une grandeur manquante à partir de celles qui sont connues
- Utilisation du théorème de Pythagore
- Utilisation de la proportionnalité des figures semblables et du théorème de Thalès

Sommaire

Pour réactiver certaines connaissances	234
Lignes et surfaces	234
Pour réactiver certaines connaissances	238
Théorème de Pythagore	239
Pour consolider et approfondir	245
Pour réactiver certaines connaissances	246
Théorème de Thalès	247
Figures semblables	250
Encore quelques problèmes	251

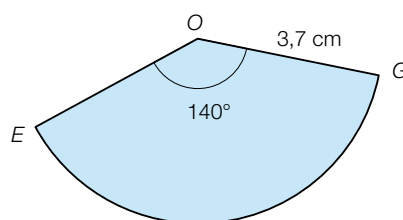


Pour réactiver certaines connaissances

Fichier: GM1

GM2 Un arc et un secteur

Calcule l'aire et le périmètre de ce secteur circulaire.

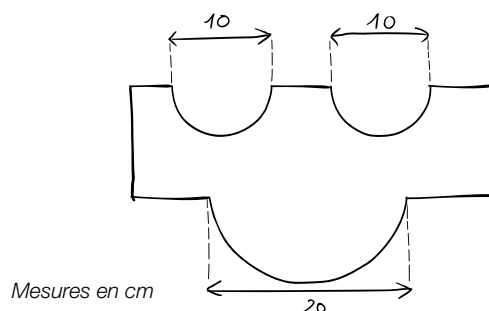


Lignes et surfaces

GM3 Arcs et rectangles

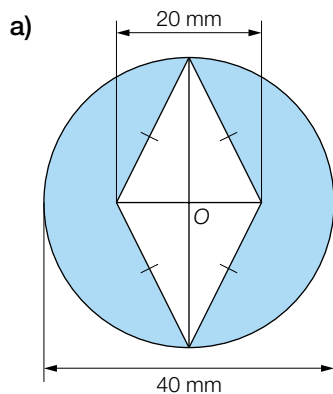
Les deux longueurs d'un rectangle de 40 cm sur 15 cm ont été déformées par trois demi-cercles, comme le montre le croquis ci-contre.

Calcule le périmètre et l'aire de cette figure.

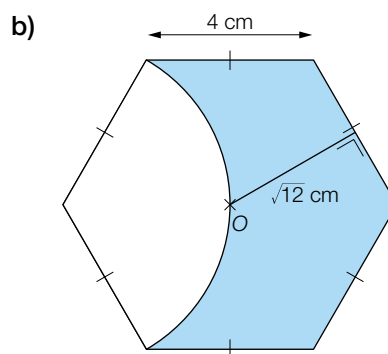


GM4 Figures complexes

Calcule l'aire de la partie colorée des deux figures ci-dessous.



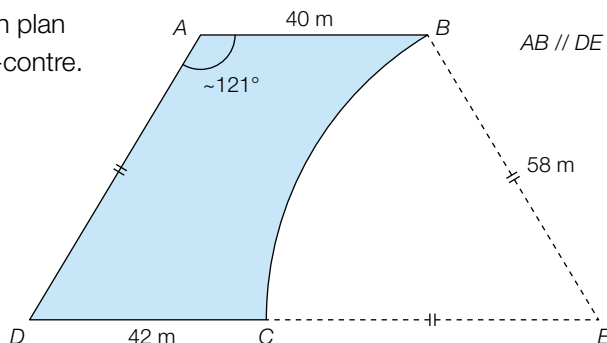
Cercle de centre O



GM5 Plan d'eau

À l'intérieur d'un parc, on décide d'aménager un plan d'eau dont la forme est illustrée par le dessin ci-contre. Un sentier en fera le tour.

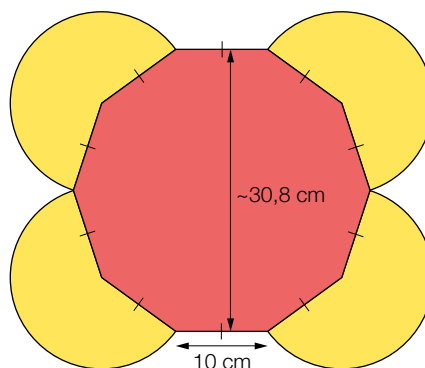
Quelle est la longueur du sentier ?



GM6 Motif

Sur un tapis, tu peux observer le motif brodé ci-contre.

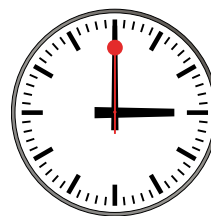
Combien mesure l'aire de la surface brodée ?



GM7 L'horloge

La distance entre le centre de cette horloge et l'extrémité de l'aiguille des minutes est de 30 cm.

Calcule la distance que va parcourir la pointe de l'aiguille des minutes entre 3 h et 4 h 44 min.



