

Fréquences et probabilités

NO108 Encore des idées reçues

Vrai ou faux ? Justifie ta réponse.

1. Dans une urne, on place neuf boules jaunes et une boule noire.
 - a) On tire une boule, on observe sa couleur et on la remet dans l'urne. Il est possible de tirer quatre fois de suite une boule noire.
 - b) Si on tire deux boules en même temps, on peut obtenir deux noires.
 - c) Si on tire trois boules en même temps, on obtient forcément des boules de couleurs différentes.
2. On place trois boules rouges et quatre boules blanches dans une urne.
 - a) On tire une boule au hasard. On a plus de chances d'obtenir une boule blanche qu'une boule rouge.
 - b) On obtient d'abord une boule blanche qu'on remet dans l'urne. Au tirage suivant, on a plus de chances de tirer une boule rouge qu'une boule blanche puisqu'on vient de tirer une boule blanche.

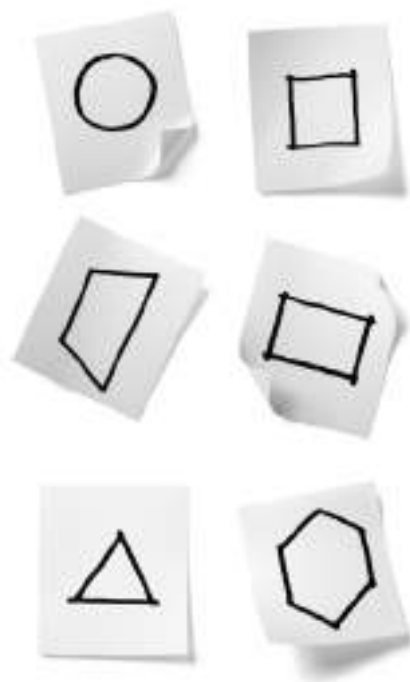
Fichier : NO109

NO110 Expérience aléatoire

Avec un camarade, prenez six morceaux de papier. Dessinez sur le premier un disque, sur le deuxième un carré, sur le troisième un trapèze, sur le quatrième un rectangle non carré, sur le cinquième un triangle et sur le dernier un hexagone. Placez le tout dans une boîte.

Un tirage consiste à prendre un billet dans la boîte, sans regarder, de l'identifier, puis de l'y remettre.

- a) Faites un pronostic sur la fréquence d'apparition d'un quadrilatère pour un grand nombre de tirages d'un seul billet.
- b) Effectuez, sans regarder, cinquante tirages. Notez les résultats obtenus dans un tableau.
- c) Calculez maintenant la fréquence d'apparition d'un quadrilatère. Votre pronostic est-il confirmé ?
- d) Et si, maintenant, on met ensemble tous les tirages de la classe et qu'on calcule la fréquence d'apparition de chaque figure, le résultat est-il plus proche du pronostic établi ?
- e) Quelle est la probabilité de tirer un quadrilatère ?



NO111 Mission impossible ?

Marie-Jeanne place à l'intérieur d'un chapeau vingt cartes à jouer, des noires et des rouges, sans te dire combien il y en a de chaque sorte. Propose une méthode te permettant de déterminer s'il y a plus de chances de tirer une carte rouge qu'une carte noire en suivant les règles suivantes :

- tu ne tires qu'une carte à la fois,
- tu ne vois la couleur de la carte qu'une fois celle-ci sortie du chapeau,
- tu remets chaque carte tirée dans le chapeau avant le prochain tirage.

NO112 Deux fois six

On dispose d'un dé à douze faces numérotées de 1 à 12.

Quelles sont les chances, lorsqu'on le lance, d'obtenir :

- | | |
|----------|------------------------------------|
| a) un 1 | d) un nombre pair |
| b) un 5 | e) un multiple de 5 |
| c) un 12 | f) un nombre compris entre 1 et 12 |

NO113 Que de nombres !

Dans un sac, on a placé trois jetons numérotés 6, 7 et 8. On les tire un à un sans les remettre. On fait correspondre le premier chiffre tiré au chiffre des centaines, le deuxième à celui des dizaines et le troisième à celui des unités.

- a) Établis la liste de tous les nombres que l'on peut obtenir.
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir 768 ?
- c) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à 786 ?
- d) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur à 876 ?

NO114 Un ou une

Dans un sac, on a mis des jetons avec la lettre E, la lettre U et la lettre N.

On sait que la probabilité de tirer un U est de $\frac{3}{10}$ et celle de tirer un N de $\frac{1}{5}$.

- a) Calcule la probabilité de ne pas tirer la lettre U.
- b) Calcule la probabilité de tirer un E.

NO115 Des dés

Dédé possède une grande variété de dés, qu'il a disposés sur les tables respectives de ses camarades, avec chaque fois quelques petites colles à résoudre.

Table de Fatma

Un dé à huit faces comportant les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Un dé à six faces comportant les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

En lançant les deux dés, quelles sont les chances d'obtenir :

- deux valeurs identiques ?
- un total de 9 points ?
- un total de 3 points ?

Table d'Ahmed

Un dé à six faces aux couleurs respectives jaune, vert, rouge, bleu, blanc et noir.

Un dé à huit faces dont deux sont jaunes, deux vertes, deux bleues, deux rouges.

En lançant une fois les deux dés, quelle est la probabilité d'obtenir :

- deux faces bleues ?
- une face jaune exactement ?
- au moins une face jaune ?

Table de Tiago

Trois dés cubiques conventionnels.

En lançant une fois les trois dés, obtiendras-tu plus facilement un triple six, un double cinq ou une somme de points supérieure à 13 ?



no116 C'est pas la joie !

Dans une partie de jeu de l'oie, tu tombes sur une case piège. Pour en sortir, tu dois obtenir 5.

Tu as le choix entre deux possibilités :

- faire 5 avec un seul dé,
- obtenir 5 comme somme de deux dés, jetés ensemble.

Quelle possibilité vas-tu choisir ?

no117 Mâle ou femelle ?

- a) Une dame possède deux perroquets. Un jour, un oiseleur lui demande : « Est-ce qu'un des oiseaux au moins est un mâle ? »
La dame lui répond par l'affirmative.

Quelle est la probabilité que les deux perroquets soient des mâles ?

- b) Une autre dame a deux perroquets, l'un vert, l'autre rouge.
« Est-ce que l'oiseau vert est un mâle ? » demande alors le même oiseleur. De nouveau, la réponse est « oui ».

La probabilité que les deux oiseaux soient des mâles est-elle la même qu'auparavant ?



no118 Hâte-toi lentement

Dans le jeu Hâte-toi lentement, qui se joue avec un dé conventionnel, une des règles dit :

« Si on obtient un 6, on peut rejouer ! Et si on obtient une deuxième fois un 6, on peut encore rejouer une fois... mais si un 6 apparaît une troisième fois... alors il faut ramener tous ses pions à la maison ! »

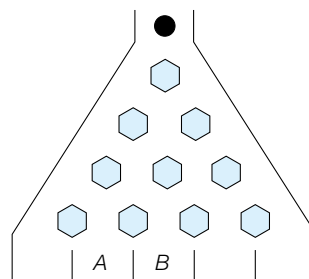
Cette situation risque-t-elle de se produire fréquemment ?



no119 Boule qui roule...

Sur cette planche, disposée verticalement, la boule ne peut que descendre.

Est-il plus probable qu'elle termine sa course dans le compartiment A ou dans le compartiment B ?



On peut construire cet appareil, appelé « planchette de Galton », avec une planche en bois et des écrous hexagonaux.

La distance entre deux écrous doit être juste assez grande pour permettre à la bille de passer entre eux. La bille frappe le premier écrou, passe à sa droite ou à sa gauche, et descend vers la deuxième rangée. Elle rencontre alors un nouvel écrou et continue son chemin en passant à sa droite ou à sa gauche.

La planchette de Galton permet ainsi d'établir des statistiques et de comparer les résultats expérimentaux aux valeurs théoriques.

H. M. Enzensberger, Le démon des maths, Ed. du Seuil, Métailié

Fichier : **Faire le point p. 27**

Encore quelques problèmes

no120 Épreuves de connaissances

Benjamin doit répondre à cinq questions d'histoire par « vrai » ou par « faux ».

Comme il n'a rien appris, il décide de cocher systématiquement au hasard l'une des cases « vrai » ou « faux », se disant qu'ainsi, il a deux chances sur cinq de commettre deux erreurs ou moins.

A-t-il raison ?

no121 L'amour fou

Pour obtenir la main d'Amandine, la fille du roi, Julius doit répartir quatre boules, deux blanches et deux noires, dans deux urnes, en mettant au moins une boule par urne.

Le roi choisira une des urnes et en extraira une boule : si celle-ci est blanche, Julius pourra épouser Amandine ; dans le cas contraire, il sera chassé du royaume.

Comment Julius doit-il disposer les boules dans les urnes pour avoir le plus de chances d'épouser sa bien-aimée ?

NO122 Le pari d'Akkhar

Akkhar te propose de lancer une fois un dé conventionnel à six faces.

Si tu obtiens un 6, il te donne 24 francs, sinon tu lui donnes 6 francs.

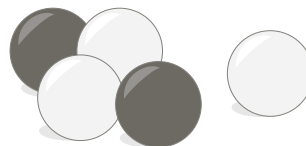
Accepteras-tu sa proposition ?

NO123 Deux sur cinq

Une urne contient cinq boules : trois blanches et deux noires. On en tire deux.

Quelle est la probabilité d'obtenir :

- a) deux boules blanches ?
- b) deux boules noires ?
- c) deux boules de même couleur ?
- d) deux boules de couleur différente ?



NO124 Quelle stratégie ?

Véronique cache une pièce de monnaie dans l'une des trois boîtes posées sur sa table.

Au moment où je m'apprête à en ouvrir une, elle saisit l'une des deux boîtes restantes, elle la secoue et me dit : « De toute façon, la pièce n'est pas dans celle-là ! »

Dois-je maintenir mon choix initial ou le modifier ?



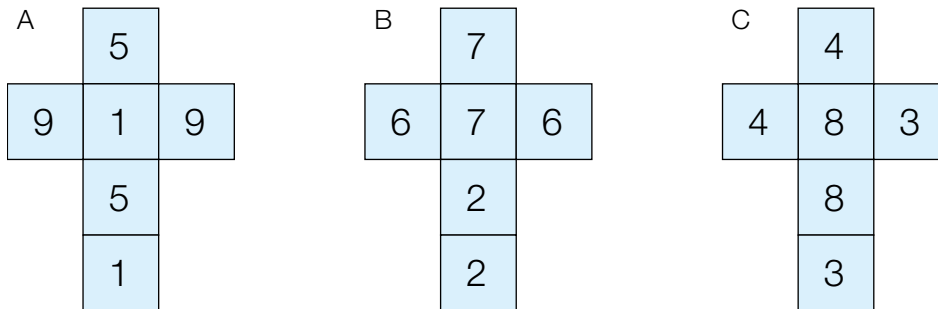
Dans les années 1970, en participant à la très populaire émission télévisée américaine *Let's make a deal*, on pouvait gagner une Cadillac ou... une chèvre. La candidate ou le candidat devait choisir une porte parmi trois. L'une cachait la Cadillac, chacune des deux autres une chèvre.

Après ce premier choix, l'animateur Monty Hall (qui savait tout) ouvrait une (mauvaise) porte parmi les deux non choisies. Il proposait alors à la personne soit de confirmer le choix initial, soit de changer pour l'autre porte encore fermée. Qu'avait-elle intérêt à faire ? Changer de porte ? Conserver ce choix initial ? La réalisation de simulations d'un grand nombre de tirages fournit un éclairage sur le choix à opérer.

Désormais, ce paradoxe mathématique surprenant porte le nom de l'animateur : le *paradoxe de Monty Hall*. À chaque fois qu'il est exposé, ce problème suscite toujours autant d'intérêt que de polémique.

NO125 Dés intransitifs

Jules et Jim jouent avec les dés A, B et C, dont les développements sont :



Jules choisit un des trois dés.

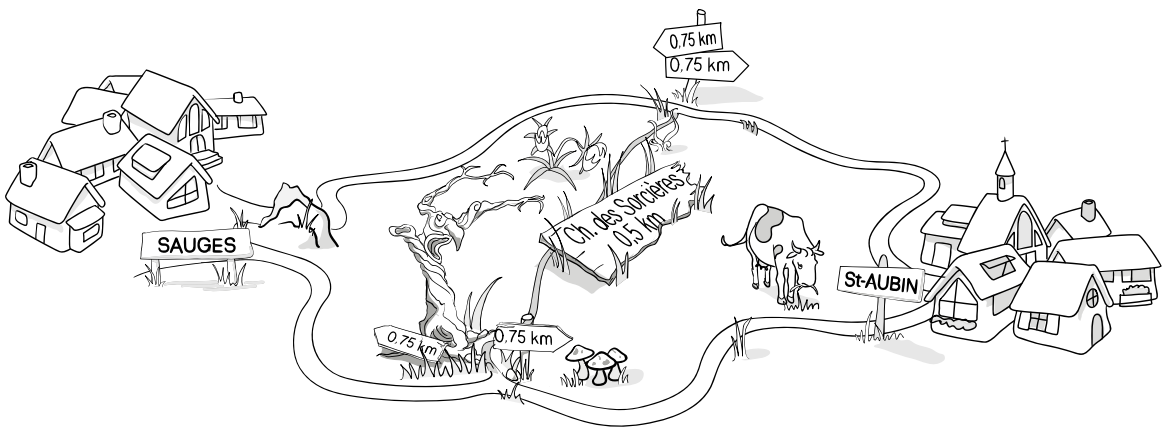
Jim choisit un des deux dés restants.

Jules et Jim lancent leur dé simultanément.

Le joueur dont le dé indique le nombre le plus élevé gagne la partie.

Quel dé choisirais-tu à la place de Jim ?

NO126 Le chemin des sorcières



Voici les chemins menant de Sauges à Saint-Aubin pour les piétons.