GM8 Trouver la mesure

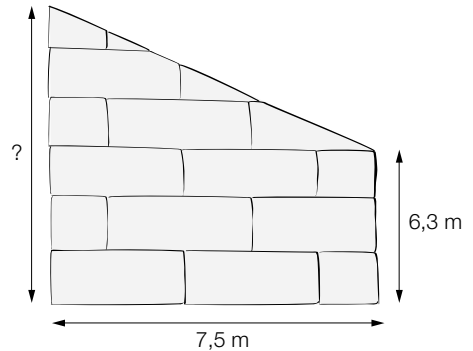
- Quelle est la mesure de la longueur d'un rectangle dont le périmètre vaut 27 cm et la largeur 4 cm ?
- Quelle est la mesure de la hauteur d'un triangle dont la longueur de la base correspondante est égale à 6 cm et dont l'aire vaut $16,5 \text{ cm}^2$?
- Quelle est la mesure du rayon d'un cercle dont le périmètre est égal à $5\pi \text{ cm}$?

GM9 À partir de la formule

- a) Calcule la longueur de la base d'un triangle dont la hauteur correspondante mesure 7 cm et l'aire 4 cm².
- b) Le périmètre d'un triangle équilatéral est de 10,5 cm. Son aire est d'environ 5,3 cm².
Calcule la mesure de sa hauteur.

GM10 Les dimensions du trapèze

- a) Quelle est la hauteur d'un trapèze dont l'aire vaut 95 m², la grande base 12 m et la petite base 7 m ?
- b) L'aire d'un trapèze vaut 9,3 cm²; sa grande base mesure 6,8 cm et sa hauteur 1,5 cm.
Quelle est la mesure de sa petite base ?
- c) L'aire du mur de cette maison est de 52,875 m².
Quelle est la mesure de sa hauteur maximale ?

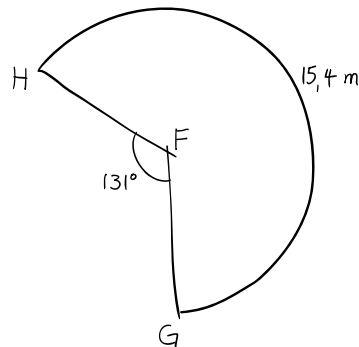


GM11 Autour du disque

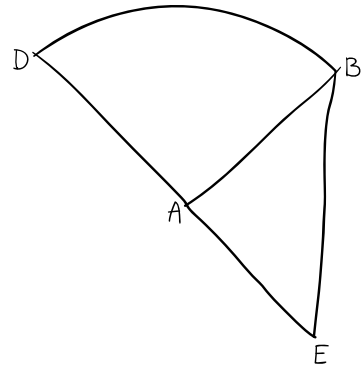
- a) Peut-on mettre un DVD dont l'aire est de 49π cm² dans une pochette carrée de 13,5 cm de côté ?
- b) Une place de jeu circulaire est entourée d'une barrière dont la longueur totale est de 86,4 m. Quelle est l'aire de cette place de jeu ?

GM12 À propos d'arc et de secteur

- a) Quel est le périmètre de ce secteur circulaire de centre F ?



- b) L'aire du secteur circulaire ABD est de $17,5 \text{ dm}^2$.
 Les points D , A et E sont alignés. $AB = 4,8 \text{ dm}$.
 Le triangle ABE est-il rectangle en A ?

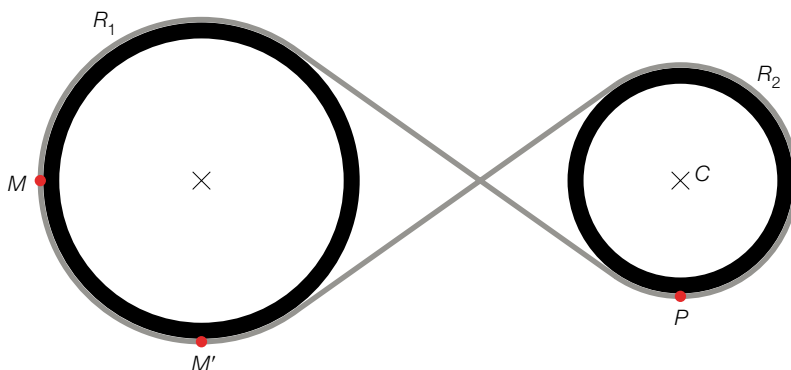


Fichier : GM13 à GM16

GM17 Transmission par courroie

Dans un système de transmission par courroie croisée, deux roues tournent en sens inverse l'une de l'autre.

Dans le système illustré ci-dessous, la roue R_1 , de 60 cm de rayon, tourne d'un quart de tour de façon que le point M se retrouve en M' .



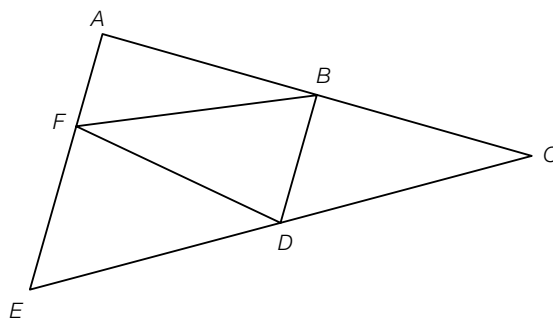
- a) Calcule la longueur de l'arc de cercle $\widehat{MM'}$.
- b) La roue R_2 , entraînée par R_1 , a tourné autour de son centre C .
 Le sens de rotation effectuée par la roue R_2 est-il positif ou négatif ?
- c) Le point P se retrouve en P' (non représenté).
 L'angle $\widehat{PCP'}$ mesure 216° .
 Calcule le rayon de la roue R_2 .