Deux enfants partent simultanément en sens contraire, à la même vitesse, le premier de Sauges en direction de Saint-Aubin et le second de Saint-Aubin en direction de Sauges.

- Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent s'ils ne se sont pas indiqués les chemins qu'ils vont prendre, l'un et l'autre excluant le chemin des sorcières ?
- Même question, mais les enfants n'ont pas peur des sorcières et peuvent donc emprunter n'importe quel chemin.

En 1972 ont été commercialisées les premières machines à calculer de poche, par exemple la HP 35 de Hewlett Packard. Ces calculatrices électroniques, comme celles fabriquées par Texas Instruments ou Casio, sont l'aboutissement d'une très longue histoire.



HP35, 1972

Machines électriques et électroniques

Des composants électriques ont été utilisés depuis les années 1930, puis électroniques dès 1960, dans des calculateurs aux dimensions parfois impressionnantes ; ancêtres de nos ordinateurs actuels, ils reposaient déjà sur le système binaire théorisé par le mathématicien et philosophe britannique George Boole (1815-1864). Ce dernier a réduit toutes les opérations logiques à de l'algèbre n'utilisant que deux quantités : 0 et 1. Toutes les calculatrices électriques ou électroniques fonctionnent sur ce principe : passage de courant (1) ou absence de courant (0).



Machine de Babbage, Musée des sciences, Londres

Machines mécaniques

Durant le XIX^e siècle ont été développées des machines à calculer mécaniques, avec roues dentées, cylindres métalliques, engrenages et cartes perforées ; inspirés des machines à tisser, ces calculateurs avaient été conçus, en particulier, par le mathématicien anglais Charles Babbage (1791-1871). La comtesse Ada Lovelace (1815-1852) en développe tout le potentiel calculatoire. Elle est considérée comme la première programmeuse informatique.

Dans les années 1820, Babbage imagina une machine à différences, si complexe pour l'époque qu'elle a dû attendre 1991 pour être construite et exposée au Musée des sciences de Londres.

Cent quatre-vingts ans plus tôt, Blaise Pascal (1623-1662) avait inventé la toute première machine mécanique effectuant les quatre opérations. Elle fut nommée plus tard la *pascaline*.



Une pascaline, signée par Pascal en 1652, visible au Musée des arts et métiers à Paris

Nombres, opérations... et problèmes

La règle à calculer

De nombreux systèmes ont été mis au point pour faciliter les opérations : par exemple, la règle à calculer, créée au début du XVII^e siècle et utilisée dans nos écoles jusque dans les années 1980.

Grâce à un système d'éléments mobiles coulisants, elle disposait de fonctions supérieures aux quatre opérations et avec une précision de trois décimales.

Un autre système appelé « bâtons de Napier », ou de Neper, du nom du mathématicien écossais John Neper (1550-1617), était également utilisé au début des temps modernes.



Le boulier et l'abaque

On trouve les premières traces du boulier en Chine au XII^e siècle, d'où il se diffusa un peu partout, en particulier en Russie et au Japon. Sous différentes formes, il est encore utilisé actuellement dans de nombreux pays à la place de calculatrices électroniques.

Le boulier est une forme d'abaque ; ces tables à calcul sont fondées sur un principe né en Mésopotamie, il y a 5000 ans : les lignes représentent la position du chiffre – unité, dizaine, centaine, etc. – et des jetons symbolisent les chiffres. À l'origine, il s'agissait de simples cailloux posés sur des lignes tracées sur une planche couverte de sable.

Les abaques se sont diffusés en Asie et en Europe de 3000 av. J.-C. jusqu'à la fin du Moyen-Âge.



Un boulier chinois



Tous ces systèmes et inventions géniales étaient et sont destinés à compléter le système de comptage le plus simple que l'être humain possède dès les origines et utilise encore : compter sur ses doigts !

NO127 Arithmétique babylonienne



Cette tablette d'argile est une table de multiplication par 25.

Elle provient de Suse et est conservée au Musée du Louvre.

Comme elle date d'environ 2000 ans av. J.-C., certaines marques imprimées dans l'argile ont disparu.

- a) Ci-dessous, on a commencé à déchiffrer le contenu de cette tablette.

Poursuis ce travail.

1		25
2		50
3		75
4		100
5		125

- b) Si 1491 se note
- et 7894

comment écris-tu :

721 ? 3920 ? 39912 ? 7221 ? 180 ?



D'où vient la base soixante ?

Plusieurs auteurs se sont penchés sur cette question, mais à ce jour aucune explication ne paraît déterminante.

Voici quelques hypothèses :

Le nombre 60 est choisi, car c'est un « petit » nombre qui possède « beaucoup » de diviseurs, en particulier 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

- Le nombre de jours de l'année, arrondi à 360, donne naissance à la division du cercle en 360 degrés.

La soixantaine, comme unité de compte, provient alors de la division du cercle en six parties égales (la longueur de la corde déterminée par $1/6$ de cercle est égale au rayon).

- La base soixante est le résultat d'une combinaison de la base cinq et de la base douze :
 - la base cinq trouve sa raison d'être chez les peuples qui apprennent à compter sur une main ;
 - l'origine de la base douze est également manuelle. Chaque doigt, à l'exception du pouce, a trois phalanges. On peut donc compter de 1 à 12 en appuyant successivement sur chacune des phalanges des quatre doigts par le pouce.

Le nombre 60 est obtenu comme suit : en atteignant la douzaine sur la main droite et on replie l'auriculaire gauche.

On revient ensuite à la main droite et on poursuit le compte de 13 à 24.

On replie alors l'annulaire gauche et on continue à compter de la même manière de 25 à 36 sur la main droite.

On rabaisse ensuite le majeur gauche (48), puis l'index de la même main (60).

NO128 Calculatrice romaine

Les comptables romains possédaient déjà leur « calculatrice » de poche.

Elle consistait en une petite plaquette métallique munie de rainures parallèles, le long desquelles glissaient des boutons mobiles de même taille.

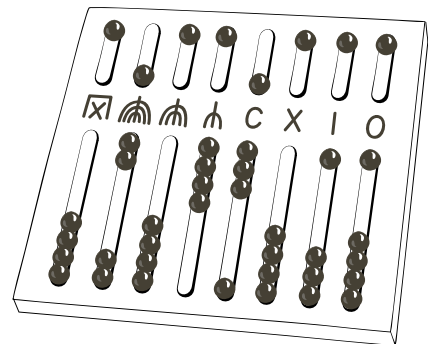
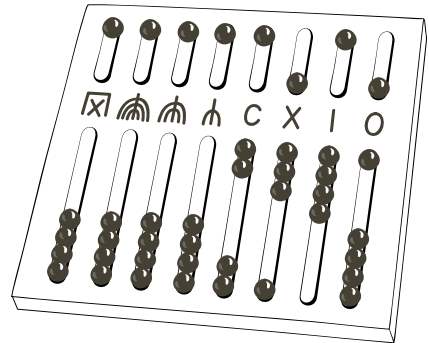
Cet instrument de calcul permettait d'effectuer diverses opérations arithmétiques.

Si l'on considère des comptes en deniers, les sommes représentées sur ces abaque sont, respectivement :

- 284 deniers et 7 onces ;
- 704 801 deniers et 1 once.

(Le denier, unité monétaire romaine, était subdivisé en 12 parties égales appelées « onces ».)

À toi de dessiner un abaque représentant la somme de 62 057 deniers et 10 onces.

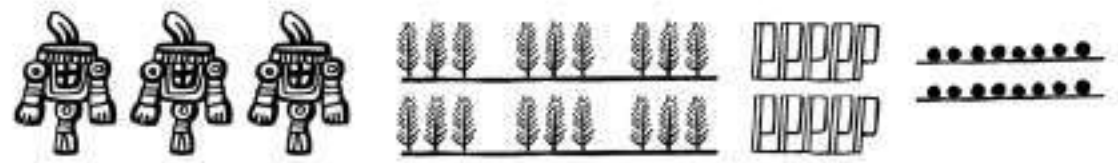


NO129 Du côté des Aztèques

Voici comment les Aztèques représentaient le nombre 847 :



et le nombre 31 416 :



- À toi de représenter le nombre 20012 en numération aztèque.
- Quel est le plus grand nombre, en notation décimale, que l'on peut écrire à l'aide des quatre symboles aztèques ci-dessus ?

NO130 La numération maya

a) Dès le VII^e siècle, les savants mayas écrivent les nombres selon les exemples suivants :

numération décimale	6	14	20	65	362	380	2667	7581
numération maya								

En utilisant les symboles mayas, écris les nombres :

19 ; 42 ; 120 ; 405 ; 1808.

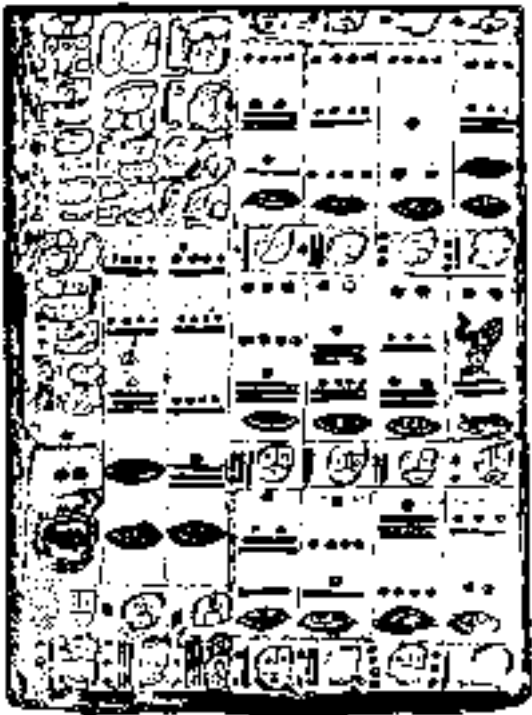
b) Au cours du premier millénaire de l'ère chrétienne, les astronomes mayas observent minutieusement les mouvements de plusieurs planètes.

Ils trouvent à quelques secondes près – fait hautement remarquable – la durée d'une année solaire et estiment à 584 jours la période de révolution de Vénus.

Voici un extrait d'un traité d'astronomie, datant du XI^e siècle. Sa partie de droite contient douze informations numériques relatives au mouvement de la Terre et de Vénus.

Décode ces informations.

Au cours de ta recherche, tu découvriras que le zéro maya était représenté par différents symboles et tu constateras que le scribe qui a rédigé ce document a commis une petite erreur !



NO134 Hommage à Barbara

En face de chaque opération, tu découvres un morceau de phrase.

La réponse de chaque opération te permet de décoder la suite du texte de la manière suivante : il te suffit de chercher, dans la liste, un calcul dont le premier nombre est le résultat que tu as obtenu.

La première étape donne 5 :

$$[16 - (-14)] : 6 = 5$$

$$\text{a) } (22 - 12)^3$$

$$\text{b) } (1 + 6 \cdot 20) : 11$$

$$\text{c) } 1000 - 7000 + 5900$$

$$\text{d) } (-28 : 7) \cdot \sqrt{121}$$

$$\text{e) } (\sqrt{82 - 1}) \cdot 10 : 2$$

$$\text{f) } 2^7 - 11^2$$

$$\text{g) } (-36 - 9) : 5 \cdot 9$$

$$\text{h) } 7 \cdot 6 \cdot 5 : 70$$

$$\text{i) } (79 - 9 \cdot 8)^2$$

$$\text{j) } (-8 - 6 + 4) : 5$$

$$\text{k) } [(45 - 3) : 7]^2 - 72$$

$$\text{l) } \sqrt{(49 - 3^4)} : (-8)$$

$$\text{m) } (-14) \cdot 3 + (-14) \cdot 7$$

$$\text{n) } -100 : (-25) \cdot (-7)$$

$$\text{o) } -44 \cdot 3 + 12^2$$

$$\text{p) } 3 \cdot (-6) - (-5) \cdot 8$$

$$\text{q) } -81 : 3^3 + 4$$

$$\text{r) } 11 \cdot 8 - 9$$

$$\text{s) } 12 - (-8 + 39 - 5)$$

$$\text{t) } (-140 + 11 \cdot 12)^1$$

$$\text{u) } 5^2 \cdot 3 + 7$$

Du plus loin que m

i depuis j'ai dit « je t'aime » Ma

rs j'avais quinze ans à peine Cœu

plus belle histoire d'amour, c'est v

sage Et j'ai tourné bien d

bre de mes amours an

ours de gosse Ou les morsures d'

endez-vous Du temps

un amour fou Du plus l

oux Que ce furent, j'étais pr

eine vus, déjà disparus...

ciennes Du plus loin du premier r

écoce De tendres am

st vrai je ne fus pas sage Et

ous C'est vrai je ne fus pas

es pages Sans les lire, b

oin qu'il m'en souvienne S

des premières peines Lo

r tout blanc et griffes aux gen

lanches et puis rien dessus C'e

mes guerriers de passage À p

e revienne L'om



Lorsqu'elle disparaît en 1997, la chanteuse Barbara, née en 1930, laisse orphelins les amateurs et amatrices de chansons françaises. Celle qui proclamait que son public était « son plus grand amour » se définissait elle-même ainsi, en portrait négatif : « *Je ne suis pas une grande dame de la chanson, je ne suis pas une tulipe noire, je ne suis pas poète, je ne suis pas un oiseau de proie, je ne suis pas désespérée du matin au soir, je ne suis pas une mante religieuse, je ne suis pas dans les tentures noires, je ne suis pas une intellectuelle, je ne suis pas une héroïne, je suis une femme qui chante !* »

La « grande dame brune » fut l'interprète de chansons inoubliables comme *L'aigle noir*, *Göttingen*, *Nantes* ou *Gauguin* (lettre à Jacques Brel).

NO135 La suite de Syracuse

On prend un nombre naturel plus grand que 0.