Fichier: Que sais-je ? p. 175

Pour réactiver certaines connaissances

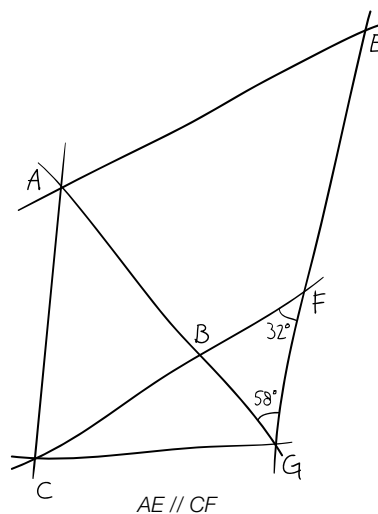
GM18 À vue d'œil!

À vue d'œil, nomme tous les triangles de cette figure qui te paraissent rectangles en précisant pour chacun d'eux quelle serait l'hypoténuse.



GM19 Des triangles rectangles

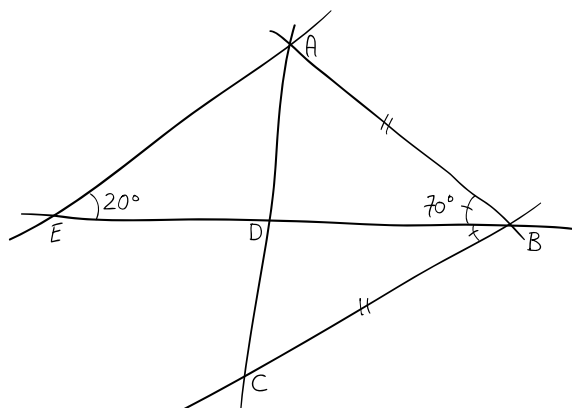
Dans le croquis ci-dessous, nomme tous les triangles tracés dont on est sûr qu'ils sont rectangles.



GM20 Rectangle ou pas?

Le triangle ABE est-il rectangle?

Et le triangle ADE ?



GM21 Diagonales perpendiculaires

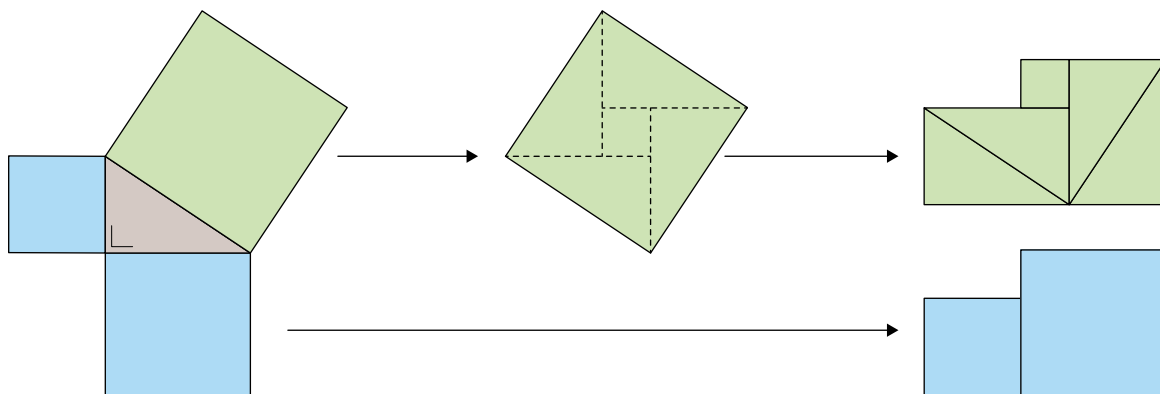
- Existe-t-il un trapèze non losange dont les diagonales sont perpendiculaires ?
- Que dire d'un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires ?

Théorème de Pythagore

GM22 Voyez !

Telle est la seule indication qui accompagne ces figures, imaginées par Bhaskara (école indienne, 1050 apr. J.-C.).

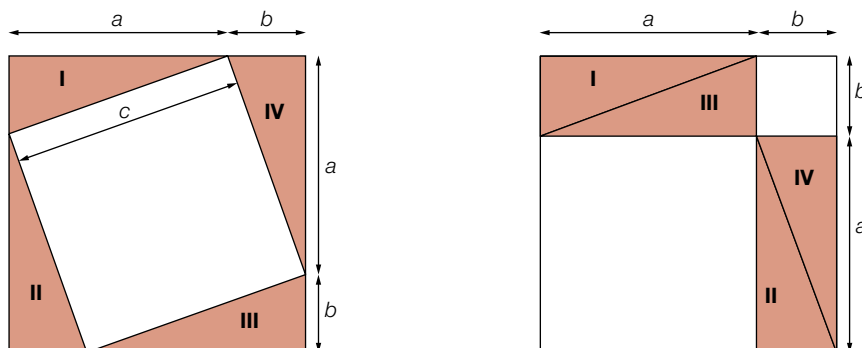
- Mais qu'y a-t-il à voir ?
- Quelle relation peux-tu établir entre les trois côtés d'un triangle rectangle ?



GM23 Tapis de laine

Ces deux mêmes tapis carrés ont été décorés à l'aide de quatre triangles rectangles isométriques.