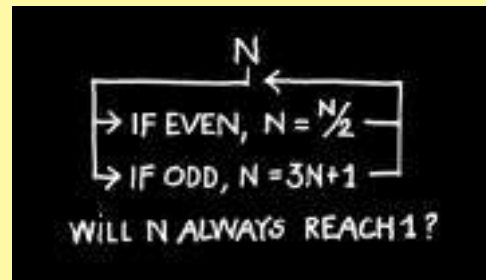
Si ce nombre est pair, on le divise par 2 et on obtient un nouveau nombre.

Si, au contraire, il est impair, on le multiplie par 3, on ajoute 1 au résultat et on obtient un nouveau nombre.

On recommence la même procédure avec le nouveau nombre obtenu.

- Choisis un nombre plus petit que 10 et applique cette procédure une vingtaine de fois.
Que constates-tu ?
- Et si tu choisis un autre nombre ?

Le problème qui t'est proposé est l'illustration de ce qu'on appelle, en mathématiques, la « conjecture de Syracuse », appelée aussi « conjecture de Collatz », « conjecture d'Ulam », « conjecture tchèque » ou « problème $3x + 1$ ».



En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture a défié les mathématiciennes et mathématiciens durant de nombreuses années et elle n'a toujours pas été démontrée. Selon le mathématicien hongrois Paul Erdős, *Mathematics is not yet ready for such problems.*

NO136 Une commission en or!

Dans cette commission qui réunit neuf sages, chacun marmonne dans son coin :

- | | |
|-----------|--|
| Denis | <i>Je pars de 1 et j'ajoute le dernier nombre obtenu pour passer au suivant!</i> |
| Thierry | <i>Je pars de 1 et je juxtapose simplement un 0 à chaque fois.</i> |
| Alfred | <i>Je pars de 0 et j'ajoute, à chaque étape, le plus petit nombre impair non encore utilisé!</i> |
| Jean-Paul | <i>Je pars de 0 et j'ajoute tout simplement 1000 à chaque étape!</i> |
| Aldo | <i>Je pars de 1 et je multiplie par 10 pour passer à l'étape suivante!</i> |
| Laura | <i>Je pars de 0, je passe à 1 à la première étape, puis chaque nombre est obtenu par la somme des deux nombres qui le précèdent!</i> |
| Yves | <i>Je pars de 5 et je multiplie toujours le nombre que j'ai par 5 pour passer au suivant.</i> |
| Ewa | <i>Je pars de 1 millionième de millionième et je multiplie à chaque étape par 100.</i> |
| Hervé | <i>Je pars de 100, je divise par 10 à la première étape, puis je multiplie le résultat par 100 à la deuxième, je divise par 10 à la troisième et ainsi de suite.</i> |

Lequel atteindra en premier le milliard, et en combien d'étapes ?

NO137 Qui divise ?

Vrai ou faux ? Dans l'ensemble $\mathbb{N}$:

- a) Tous les nombres se divisent par un.
- b) Aucun nombre ne se divise par lui-même.
- c) Si a se divise par b , alors a est plus grand que b .
- d) Si a et b se divisent par c , alors $a + b$ se divise par c .
- e) Si a se divise par c , alors $a \cdot x$ ne se divise pas par c .

NO138 Zéphir

Vrai ou faux ?

- a) Zéro se divise par tous les nombres.
- b) Lorsqu'on multiplie un nombre par zéro, on trouve le nombre lui-même.
- c) On peut diviser n'importe quel nombre par zéro.
- d) Zéro est un nombre positif et négatif.
- e) Le nombre zéro signifie « rien ».
- f) $a^0 = 1$ pour tout nombre a .
- g) $\sqrt{0} = 0$
- h) $0^{1000} = 0$
- i) $a + 0 = 0 + a$
- j) $a - 0 = 0 - a$



Les chiffres 1 à 9 sont apparus pour la première fois en Inde au IV^e siècle av. J.-C., et leur graphie a évolué lentement jusqu'à nos représentations actuelles.

De l'Inde à l'Europe, en passant par le Moyen-Orient arabe et l'Afrique du Nord, cette façon d'écrire se modifia peu à peu, la dernière grande étape étant leur importation, en Espagne, par les Arabes occidentaux.

Le chiffre 0 et ses multiples et étonnantes propriétés sont restés inconnus du monde européen jusqu'à la fin du 1^{er} millénaire. Les peuples égyptiens, mayas et d'autres l'utilisaient déjà ; en Inde, les scientifiques élaboraient des raisonnements grâce à lui dès le VII^e siècle.

Il a fallu attendre le XII^e siècle pour que peu à peu l'Europe l'adopte. Traduit en latin par le mot *zephirum*, il fut défendu par le mathématicien italien Leonardo Fibonacci au XIII^e siècle contre ceux qui pensaient que ce chiffre « du néant » était un instrument du diable... En italien, il se transforme en *zephìro*, *zeuero*, *cero* et, enfin, *zéro* en français.

NO139 Le conducteur et le contrôleur

Le conducteur *Il y avait trois personnes dans mon bus ce matin. Le produit de leurs âges est 2450 et la somme est le double de ton âge. Peux-tu dire l'âge de ces trois personnes ?*

Le contrôleur *Désolé, je ne sais pas !*

Le conducteur *Une de ces trois personnes est plus âgée que moi.*

Le contrôleur *Cette fois c'est bon, j'ai trouvé !*

Et toi, saurais-tu retrouver l'âge de chacune de ces trois personnes ?

NO140 Quel footing !

a) Suzanne, Nathalie et Alexandre se trouvent au départ commun de trois pistes de footing, situées dans la même forêt :

- Suzanne court à la vitesse moyenne de 8 km/h sur le chemin des Aïrelles, le long d'une boucle de 4 km ;
- Nathalie court à la vitesse moyenne de 9 km/h sur le chemin des Bois, le long d'une boucle de 3 km ;
- Alexandre court à la vitesse moyenne de 10 km/h sur le chemin de la Chenille, le long d'une boucle de 5 km.

Alexandre propose que chacun coure sur son propre chemin, jusqu'au moment où tous les trois se retrouvent, ensemble, à leur point de départ commun.

Après combien de temps se retrouveront-ils les trois ensemble au point de départ ?

b) Le lendemain, Alexandre propose que chacun change de boucle, tout en courant selon les mêmes modalités.

Que constates-tu ?

Fichier: **NO141**

NO142 Harmoniquement vôtre

À disposition :

- les nombres $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; ... ;
- l'addition.

a) Comment obtenir le nombre 1 sans additionner deux fois le même terme ?

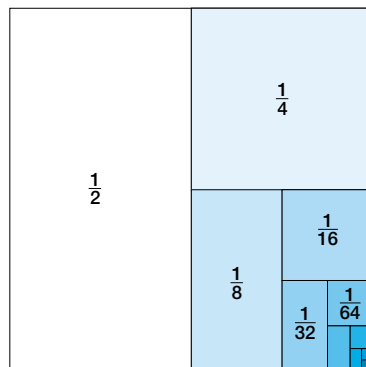
b) Trouve une méthode afin de déterminer d'autres sommes toujours égales à 1 le plus rapidement possible.

NO143 Bizarre, bizarre !

La somme des inverses des puissances de 2 se calcule ainsi :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

- Quelle est la valeur du septième terme ?
- Que vaut la somme des sept premiers termes ?
- Que vaudrait cette somme si on continuait... à l'infini ?



NO144 Le testament d'Aloys

« Je lègue mon champ carré à mes cinq amis André, Claude, Fernand, Maurice et Robert. André recevra le quart de forme carrée, situé dans un angle, Claude, Fernand, Maurice et Robert devront se partager le reste, en quatre parties identiques, de même forme et de même aire. »

Dessine le carré avec les 5 parts.

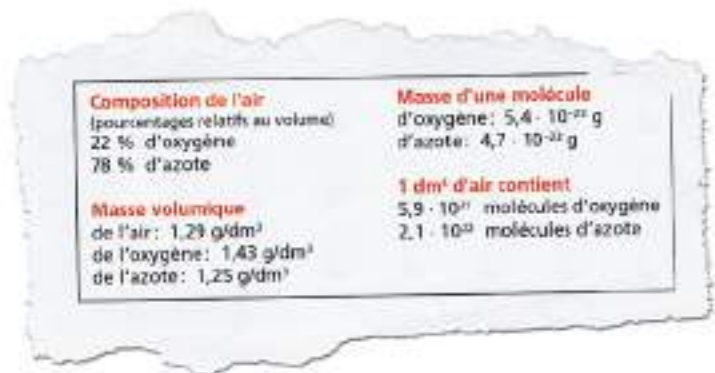
NO145 Les morilles

Cinq amies et amis sont allés à la cueillette aux morilles ; ils se partagent les délicieux champignons de la manière suivante : Zoé est partie avec un cinquième de la cueillette, puis Louis s'en va avec un quart des morilles restantes ; ensuite, Anaïs part avec le tiers des morilles restantes et Nolan rentre chez elle avec la moitié des morilles restantes. Enfin, Morgane a pris le reste.

Le partage est-il équitable ?

NO146 L'air

Ces informations sont-elles compatibles ?



NO147 Comment s'y prendre ?

Choisis quelques questions et, à l'aide de ta calculatrice, trouve rapidement :

- a) le carré de 65 ;
- b) le cube de 34 ;
- c) la puissance quatrième de 14 ;
- d) la racine carrée de 676 ;
- e) la racine cubique de 4913 ;
- f) la racine cinquième de 161 051 ;
- g) l'opposé de 2001 ;
- h) l'inverse de 35 ;
- i) l'inverse de 0,000 34 ;
- j) l'inverse du carré de 37 ;
- k) le carré de l'inverse de 37 ;
- l) l'opposé de l'inverse de 45 ;
- m) l'inverse de l'opposé de 45 ;
- n) la racine carrée du carré de 9,99 ;
- o) le carré de la racine carrée de 9,99 ;
- p) l'écriture décimale de sept neuvièmes ;
- q) l'écriture fractionnaire de 0,025 ;
- r) l'écriture en notation scientifique de 60 040 000 000 000 ;
- s) l'écriture en notation scientifique de 0,000 009 02 ;
- t) le carré de l'inverse de 4 septièmes.

NO148 À l'approche de π

Voici quelques valeurs approchées du nombre π , apparues au cours de l'Histoire :

Période	Lieu	Valeur
2000 av. J.-C.	Babylone	$3 + \frac{1}{8}$
2000 av. J.-C.	Egypte	$\left(\frac{16}{9}\right)^2$
1200 av. J.-C.	Chine	3
800-500 av. J.-C.	Bible	
250 av. J.-C.	Grèce (Archimède)	$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$
259 apr. J.-C.	Chine	$\sqrt{10}$; $\frac{142}{45}$; $\frac{157}{50}$
1950 apr. J.-C.	approximation usuelle	3,14
1980 apr. J.-C.	nombre de décimales connues : environ 2 millions	3,14159265358979323846 26433832795028841971 6939937510 ...
En 2012	nombre de décimales connues : environ 2700 milliards	...

Classe ces approximations, de la plus éloignée à la plus proche de celle affichée par ta calculatrice.

no149 Les chasseurs de π

Newton, mathématicien anglais du XVII^e siècle, a trouvé que :

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \dots$$

n° du terme : 1 2 3 4 5

Un autre mathématicien, le Suisse Euler, a montré, quant à lui, que :

$$\frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

n° du terme : 1 2 3 4 5

Au XVII^e siècle toujours, un troisième mathématicien, Lord Brouncker, a utilisé une présentation encore plus surprenante à l'aide de ce qu'on appelle une « fraction continue » :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \dots}}}}}$$

n° du terme : 1 2 3 4 5 6 ...

À la fin du XVII^e siècle, le mathématicien allemand Leibnitz, démontra, sur la base des travaux de James Gregory, que :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

n° du terme : 1 2 3 4 5

Quelles sont les approximations successives de π que tu obtiens en prenant 1 terme, puis 2 termes, puis 3 termes, et ainsi de suite, pour chacun de ces quatre développements ?

Pi (π)

Il existe des moyens mnémotechniques pour retenir les premières décimales de π : il s'agit de mémoriser des phrases dont les mots ont autant de lettres que les décimales successives ; les mots de dix lettres représentent une décimale égale à zéro.

« Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Glorieux Archimède, artiste ingénieur,

Toi de qui Syracuse aime encore la gloire,

Soit ton nom conservé par de savants grimoires !

Jadis, mystérieux, un problème bloquait

Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose

Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.

Ô quadrature ! Vieux tourment de philosophe ! ... »

En allemand :

« Dir, o Held, o Alter Philosoph, du Riesen-Genie !

3 1 4 1 5 9 2 6 5

Wie, viele Tausende bewundern Geister ... »

En anglais :

« May I have a large container of coffee ... »

3 1 4 1 5 9 2 6

NO150 Ben, mon lapin !

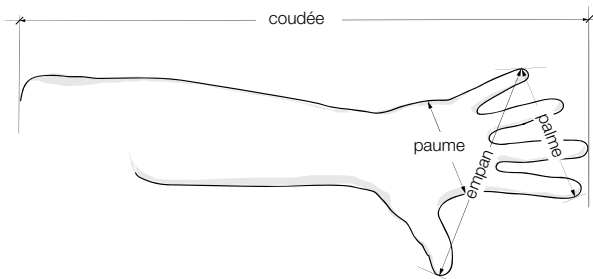
Un célèbre mathématicien italien du Moyen-Âge, Leonardo da Pisa, plus connu sous le nom de Fibonacci, propose cette petite énigme :

« Au mois de janvier de cette année, tu possédais un seul couple de lapins.

- a) Combien en auras-tu à la fin de cette même année, si, comme tous les couples de lapins, le tien :
 - devient productif au deuxième mois de son existence,
 - engendre ensuite un nouveau couple chaque mois ? »
- b) Comment trouver le nombre de couples de lapins du mois suivant en fonction du nombre de couple de lapins des mois précédents ?

NO151 La canne des bâtisseurs

Cette illustration représente quatre unités de mesure que les bâtisseurs de cathédrales et de chapelles romanes utilisaient fréquemment.