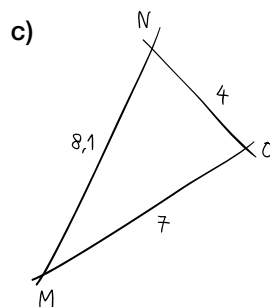
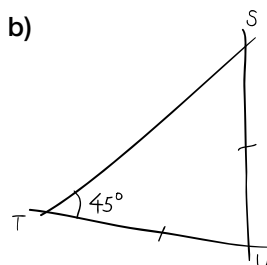
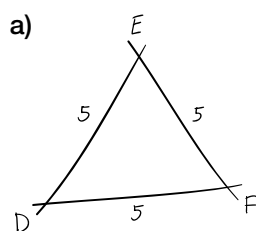
- Quel est le motif qui nécessite le plus de laine blanche ?



- Quelle relation mathématique peux-tu établir entre a , b et c ?

GM24 Le sont-ils ?

Les triangles ci-dessous sont-ils rectangles ?



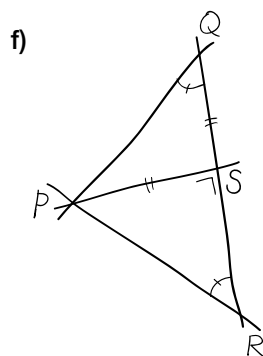
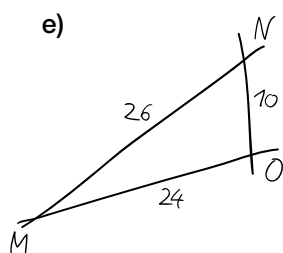
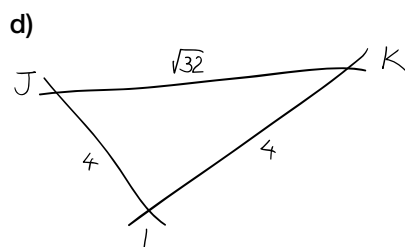
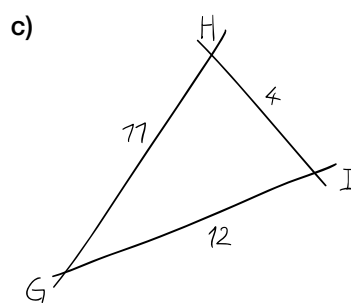
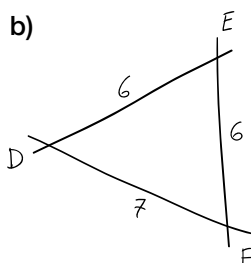
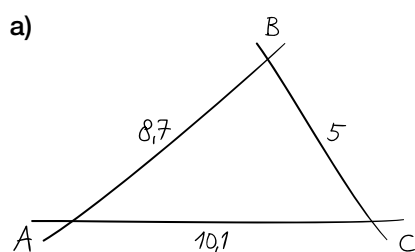
Mesures exprimées en centimètres

GM25 Vérifications !

- a) Construis un triangle MNP tel que les longueurs de ses côtés valent : $MN = 11,2$ cm, $MP = 6$ cm et $NP = 12,8$ cm. À vue d'œil, ce triangle est-il rectangle ?
- b) Vérifie ta réponse en utilisant le théorème de Pythagore.

GM26 Six triangles rectangles ?

Les triangles ci-dessous sont-ils rectangles ?



Mesures exprimées en centimètres

GM27 Quel est le troisième ?

ABC est un triangle rectangle en C .

Dans chacun des cas suivants, calcule la longueur du côté manquant.

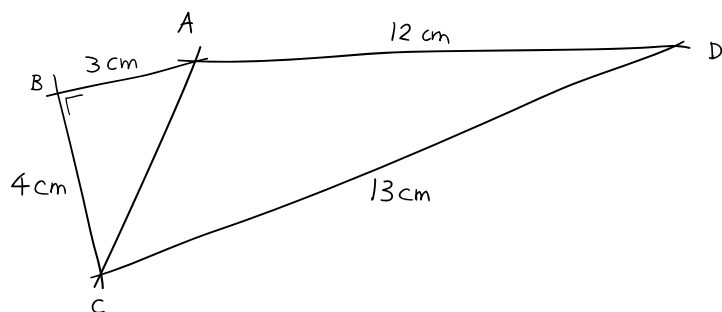
Cas 1 : $AC = 15$ cm et $BC = 8$ cm.

Cas 2 : $AB = 2,9$ m et $BC = 20$ dm.

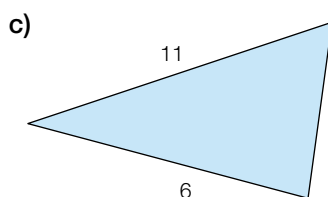
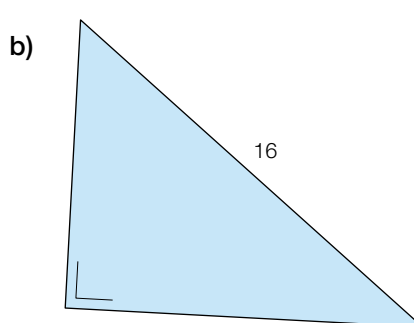
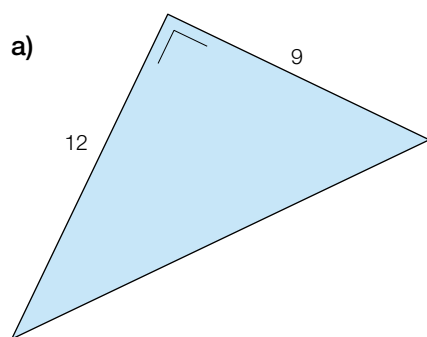
Cas 3 : $AB = 8,5$ cm et $AC = 55$ mm.

GM28 Encore rectangle ?

D'après le croquis ci-dessous, le triangle ADC est-il rectangle ?

**GM29 Si tu peux !**

Calcule, si possible, la (ou les) mesure(s) manquante(s) des côtés de chaque triangle.



GM30 La corde à treize nœuds

Les anciens Égyptiens utilisaient une corde à treize nœuds, régulièrement espacés, pour obtenir des angles droits.



Ils pouvaient, par exemple, facilement vérifier que leurs champs étaient rectangulaires. Comment s'y prenaient-ils ?

GM31 Le côté manquant

Pour les trois triangles rectangles suivants, calcule la mesure du côté manquant.

- a) Triangle ABC , rectangle en B , avec $AB = 8$ dm et $BC = 15$ dm.
- b) Triangle DEF , rectangle en F , avec $DF = 8$ m et $DE = 8,2$ m.
- c) Triangle GHI , rectangle en I , avec $GH = 0,85$ dam et $HI = 0,13$ dam.

GM32 L'échelle

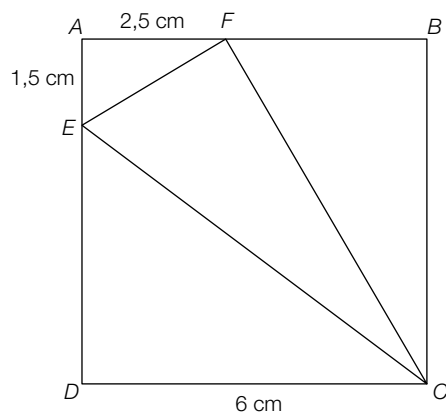
Stéphane veut rendre visite à son amante. Pour y parvenir, il doit passer par la fenêtre de sa chambre. Stéphane positionne une échelle de telle manière que le haut de celle-ci arrive juste au bas de la fenêtre, à 4 m au-dessus du sol. Les pieds de l'échelle se retrouvent alors à une distance horizontale de 1,50 m du bas du mur.

Quelle est la longueur de l'échelle ?

GM33 Un triangle dans un carré

$ABCD$ est un carré de 6 cm de côté.

Le triangle EFC est-il rectangle ?



GM34 Le skate

Dans un collège, les élèves disposent de casiers dont les dimensions sont : 40 cm de large, 80 cm de haut et 30 cm de profondeur.

Vladimir peut-il y déposer son skate de 95 cm ?

GM35 Le carton

Une boîte en carton a la forme d'un pavé droit dont les dimensions sont $56 \text{ cm} \times 72 \text{ cm} \times 33 \text{ cm}$. À l'intérieur, une ficelle est tendue d'un sommet à l'autre.

Quelle peut être la longueur maximale de cette ficelle ?

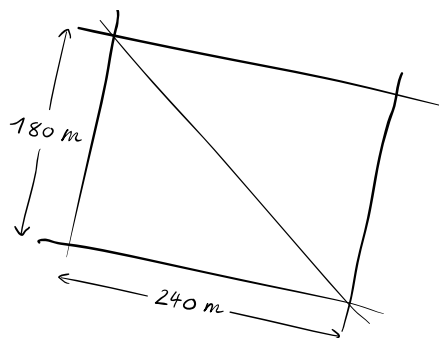
GM36 Drôles de pistes

Corinne s'entraîne sur la piste rectangulaire et Brigitte sur l'une des pistes triangulaires schématisées ici.

Elles courent à la même vitesse et pendant la même durée.

Corinne fait six tours de piste.

Et Brigitte ?



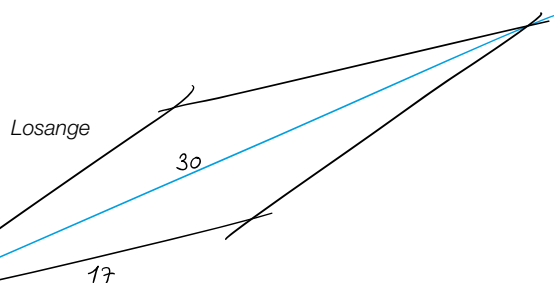
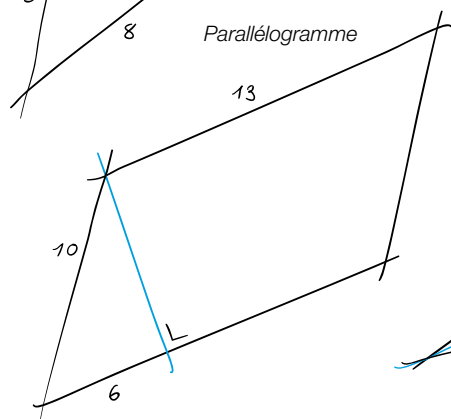
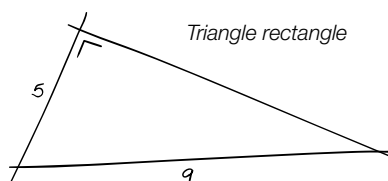
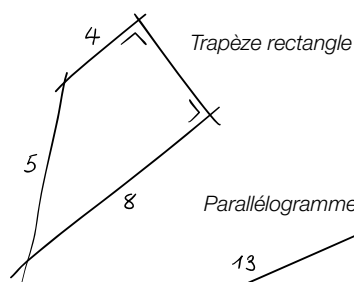
GM37 Le téléviseur

Daniela souhaite s'acheter un nouveau téléviseur au format $16 : 9$. Dans ce format, la largeur de l'écran vaut les seize neuvièmes de sa hauteur.