Mises bout à bout avec le pied, ces différentes unités en constituaient une nouvelle qu'on appelle aujourd'hui encore la « canne des bâtisseurs », et qu'on nomme parfois « quine », puisqu'elle est formée de cinq segments :

coudée	pied	empan	palme	paume
--------	------	-------	-------	-------

- a) Fabrique-toi une telle canne à partir des mesures de ton propre corps.
- b) Calcule ensuite les rapports entre chaque unité de mesure et l'unité immédiatement inférieure.

Fonctions et algèbre

- Fonctions et diagrammes
- Calcul littéral
- Équations
- Fonctions, algèbre... et problèmes



Fonctions et algèbre

Résoudre des problèmes numériques et algébriques

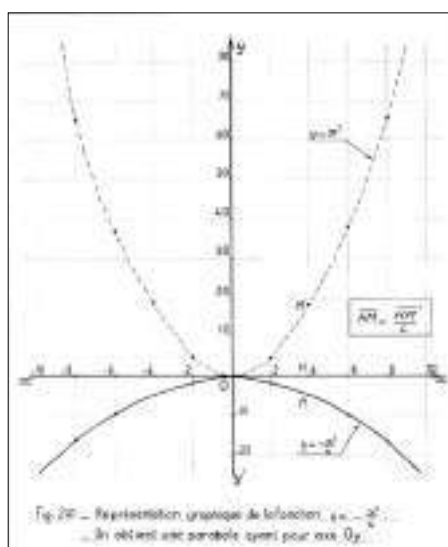
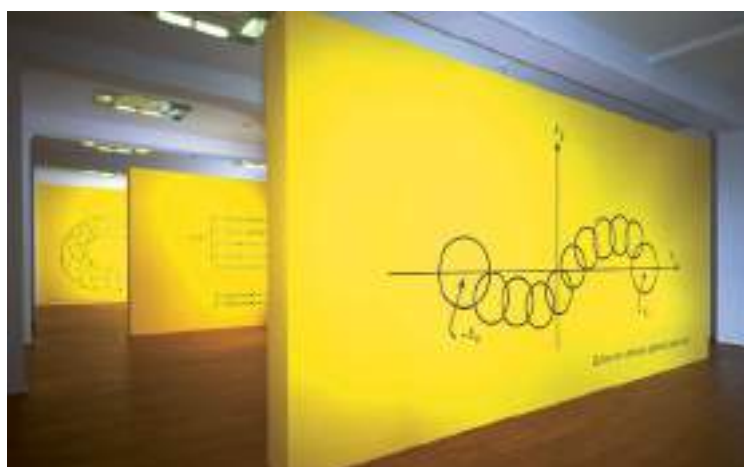
Résolution de problèmes en lien avec les notions étudiées (fonctions, diagrammes, expressions algébriques et équations).

Résolution de problèmes de proportionnalité.

Affine, affine et linéaire ou affine et constante, quadratique, du troisième degré, racine, homographique... Le domaine des fonctions est riche de représentants divers aux multiples propriétés.

Qu'elles soient illustrées au travers d'un *tableau de valeurs*, d'une *représentation graphique* ou simplement par leur *expression fonctionnelle*, les fonctions sont des outils extrêmement importants pour la résolution de problèmes, l'étude de phénomènes naturels et sociaux, ainsi que pour le bon fonctionnement de nombre d'appareils électriques et électroniques.

Étudiées dès le Cycle 3 et utiles autant aux lycéens, collégiens, gymnasiens qu'à de très nombreuses professions de l'artisanat et de l'industrie, les fonctions ont ainsi une place des plus importantes dans les programmes d'études.



Les œuvres de Bernar Venet, artiste plasticien français né en 1941, s'inspirent, voire reproduisent, des éléments mathématiques.

Ci-dessus : Installation of Equation, acrylique sur mur, au Ludwig Museum, Coblenz, Allemagne, 2002

À gauche : Représentation graphique de la fonction $y = -\frac{x^2}{4}$, acrylique sur toile, 146 × 121 cm, 1966, location : Paris, musée national d'art moderne, Centre Georges Pompidou

Fonctions et diagrammes

Apprentissages visés

- Reconnaissance de situations pouvant être modélisées par des fonctions
- Lecture et interprétation de tableaux de valeurs, de représentations graphiques et d'expressions fonctionnelles
- Représentations de fonctions et passage d'une représentation à une autre
- Résolution de problèmes de proportionnalité
- Lecture de données
- Lecture, interprétation et réalisation de diagrammes
- Utilisation d'outils appropriés (*calculatrice, tableur, grapheur, etc.*)

Sommaire

Fonctions

Pour réactiver certaines connaissances	74
Situations modélisables par des fonctions	74
Représentations de fonctions	75
Encore quelques problèmes	77
Pour réactiver certaines connaissances	77
Situations modélisables par des fonctions	78
Représentations graphiques et expressions fonctionnelles	82
Représentations de fonctions affines	87
Problèmes et fonctions	92
Encore quelques problèmes	94

Proportionnalité

Pour réactiver certaines connaissances	98
Pour consolider et approfondir	100
Unités composées	107
Encore quelques problèmes	113

Diagrammes	115
------------	-----



Fonctions

Fichier: **Que sais-je ? p. 33**

Pour réactiver certaines connaissances

FA1 Tableaux et représentations

Représente graphiquement les fonctions f et g définies par les tableaux suivants.

Fonction f

x	-1	0	1
$3x$	-3	0	3

Fonction g

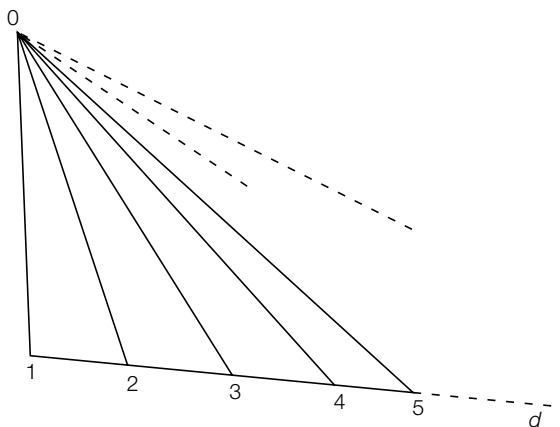
x	-1	0	1
$2x - 6$	-8	-6	-4

Fichier: **FA2**

Situations modélisables par des fonctions

FA3 Combien de triangles ?

- Combien y a-t-il de triangles dans la figure ci-dessous ?
- Combien y en aurait-il dans le cas d'une figure comportant 50 points alignés et numérotés sur la demi-droite d ?
- Et pour n points ?



Fichier: **FA4 à FA6**

Représentations de fonctions

Fichier: FA7 à FA9

FA10 Expression fonctionnelle et graphique

Voici quatre fonctions f , g , h et i représentées dans un système d'axes.

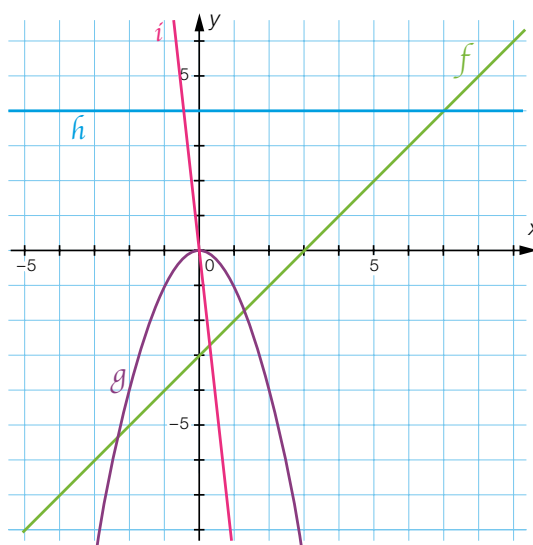
Indique à quelle représentation graphique chacune des expressions fonctionnelles ci-dessous correspond.

$$x \mapsto -x^2$$

$$x \mapsto -10x$$

$$x \mapsto 4$$

$$x \mapsto x - 3$$



FA11 Un peu d'ordre !

Voici seize expressions fonctionnelles.

$$f: x \mapsto x^2$$

$$j: x \mapsto -x$$

$$n: x \mapsto 5x^2 + 2$$

$$r: x \mapsto 50x$$

$$g: x \mapsto 17x$$

$$k: x \mapsto -x^2 - 1$$

$$o: x \mapsto -13$$

$$s: x \mapsto -5x^2$$

$$h: x \mapsto 2x + 3$$

$$l: x \mapsto \frac{x}{100}$$

$$p: x \mapsto -5x$$

$$t: x \mapsto x + 0,8$$

$$i: x \mapsto 1,5$$

$$m: x \mapsto \frac{1}{100}$$

$$q: x \mapsto 1 + 3x$$

$$u: x \mapsto 2x + \frac{3}{10}$$

- Lesquelles ont une droite pour représentation graphique ?
- Lesquelles sont des fonctions linéaires ?
- Lesquelles sont des fonctions constantes ?
- Lesquelles sont des fonctions affines ?

FA12 Chercher la bonne fonction

f , g , h et i sont quatre fonctions.

f	g	h	i
4 $\mapsto$ 28	5 $\mapsto$ 2	1 $\mapsto$ 0,1	5 $\mapsto$ 25
8 $\mapsto$ 56	1 $\mapsto$ -2	8 $\mapsto$ 0,8	9 $\mapsto$ 81
-10 $\mapsto$ -70	-12 $\mapsto$ -15	-15 $\mapsto$ -1,5	-10 $\mapsto$ 100

- a) Sont-elles toutes linéaires ?
 b) Écris, si possible, l'expression fonctionnelle de chacune de ces fonctions.

FA13 Linéaire!

Les fonctions f , g , h et i sont linéaires.

Dans chacune de ces lignes s'est glissé un couple d'intrus. Trouve-le!

Fonction f :	(4 ; 12)	(12 ; 48)	(16 ; 64)	(8 ; 32)
Fonction g :	(-3 ; 1,5)	(6 ; -3)	(-10 ; 5)	(-2 ; 0)
Fonction h :	(1 ; 5)	(0 ; 0)	(1 ; 0,2)	(-4 ; -0,8)
Fonction i :	(15 ; 5)	(10 ; 30)	(33 ; 11)	(27 ; 9)

FA14 Quelle est la bonne fonction ?

h , i et j sont trois fonctions.

Trouve laquelle est linéaire et indique son facteur de linéarité.

h	i	j
-4 $\mapsto$ 0	0 $\mapsto$ 0	$\frac{1}{6}$ $\mapsto$ -1
0 $\mapsto$ 0	2 $\mapsto$ 8	-2 $\mapsto$ 12
2 $\mapsto$ 6	5 $\mapsto$ 125	0 $\mapsto$ 0
10 $\mapsto$ 14	10 $\mapsto$ 1000	5 $\mapsto$ -30

FA15 Toutes linéaires ?

k , l et m sont trois fonctions.

Seule l'une d'entre elles n'est pas linéaire.

- a) Indique laquelle.
 b) Détermine le facteur de linéarité des deux autres fonctions.

k	l	m
$k(3) = 1,5$	$l(-4) = -6$	$m(9) = 3$
$k(18) = 9$	$l(2) = 3$	$m(36) = 6$
$k(7,2) = 3,6$	$l(11) = 16,5$	$m(64) = 8$

Encore quelques problèmes

FA16 Chemin faisant

Représente schématiquement dans des systèmes d'axes différents chacune des situations suivantes.

- Nita va à l'école à rollers, tandis que sa sœur Lisa y va à pied.
- Fabio quitte la maison à vélo afin de se rendre à son cours de guitare. En chemin, il se rend compte qu'il a oublié ses partitions. Il retourne les chercher et arrive à l'heure à son cours.
- Diego va jouer un match de hockey. Il charge son matériel dans sa voiture, puis se rend à la patinoire. Avec son équipe, il gagne la partie 5 à 2. En rentrant à la maison, il rencontre une copine et s'arrête un moment pour discuter. Finalement, il rentre chez lui et regarde la TV.
- Jessica va à pied à son travail. En chemin, elle croise son voisin de palier Mario qui rentre chez lui à vélo.

Fichier: **FA17 et FA18**

Fichier: **Que sais-je? p. 44**

Pour réactiver certaines connaissances

FA20 Histoire de s'y retrouver

Fichier: **FA19**

Classe les fonctions suivantes selon leur type.

$$a: x \mapsto 3x - 5$$

$$h: x \mapsto -7$$

$$o: x \mapsto -x$$

$$b: x \mapsto x^2$$

$$i: x \mapsto x$$

$$p: x \mapsto \frac{100}{x}$$

$$c: x \mapsto 2^x$$

$$j: x \mapsto 0,5x^2$$

$$q: x \mapsto -100x + 1$$

$$d: x \mapsto -2x + 5$$

$$k: x \mapsto -2,5x$$

$$r: x \mapsto -2x^3$$

$$e: x \mapsto 3x + 5$$

$$l: x \mapsto 23$$

$$s: x \mapsto 0$$

$$f: x \mapsto 3$$

$$m: x \mapsto 0,1x$$

$$t: x \mapsto \sqrt{x}$$

$$g: x \mapsto 3x$$

$$n: x \mapsto x^3$$

FA21 Quadratique et affine

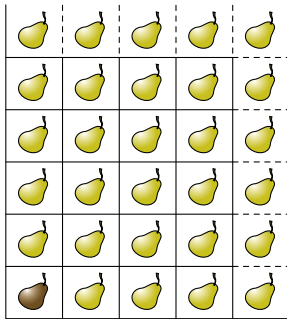
Représente dans le même graphique les fonctions f définie par $f(x) = -2x^2$ et g définie par $g(x) = 2x - 3$.

Situations modélisables par des fonctions

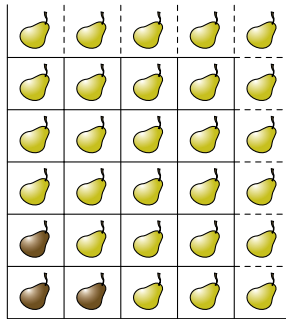
FA22 Ça se gâte !