Quelle est la dimension de la diagonale de l'écran si la hauteur vaut 553 mm ?

GM38 Polygones et angles droits

Calcule l'aire de chacun de ces polygones.



Mesures exprimées en millimètres

GM39 Le losange et le carré

- a) Les diagonales d'un losange mesurent 12 cm et 16 cm.
Quel est le périmètre de ce losange ? Et son aire ?
- b) La diagonale d'un carré mesure 11 cm.
Quel est le périmètre de ce carré ? Et son aire ?

GM40 D'un sommet à une droite

- a) Le triangle DEF , rectangle en F , est tel que $DF = 12$ cm et $DE = 37$ cm.
Quelle est la mesure du côté EF ?
- b) Les dimensions d'un rectangle sont 10 cm et 24 cm.
Quelle est la distance entre un sommet et la diagonale ne passant pas par ce sommet ?

GM41 Pyramide décorée

La pyramide de Khéops se trouve à proximité du Caire, en Égypte.

C'est une pyramide régulière de 147 m de hauteur, construite sur une base carrée de 230 m de côté.

Un artiste souhaiterait décorer la pyramide de Khéops au moyen de guirlandes lumineuses placées le long de chacune de ses arêtes.

Calcule la longueur totale de guirlandes dont il aurait besoin.

La pyramide de Khéops fait partie des sept merveilles du monde antique ; elle est la seule encore visible de nos jours. La liste décrivant ces sept merveilles fut adoptée après le règne d'Alexandre le Grand (356-323 av. J.-C.) d'après quatorze listes provenant d'ouvrages différents. Les monuments sélectionnés devaient répondre à des normes de beauté, de grandeur et de prouesse technique.



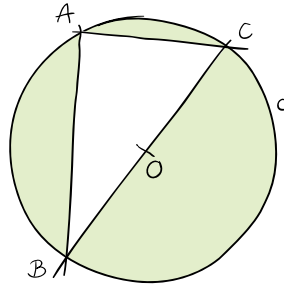
Ont été retenus :

- La pyramide de Khéops
- Les jardins suspendus de Babylone
- La statue de Zeus
- Le temple d'Artémis
- Le mausolée d'Halicarnasse
- Le colosse de Rhodes
- Le phare d'Alexandrie

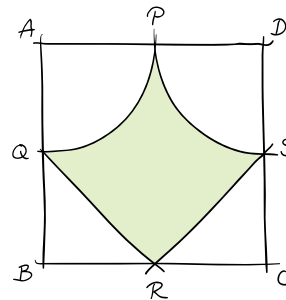
Pour consolider et approfondir

GM42 Aires composées

- a) Calcule l'aire de la partie colorée de la figure.
 O est le centre du cercle c .
 $AC = 5$ cm et $AB = 12$ cm



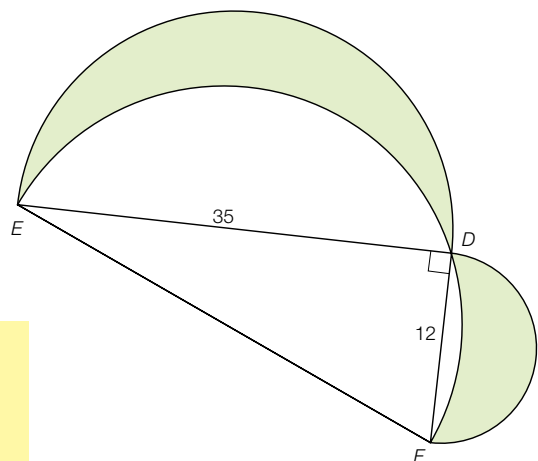
- b) Calcule l'aire et le périmètre de la partie colorée de la figure.
 $ABCD$ est un carré de 8 cm de côté.
 P, Q, R et S sont les milieux de ses côtés.



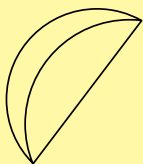
GM43 Lunules

Les trois arcs de cercle $\widehat{EF}$, $\widehat{ED}$ et $\widehat{DF}$ sont des demi-cercles.

- a) Calcule la somme des aires des deux lunules et compare-la à l'aire du triangle DEF .
 b) Le résultat trouvé en a) est-il vrai quel que soit le triangle rectangle de départ ?



Mesures exprimées en centimètres



En géométrie, une lunule est une surface en forme de croissant de lune, délimitée par deux arcs de cercles de rayons différents sous-tendus d'une même corde.

En 500 av. J.-C., Hippocrate de Chios est resté célèbre pour avoir été le premier à démontrer la solution du problème qui t'est proposé.

Il ne faut pas le confondre avec Hippocrate le Grand, médecin grec, à qui l'on doit le fameux serment d'Hippocrate de déontologie médicale que doivent prêter les nouveaux médecins.