- a) Soigneusement entreposées sur un grand plateau au début du mois de novembre, ces poires se gâtent inexorablement d'une semaine à l'autre.

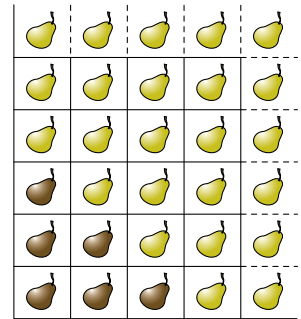
Évolution du nombre de poires gâtées :



1^{re} semaine



2^e semaine



3^e semaine

Peux-tu prévoir le nombre de poires qui seront gâtées après 10 semaines ?

Et après n semaines ?

- b) Entreposées au même endroit, ces pommes se gâtent aussi inexorablement d'une semaine à l'autre.

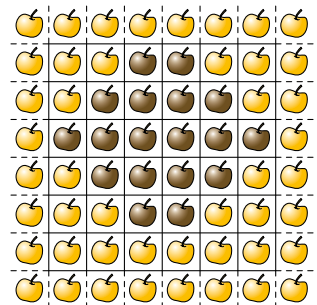
Évolution du nombre de pommes gâtées :



1^{re} semaine



2^e semaine



3^e semaine

Peux-tu prévoir le nombre de pommes qui seront gâtées après 10 semaines ?

Et après n semaines ?

FA23 Fractales

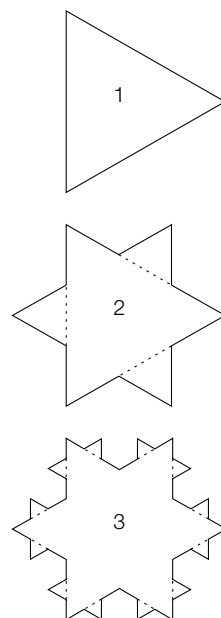
Les côtés de chacune de ces figures sont isométriques.

À chaque étape, on commence par diviser la longueur du côté de la figure précédente par trois.

On transforme ensuite chaque côté de la figure précédente, en doublant le tiers central.

En partant d'un triangle équilatéral dont le côté mesure 13,5 cm :

- Construis en vraie grandeur la troisième étoile.
- Existe-t-il une étoile dont le périmètre est supérieur à 1 m ? à 100 m ? à la distance Terre-Lune ?
- Existe-t-il une étoile de cette série dont l'aire est supérieure à celle du sol de ta salle de classe ?



On désigne par *figure fractale* une courbe, une surface ou un objet qui possède, entre autres, la caractéristique de présenter des détails identiques à des échelles très différentes.

Partons par exemple d'un cube. Partageons-le en vingt-sept petits cubes, tous identiques. Retirons le petit cube central ainsi que les six cubes situés au milieu de chacune des faces.

Si l'on répète ce procédé à chacun des cubes restants, deux fois de suite, on obtient le solide ci-contre, appelé également « éponge de Menger-Sierpinski ».

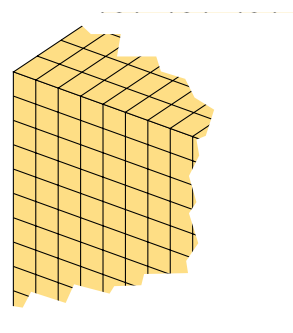
FA24 Le cube peint

Un cube d'arête quelconque est constitué de n petits cubes unités, tous pareils.

On plonge le cube dans de la peinture jaune.

Combien de petits cubes auront trois faces peintes ?

Deux faces peintes ? Une face peinte ? Aucune face peinte ?



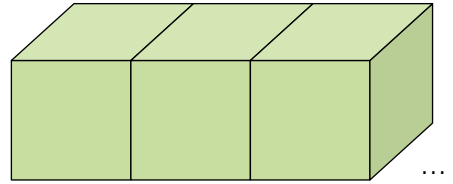
FA25 Alignement de cubes

On aligne des cubes sur une table, face contre face, et on détermine le nombre de faces visibles et cachées.

Combien y aura-t-il de faces de chaque sorte si l'on dispose de :

a) 2013 cubes ?

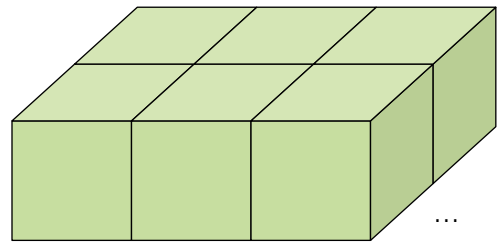
b) n cubes ?



Exemple : 3 cubes

- nombre de faces visibles : 11
- nombre de faces cachées : 7

c) n cubes avec cet arrangement ?

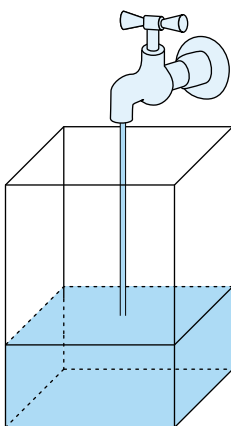


FA26 Un peu d'ordre, s.v.p. !

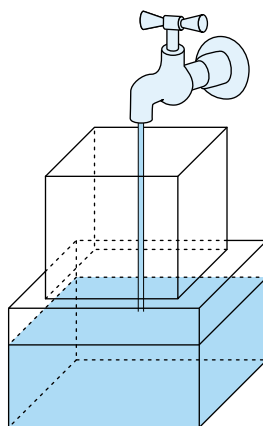
On remplit d'eau les six récipients ci-dessous.

Tous ont le même volume (480 cm^3) et la même hauteur (10 cm).

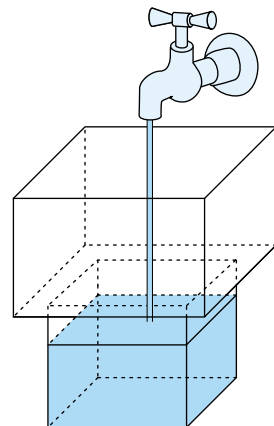
Mets en relation les récipients avec chacune des représentations graphiques.



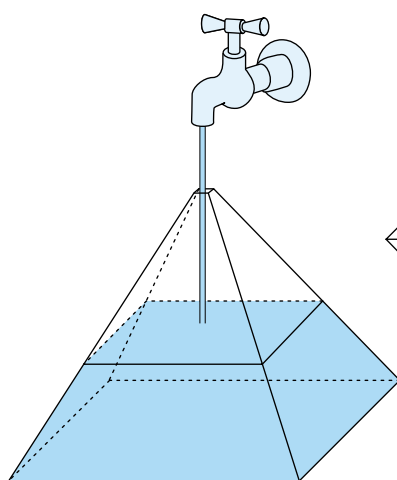
1.



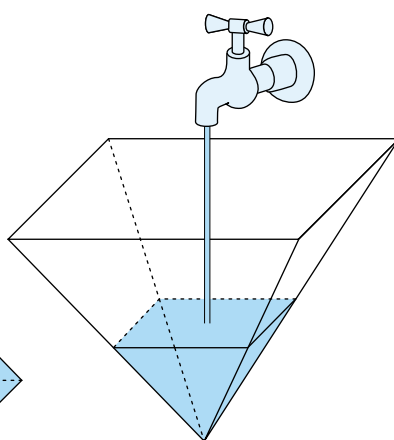
2.



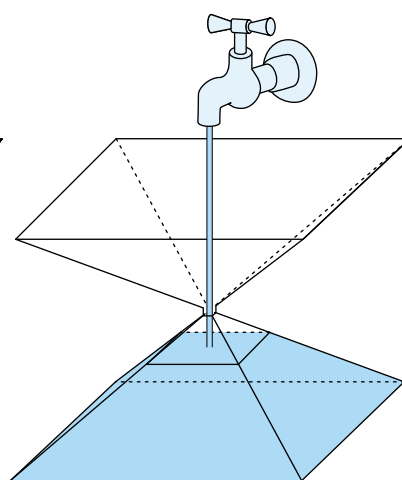
3.



4.

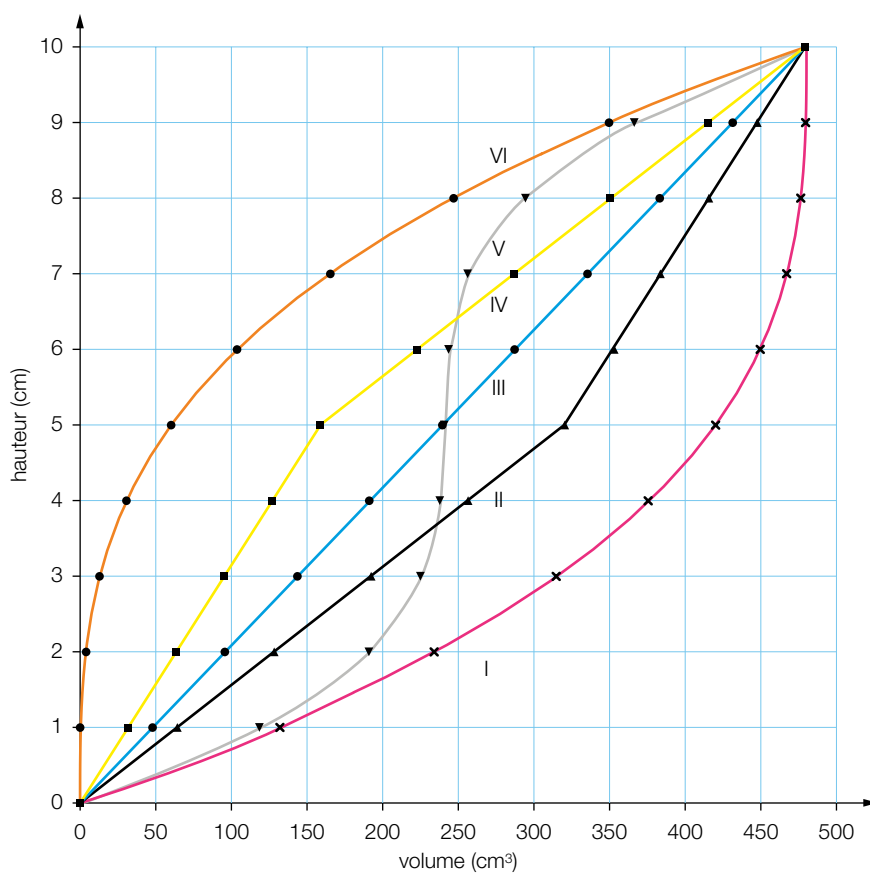


5.



6.

Graphiques :



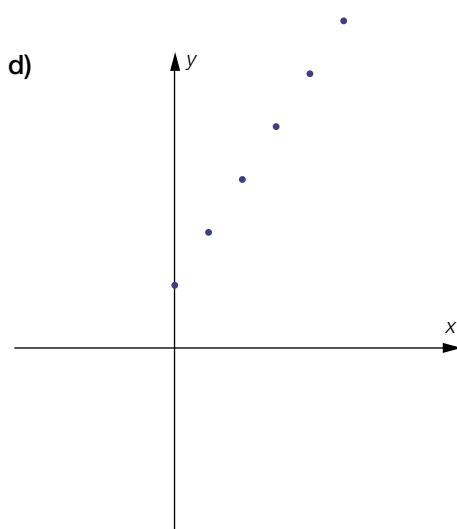
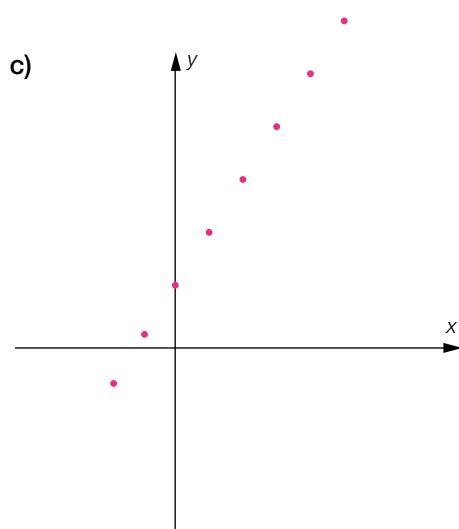
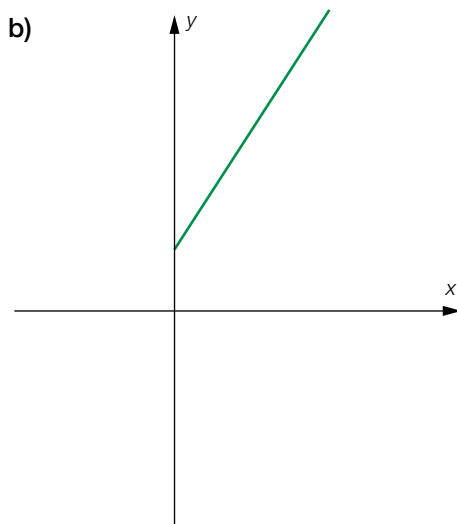
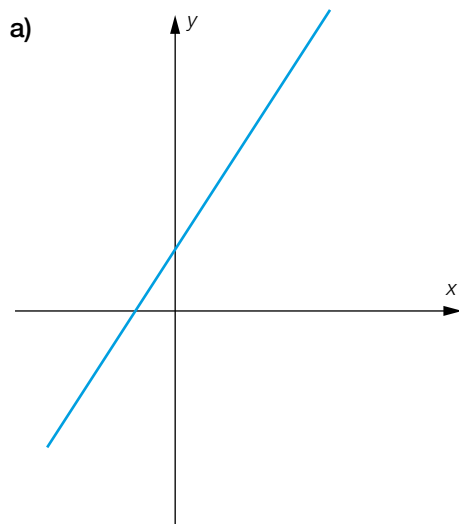
Représentations graphiques et expressions fonctionnelles

FA28 Cherchez les différences

Quatre élèves ont représenté la fonction $x \mapsto 2x + 5$.

Pourtant, leurs résultats ne sont pas tout à fait les mêmes. En quoi sont-ils différents ?