GM44 Le milieu du lac

Supposons qu'on tende une corde de 38 km entre les rives du lac de Neuchâtel, de Marin (NE) à Yverdon (VD), de telle manière que ses deux extrémités se situent à la surface du lac.

Comme la Terre est ronde, la corde trempera dans l'eau.

Dans ces conditions, à quelle profondeur se trouvera le milieu de la corde, par rapport au niveau de l'eau ?

GM45 En fonction du côté

- a) Exprime la mesure de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle en fonction de la mesure de l'un des côtés de son angle droit.
- b) Exprime l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de la mesure de son côté.

Fichier: **Que sais-je ? p. 179**

Pour réactiver certaines connaissances

Fichier: **GM46**

GM47 Comment faire ?

- a) Dessine deux triangles semblables et un troisième qui n'est pas semblable aux deux premiers. Indique pour chacun la valeur des angles et des côtés.
- b) Comment peut-on déterminer si deux triangles sont semblables ?

GM48 Proportions

Calcule la valeur de x dans chacun des cas.

a) $\frac{x}{36} = \frac{5}{18}$

c) $\frac{5}{x} = 1,25$

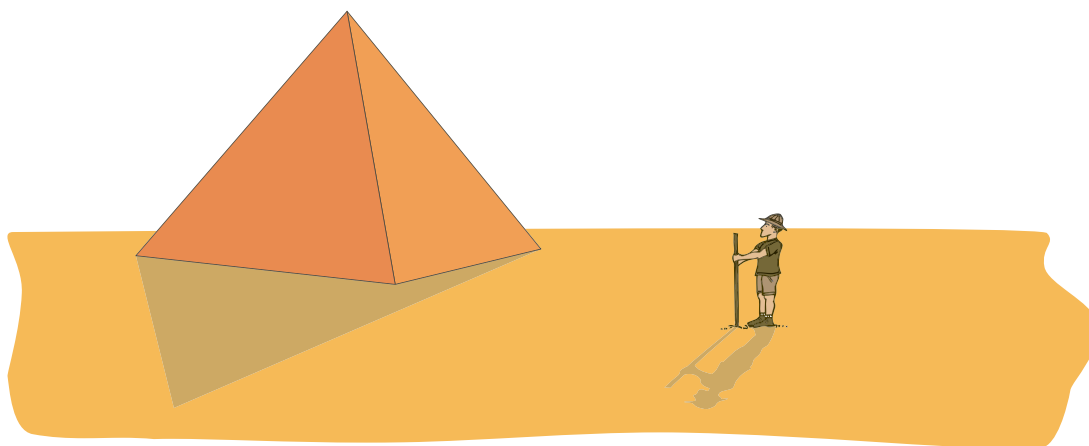
b) $\frac{10}{7} = \frac{8}{x}$

d) $\frac{15,8}{5} = \frac{x}{1,4}$

Théorème de Thalès

GM49 Hauteur inaccessible

Comment déterminer approximativement la hauteur d'une pyramide un jour de soleil si l'on dispose d'un bâton dont on connaît la longueur ?

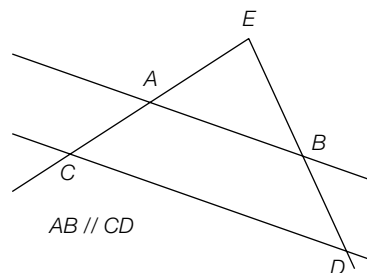


GM50 Calculer la hauteur

Comment déterminer la hauteur d'un lampadaire sans y monter, si l'on dispose d'un bâton de 1 m de long et d'une chevillère ?

GM52 Homothétie et théorème de Thalès

- À l'aide des lettres du dessin, exprime le rapport de l'homothétie de centre E par laquelle l'image de A est C .
- Quelle est l'image de B par cette homothétie ?
- Écris trois rapports de longueurs égaux, à l'aide des lettres du dessin.



THEOR. 2. PROP. II.
 Si on mene vne ligne droite parallele à l'un des costez d'un triangle, laquelle coupe les deux autres costés ; elle les coupera proportionnellement : & si deux costés d'un triangle sont coupez proportionnellement, la ligne coupante fera parallele à l'autre costé.

Extrait des Éléments d'Euclide

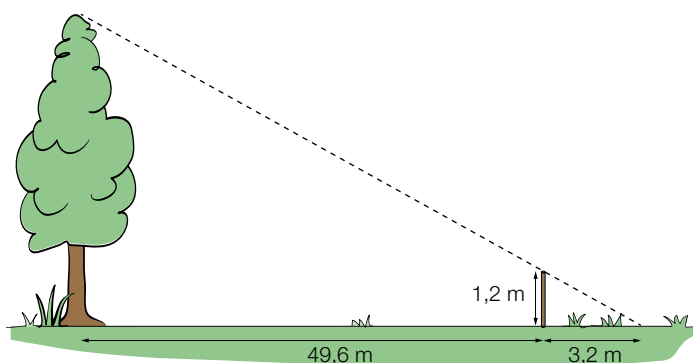
Le théorème de Thalès est une propriété de proportionnalité déjà connue des scientifiques de Babylone et dont la première démonstration connue est présentée dans l'ouvrage *Éléments* (proposition 2 du livre VI) d'Euclide (vers 325-265 av. J.-C.). Ces rapports fondent les constructions de figures homothétiques et les agrandissements de figures.