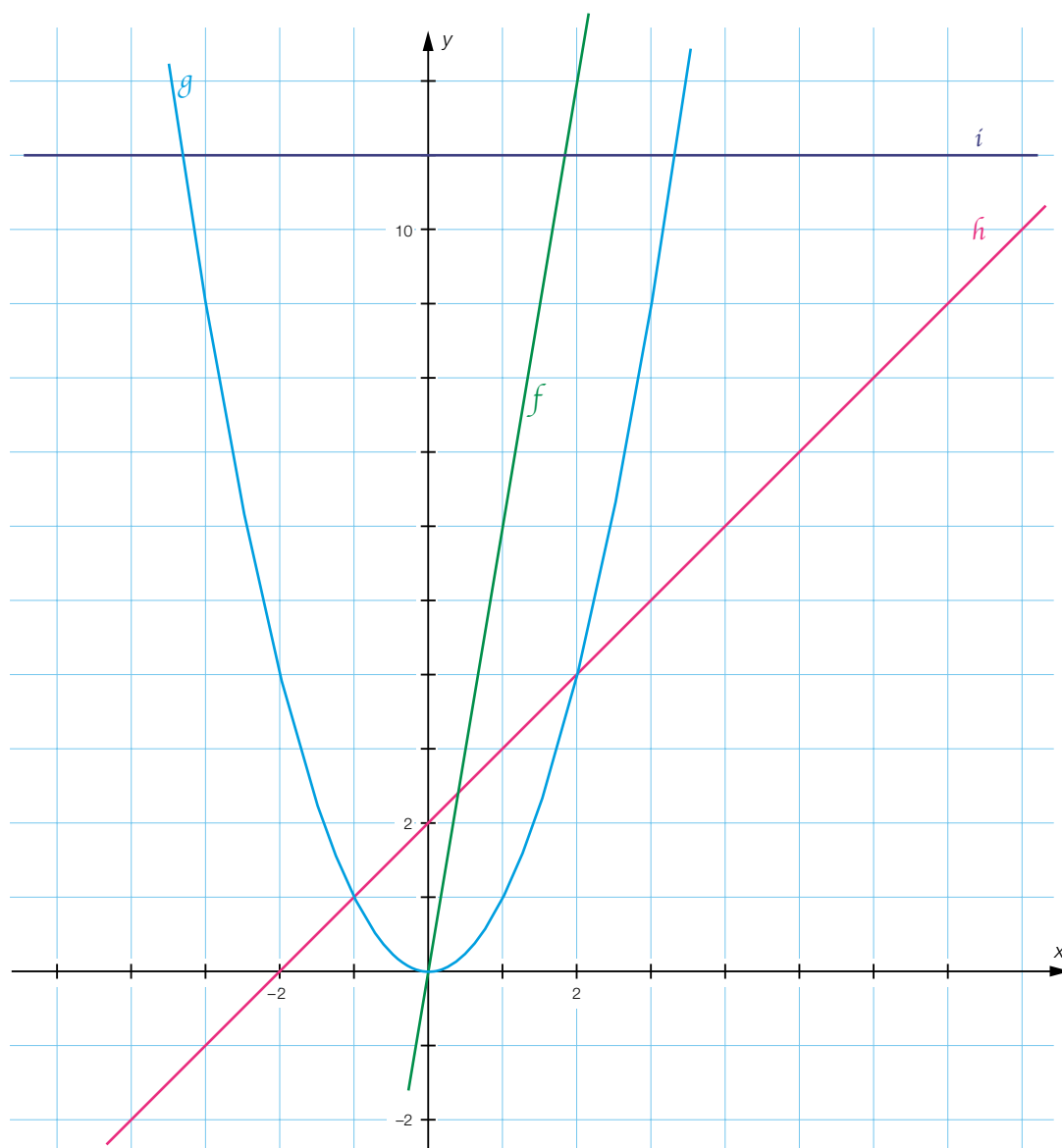
Trouve, si possible, des situations fonctionnelles de la vie courante dont les représentations graphiques ont la même allure.



FA29 Correspondances

Quatre fonctions ont été représentées dans le graphique ci-dessous.

- Établis un tableau de valeurs pour chacune d'entre elles.
- Retrouve leur expression fonctionnelle.



FA31 Les petites dernières

Deux fonctions $\hat{h}$ et $\hat{i}$ sont définies par :

$$\hat{h}(x) = 2x^3 \quad \hat{i}(x) = \frac{2}{x}$$

Représente-les graphiquement.

Fichier: FA32

FA33 Appariement

Voici cinq fonctions f , g , $\hat{h}$, $\hat{i}$ et j représentées dans un système d'axes et dont les expressions fonctionnelles sont :

$$x \mapsto \frac{4}{x}$$

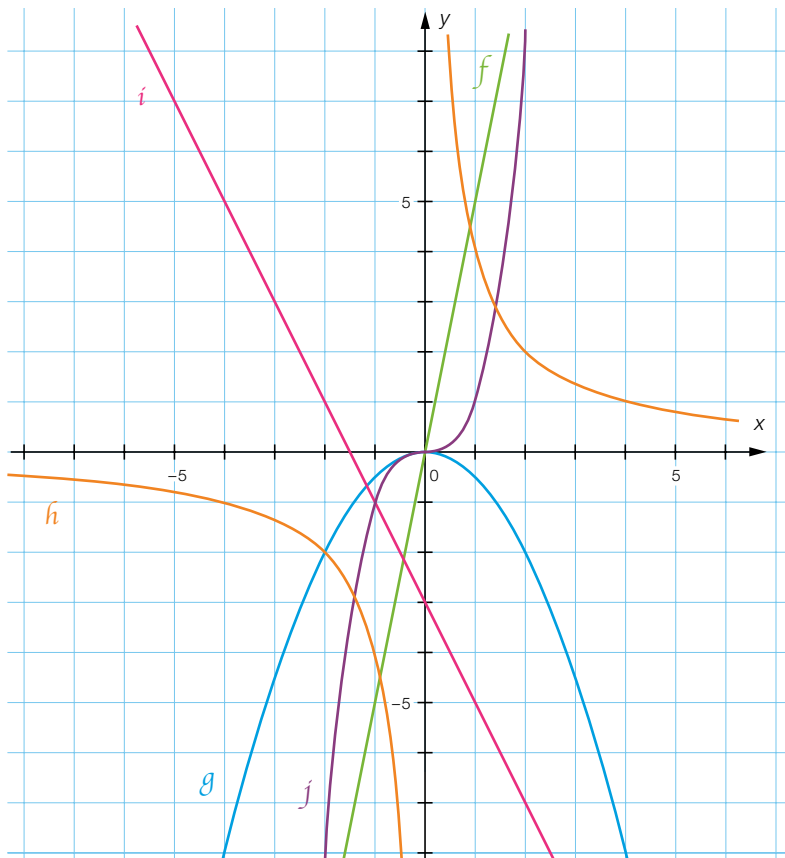
$$x \mapsto -0,5x^2$$

$$x \mapsto x^3$$

$$x \mapsto 5x$$

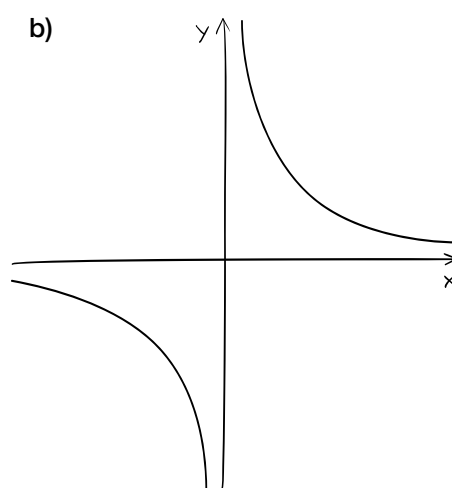
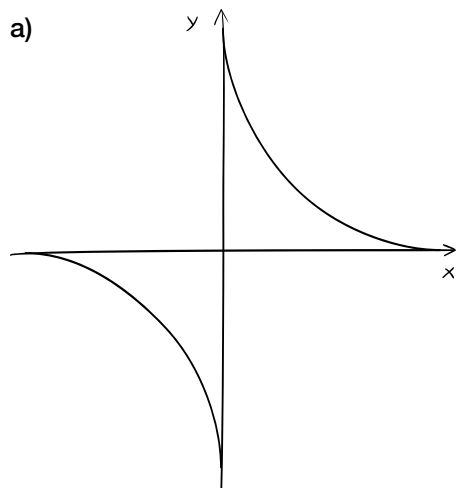
$$x \mapsto -2x - 3$$

Retrouve les expressions fonctionnelles de chacune de ces fonctions.



FA34 Hyperboles

Voici l'esquisse de la représentation graphique de la fonction g définie par $g(x) = \frac{5}{x}$ faite par deux élèves. Leur travail est-il correct ?



FA35 Question d'ouverture

Les cinq fonctions ci-dessous sont de la forme $f(x) = ax^2$.

Voici leur expression fonctionnelle et leur représentation graphique :

$$g(x) = x^2$$

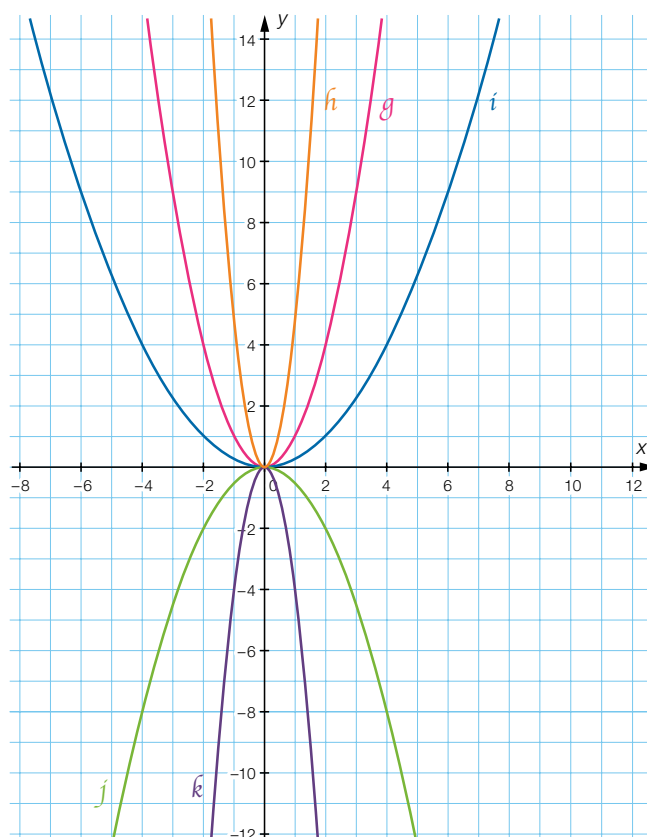
$$\hat{h}(x) = 5x^2$$

$$i(x) = 0,25x^2$$

$$j(x) = -0,5x^2$$

$$\hat{k}(x) = -4x^2$$

Quelles constatations peux-tu formuler ?



FA37 Courbes

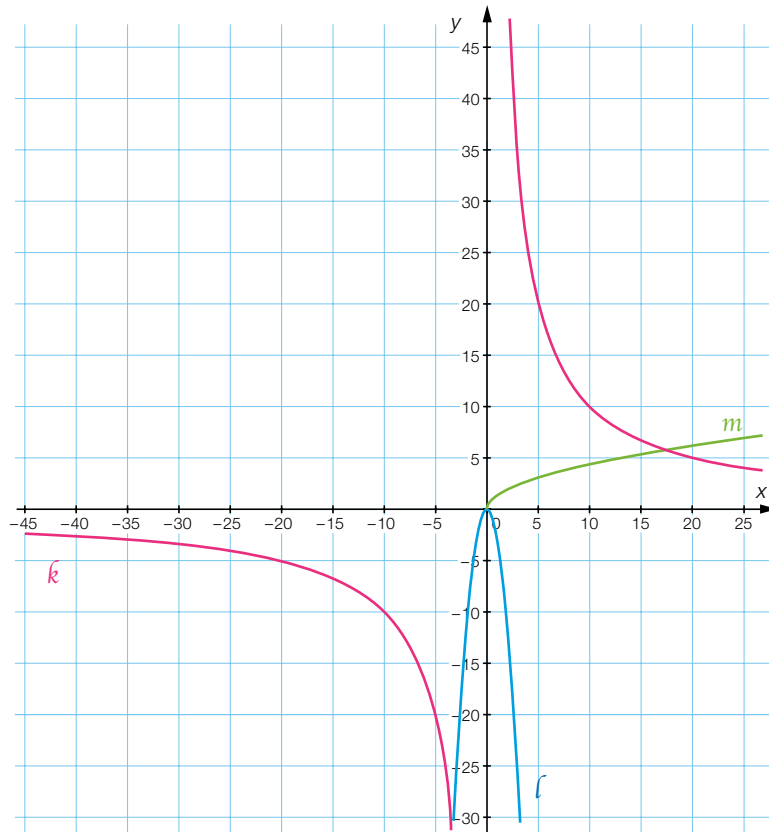
Voici trois fonctions k , l et m représentées dans un système d'axes.

Indique à quelle représentation graphique correspond chacune des expressions fonctionnelles ci-dessous.

$$x \mapsto \frac{100}{x}$$

$$x \mapsto -3x^2$$

$$x \mapsto \sqrt{2x}$$



FA38 De quel type de fonction s'agit-il ?

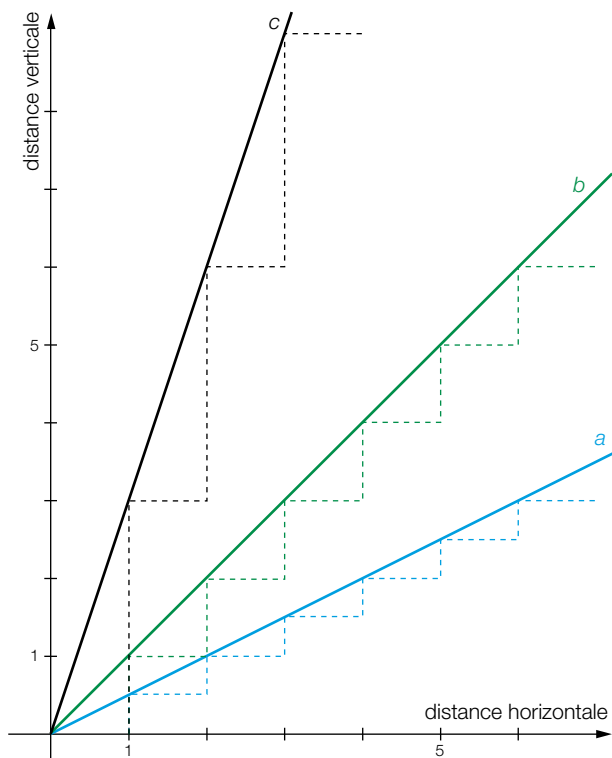
Donne, si possible, l'expression fonctionnelle et le type de fonction correspondant aux situations suivantes, puis esquisse leur représentation graphique.

- La distance parcourue par un véhicule qui roule à vitesse constante, en fonction du temps.
- Le volume d'une pyramide à base carrée, en fonction de sa hauteur.
- L'aire totale d'un cube en fonction de son arête.
- Le volume d'un cube en fonction de son arête.
- La longueur d'un cercle en fonction de son rayon.
- Le périmètre d'un disque en fonction de son diamètre.
- Le diamètre d'un disque en fonction de son aire.
- Le prix d'une course en taxi en fonction de la distance parcourue.
- Le montant d'une facture de téléphone en fonction du temps de communication.

Représentations de fonctions affines

FA39 Attention à la marche !

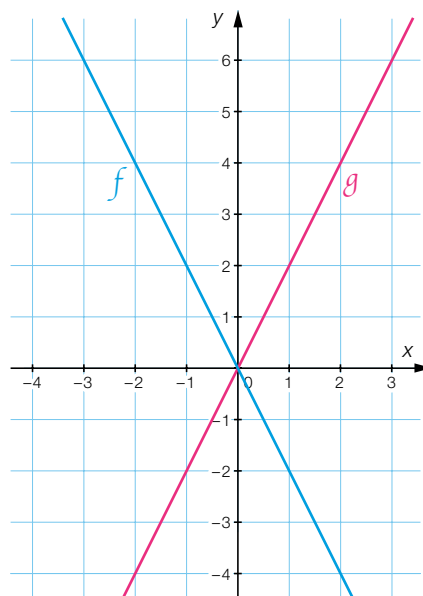
On a représenté des escaliers et les trois droites qui relient, respectivement, le nez des marches de chacun d'eux. Définis la pente de chacune de ces droites.



Fichier: FA40

FA41 Pente

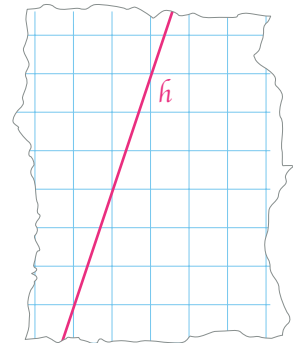
Détermine la pente des droites f et g représentées ci-contre, puis leur expression fonctionnelle.



FA42 Morceau de papier

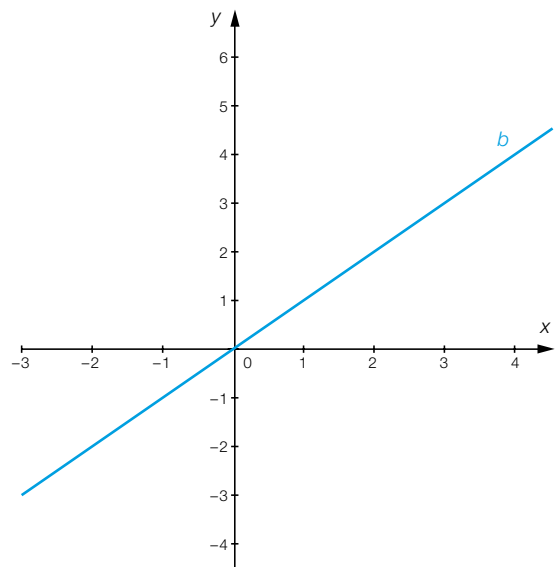
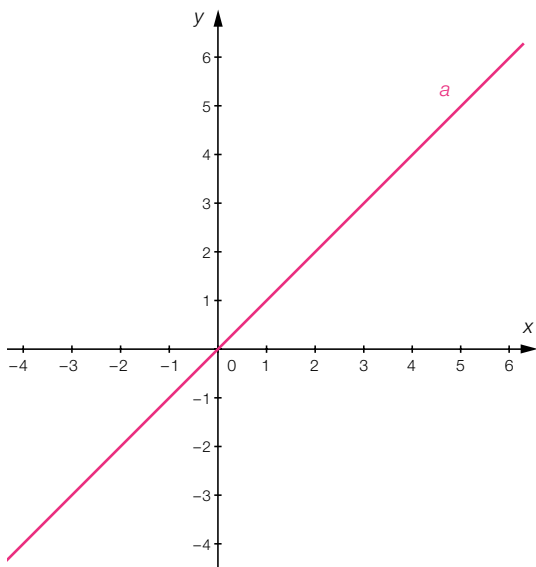
Léa doit retrouver l'expression fonctionnelle de la fonction linéaire $\hat{h}$ qu'elle a représentée dans un repère orthonormé. Malheureusement, sa feuille a été déchirée et il ne lui reste plus que le morceau ci-contre.

Donne une méthode lui permettant malgré tout d'effectuer le travail demandé sans reconstruire la représentation graphique.



FA43 Pentu!

Quelle est la droite qui a la plus forte pente? Justifie.



FA45 Droites parallèles

La droite f est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = 4x$, la droite g celle de la fonction g définie par $g(x) = 4x + 3$.

- Sans tracer ces droites, peux-tu dire si elles sont parallèles?
- Vérifie ton pronostic en les traçant.
- Soit h la droite parallèle à f et qui passe par le point $(0 ; -5)$; sans la tracer, détermine l'expression fonctionnelle de la fonction h .
- Trouve l'expression fonctionnelle de la fonction i qui passe par le point $(0 ; -100)$ et dont la pente vaut -2 .

FA46 Où ça coupe !

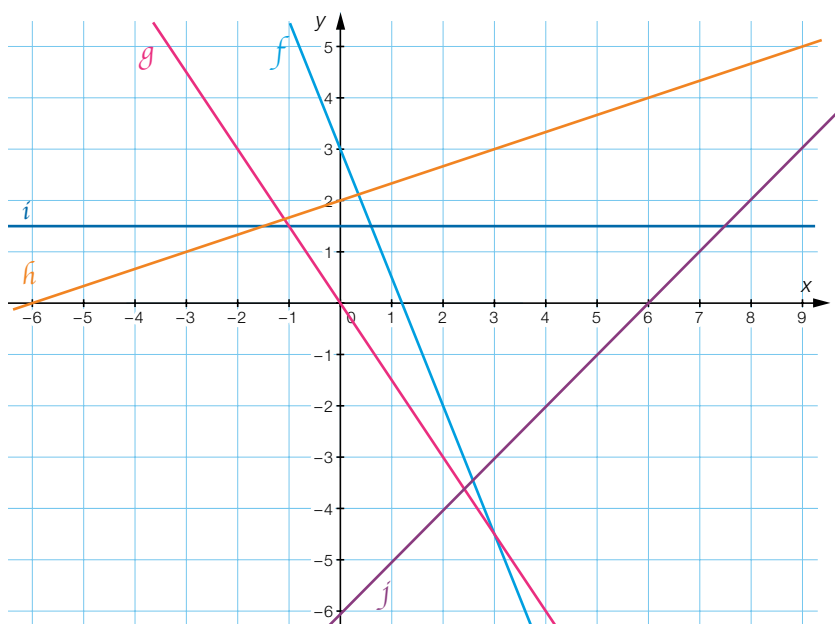
Trouve l'expression fonctionnelle des fonctions représentées par les droites décrites ci-dessous :

- La droite a passe par le point $(0 ; 2)$. Elle est inclinée à 45° .
- La droite b passe par le point $(0 ; 3)$, avec une pente de 300% .
- La droite c coupe l'axe vertical à 5 unités en dessous de l'origine, avec une pente de deux sur un.
- La droite d passe par le point de coordonnées $(0 ; 4)$, avec une pente égale à $-\frac{1}{2}$.
- La droite e passe par les points $(0 ; 3)$ et $(-2 ; 0)$.

Fichier: FA47

FA48 Droites en vrac

Détermine l'expression fonctionnelle des fonctions représentées ci-dessous.



FA49 Se coupent-elles ?

Dans un système d'axes orthonormé, place les points :

$A(0 ; 6)$ $B(10 ; 0)$ $C(0 ; -7,5)$ $D(-8 ; 0)$.

Construis les droites :

d_1 passant par les points A et B ;

d_2 passant par les points B et C ;

d_3 passant par les points C et D ;

d_4 passant par les points D et A .

- Les droites d_1 et d_3 se coupent-elles ?
- Et les droites d_2 et d_4 ?
- Trouve l'expression fonctionnelle des fonctions représentées par chacune des droites ; que peux-tu en déduire ?

FA50 Sans tableau

Trace la représentation graphique des fonctions $f : x \mapsto -2x + 3$ et $g : x \mapsto -3x$ uniquement à l'aide de la pente et de l'ordonnée à l'origine.

FA51 Uniquement avec a et b

Construis un repère orthonormé, puis trace la représentation graphique des fonctions suivantes à l'aide de la pente et de l'ordonnée à l'origine.

$$f(x) = 3x + 1$$

$$i(x) = -3x - 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x$$

$$j(x) = 2x$$

$$h(x) = -\frac{2}{3}x + 2,5$$

$$k(x) = -\frac{2}{3}x - 5,5$$

FA52 Encore des associations

Associe à chaque esquisse de représentation graphique son expression fonctionnelle.

a) $x \mapsto -7,6x$

b) $x \mapsto 2,9$

c) $x \mapsto -5,1x + 8,4$

d) $x \mapsto x^2$

e) $x \mapsto -2,4x - 1,1$

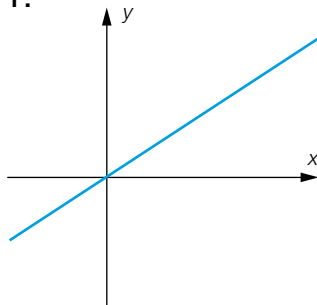
f) $x \mapsto -9,7$

g) $x \mapsto 3,9x + 2,6$

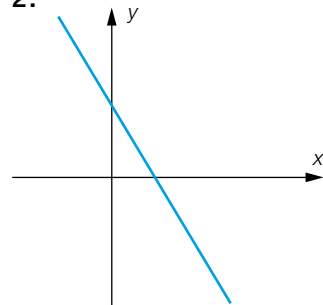
h) $x \mapsto 6,2x$

i) $x \mapsto 4,1x - 9,6$

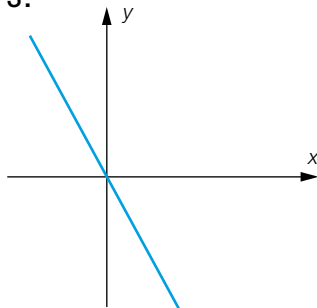
1.



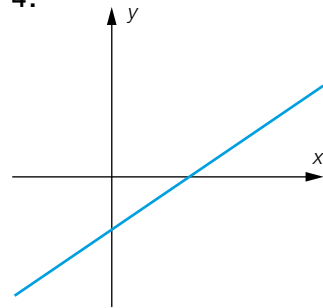
2.



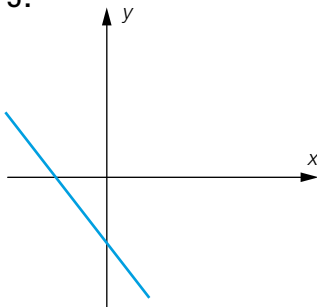
3.



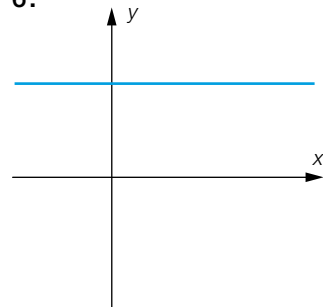
4.



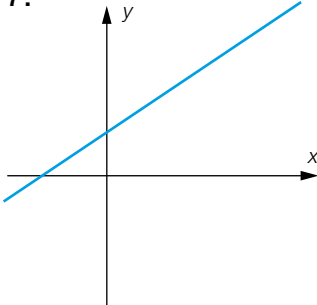
5.



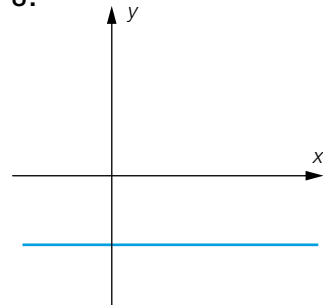
6.



7.



8.



FA53 Comme sur des rails

Ci-contre, on a dessiné à main levée la représentation graphique de la fonction $a : x \mapsto 4x + 3$.

Reproduis à main levée ce dessin dans ton cahier.

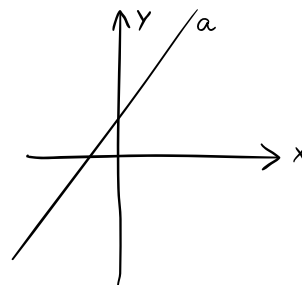
Sans ajouter de graduations, trace les représentations graphiques des fonctions :

$$b : x \mapsto 4x - 3$$

$$d : x \mapsto -4x - 3$$

$$c : x \mapsto -4x + 3$$

$$e : x \mapsto 4x + 6$$



Fichier: **Faire le point p. 54**

Problèmes et fonctions

FA54 Choix d'abonnement

Jean-Daniel a le choix entre trois variantes d'abonnement pour la saison des concerts comptant en tout vingt représentations :

- Variante F : il prend un abonnement pour toute la saison à 700 francs.
- Variante G : il prend un abonnement à 300 francs et paie ensuite 25 francs par concert.
- Variante H : il achète les billets au cas par cas au prix de 50 francs.

a) Détermine le tarif le plus avantageux pour onze concerts.

b) On considère les fonctions suivantes qui associent un prix payé à un nombre de concerts :

f pour le prix de la variante F ;

g pour le prix de la variante G ;

h pour le prix de la variante H.