Ce théorème est attribué au mathématicien et philosophe grec Thalès de Milet (vers 625-547 av. J.-C.) qui, selon la légende, a calculé la hauteur des pyramides d'Égypte, en comparant la longueur de l'ombre au sol de chaque pyramide et la longueur de l'ombre d'un bâton.

Fichier: GM53 à GM56

GM57 Dispositif ingénieux

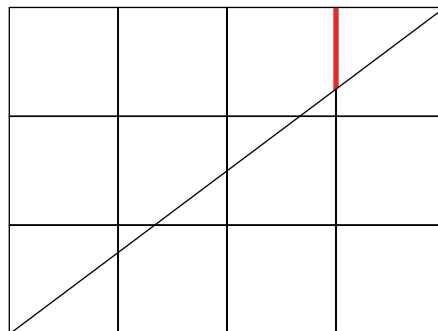
Quelle est la hauteur de cet arbre ?



GM58 Quadrillage

La figure ci-contre est formée de douze carrés de 60 cm de côté.

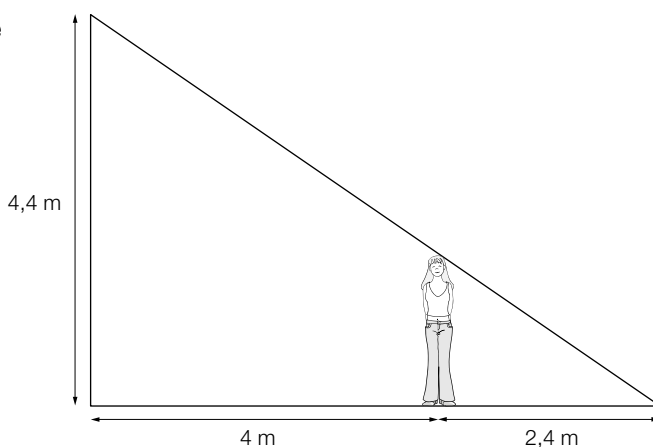
Calcule la longueur du segment rouge.



GM59 Mansardé

Dans sa chambre sous le toit, Elina touche le plafond avec sa tête si elle se trouve à l'endroit indiqué par le croquis ci-contre.

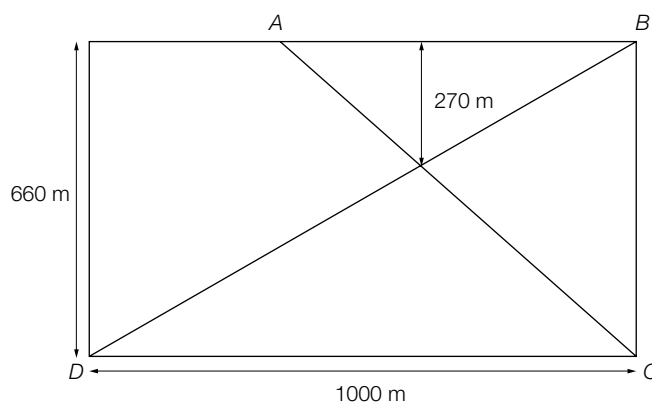
Quelle est sa taille ?



GM60 La longueur des chemins

Dans un parc rectangulaire, deux chemins rectilignes relient les quatre entrées A , B , C et D .

Calcule la longueur de chacun des chemins AC et BD .



GM64 De l'ombre à la lumière

Une fille de 1,50 m se trouve à 6 m d'un lampadaire. Son ombre mesure 2,40 m.

Calcule la hauteur du lampadaire.

GM65 Jessie, Admir et Claire

Sur une route à pente constante, Jessie a 2,4 km d'avance sur Admir qui a 1,4 km d'avance sur Claire. Claire se situe à une altitude de 560 m et Admir à une altitude de 840 m.

À quelle altitude se trouve Jessie ?

Figures semblables

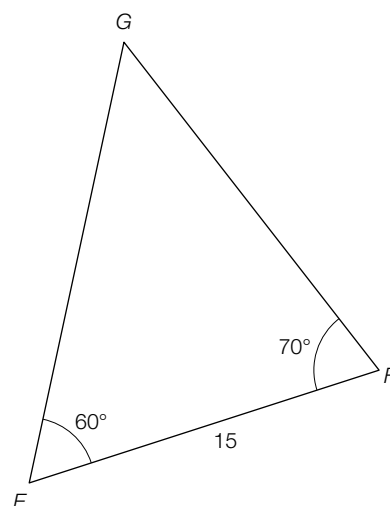
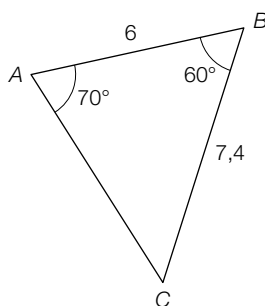
Fichier: GM66 et GM67

GM68 Vraisemblable ou faux-semblant ?

- a) Deux rectangles sont-ils toujours semblables ?
- b) Et deux carrés ?
- c) Deux triangles équilatéraux ?
- d) Deux triangles isocèles ?
- e) Deux polygones réguliers ?
- f) Deux cercles ?

GM69 Si possible

À l'aide des deux triangles ci-dessous, calcule, si possible, la mesure des côtés EG et GF .



Fichier: GM70 à GM72

Fichier: Faire le point p. 189

Mesures exprimées en centimètres