Représente les fonctions f , g et h dans un même système d'axes.

c) Utilise ces représentations graphiques pour choisir le tarif le plus avantageux en fonction du nombre de concerts.

FA55 Téléphonie mobile

Voici les tarifs de trois opérateurs de téléphone mobile pour des offres Prepaid de 30 jours :

Tarif A : frais d'activation de 5 francs puis 0.30 franc par minute ;

Tarif B : frais d'activation de 15 francs puis 0.10 franc par minute ;

Tarif C : frais d'activation de 10 francs puis 0.15 franc par minute.

- Détermine l'expression fonctionnelle des fonctions qui associent au nombre de minutes utilisées le prix payé pour chacun des trois tarifs.
- Représente les trois fonctions dans un même système d'axes.
- Détermine, en fonction du nombre de minutes utilisées, le tarif le plus avantageux.

FA56 Le potager d'Aloys

Comme chaque printemps, Aloys modifie l'emplacement de son jardin potager.

Cette année, il décide de l'implanter le long de la façade sud du rural, de façon qu'il soit rectangulaire. Pour y parvenir, il dispose d'une clôture de 22 m.

À quelle distance de la façade va-t-il planter ses deux piquets d'angle pour obtenir une aire maximale ?

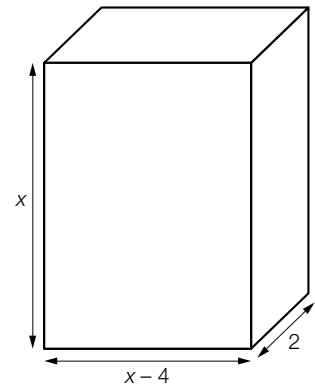
FA57 Parking rectangulaire

À l'occasion d'une fête, l'organisateur doit délimiter un parking rectangulaire, sur un champ mis à sa disposition, à l'aide d'une corde de 240 m.

- Quelles doivent être les mesures du rectangle pour que le parking ait une aire de 2700 m^2 ?
- Donne l'expression fonctionnelle qui, à la mesure d'un côté du parking, fait correspondre son aire.
- Représente graphiquement l'aire du parking en fonction de la longueur d'un de ses côtés.
- Quelle est l'aire maximale qu'on peut donner à ce parking ?

FA58 La boîte

- Quelle est l'aire totale de cette boîte si la hauteur vaut 7 ?
- Pour quelle valeur de x l'aire totale de cette boîte est-elle égale à 146 cm^2 ?
- Donne l'expression fonctionnelle qui, à la hauteur x de la boîte, fait correspondre l'aire totale de cette boîte.
- Représente graphiquement cette fonction.
- Détermine, à l'aide de la représentation graphique, une valeur approchée de x pour laquelle l'aire totale de la boîte est égale à 100 cm^2 .

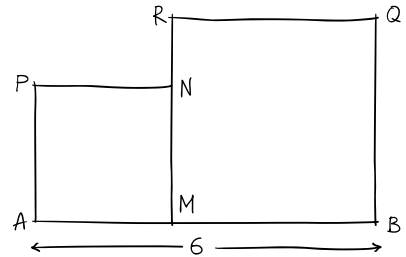


FA59 Somme minimale

On considère un segment AB tel que $AB = 6 \text{ cm}$.

On place un point M sur ce segment et on construit deux carrés $AMNP$ et $MBQR$, comme sur le dessin ci-contre.

Où placer le point M pour que la somme S des aires des deux carrés soit minimale ?



Encore quelques problèmes

FA60 Ça bouge !

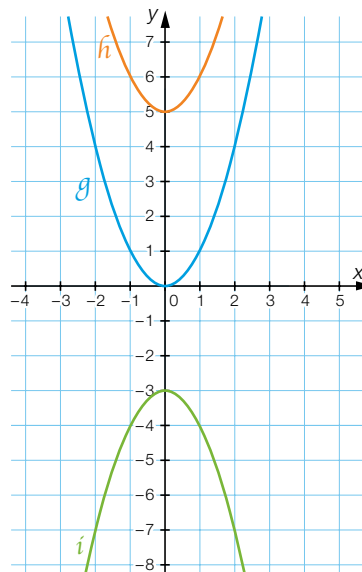
Les trois fonctions g , h et i sont de la forme $x \mapsto ax^2 + c$.

Voici leur expression fonctionnelle et leur représentation graphique :

$$g(x) = x^2$$

$$h(x) = x^2 + 5$$

$$i(x) = -x^2 - 3$$



- Quelles constatations peux-tu formuler ?

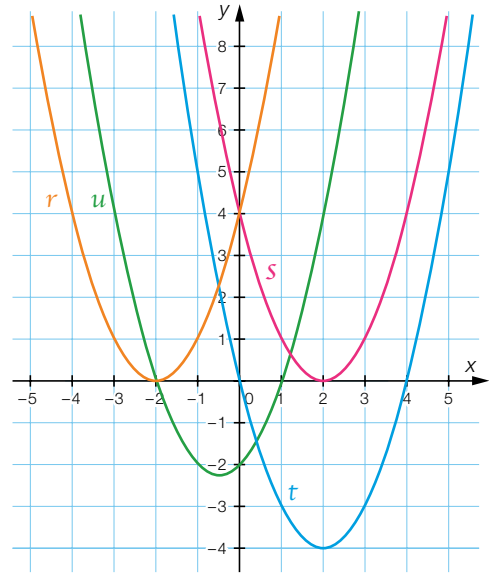
- b) Fais de même pour ces quatre autres fonctions de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

$$r(x) = x^2 + 4x + 4$$

$$s(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$t(x) = x^2 - 4x$$

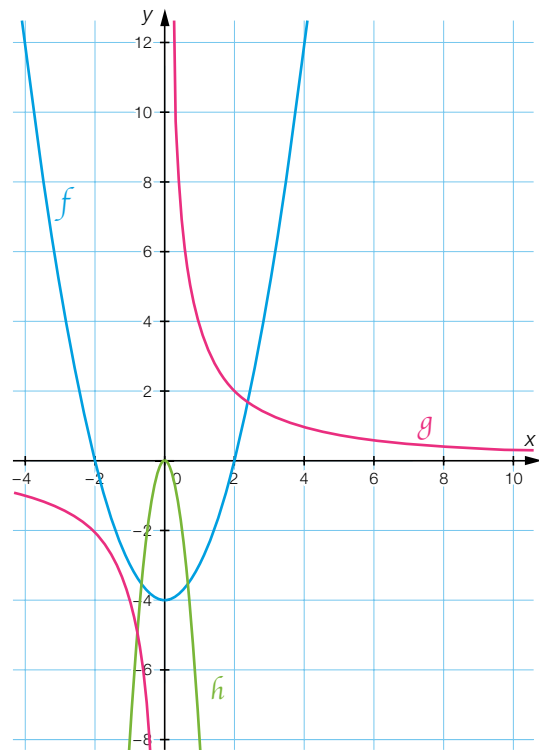
$$u(x) = x^2 + x - 2$$



FA61 Du graphique à l'expression fonctionnelle

Voici les représentations graphiques de trois fonctions.

- a) Trouve l'expression fonctionnelle de chacune d'elle.
b) De quel type de fonctions s'agit-il ?



FA62 Encore un patchwork

- Chaque élève d'une classe dessine un rectangle dont l'aire mesure 72 cm^2 .
Exprime une des dimensions en fonction de l'autre.
- Dans un tournoi de tennis féminin en simple, à chaque tour, les joueuses qui perdent sont éliminées.
Exprime le nombre total de participantes en fonction du nombre de tours.
- Dans un championnat de football, chaque équipe joue des matchs aller-retour contre toutes les autres équipes.
Exprime le nombre total de matchs de ce championnat en fonction du nombre d'équipes inscrites.

Fichier: FA63

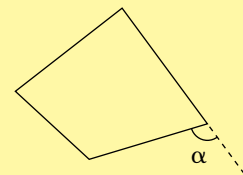
FA64 Angles intérieurs

Exprime la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe en fonction du nombre de ses côtés.

FA65 Angles extérieurs

Exprime la somme des angles extérieurs d'un polygone convexe en fonction du nombre de ses côtés.

On appelle angle extérieur d'un polygone l'angle formé, en un sommet de ce polygone, par l'un de ses côtés et le prolongement de l'autre :



FA66 Deux ou trois choses que je sais d'elle...

De cette fonction, on ne sait qu'une chose : $1 \longrightarrow 12$.

- Trouve, si possible, une fonction linéaire, une fonction affine, une fonction du deuxième degré, respectant la condition posée.
- Même recherche, mais on ajoute une deuxième condition à la première : $4 \longrightarrow 3$.
- Même question avec une troisième condition : $0 \longrightarrow 11$.

FA67 De deux points à la pente

- a) Place les points $E(1; 1)$ et $F(3; 2)$ dans un repère orthonormé. Détermine sur le graphique la pente du segment EF .
- b) Fais de même pour les points $G(4; -1)$ et $H(2; 1)$.
- c) Que vaut la pente des segments EG et EH ?
- d) Soit les points $K(-2; 3)$ et $L(1; 3)$; calcule la pente du segment KL sans placer les points dans le graphique.
- e) Même question avec les points $M(-3; 2)$ et $N(-3; 5)$ et le segment MN .

FA68 Pente et méthode

- a) Trouve une méthode te permettant de calculer rapidement la pente d'une fonction affine connaissant deux points $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$ appartenant à la représentation graphique de cette fonction.
- b) Applique cette méthode pour retrouver la pente de la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points $C(2; 5,5)$ et $D(5; 16)$.
- c) Détermine l'expression fonctionnelle de la fonction f .

FA69 À chacun sa diagonale

On considère un cube d'arête x .

- a) Exprime la mesure de la diagonale d'une face du cube en fonction de la mesure de son arête.
- b) Exprime la mesure de la diagonale intérieure du cube en fonction de la mesure de son arête.
- c) Exprime la mesure de la diagonale intérieure du cube en fonction de la mesure de la diagonale de l'une de ses faces.
- d) Les fonctions définies dans les questions précédentes sont-elles du même type? Si oui, précise lequel.

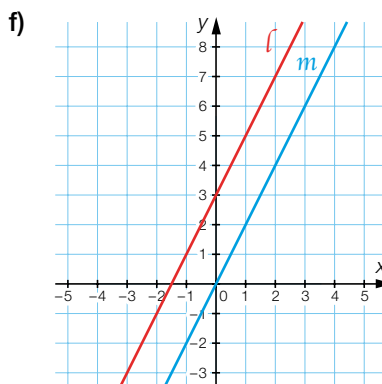
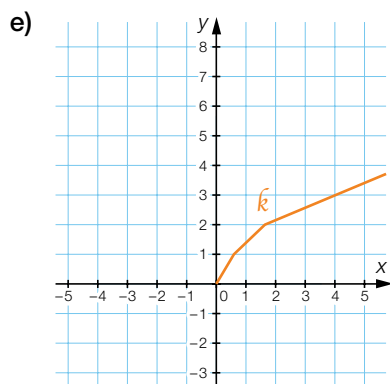
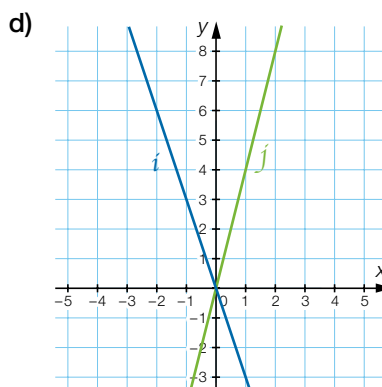
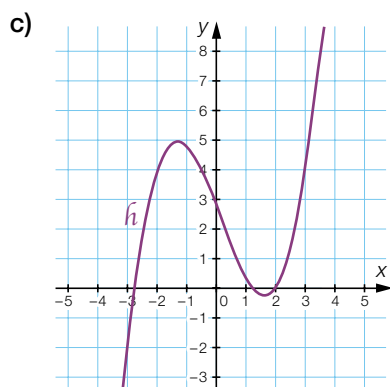
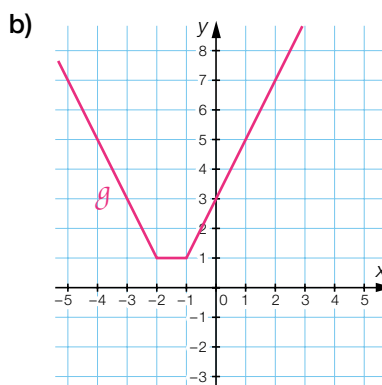
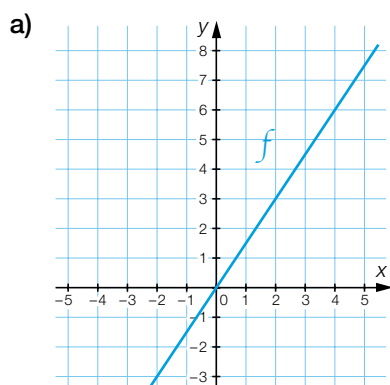
Proportionnalité

Fichier: Que sais-je ? p. 57

Pour réactiver certaines connaissances

FA70 Fonctions linéaires ou pas ?

Lesquelles de ces huit représentations graphiques sont celles d'une fonction linéaire ?



FA71 Très pentu ?

Représente dans ton cahier une pente de 200 %.

Fichier: FA72

FA73 L'avenue Léopold-Robert

L'avenue Léopold-Robert, célèbre artère de la ville de La Chaux-de-Fonds, a une longueur de 1,5 km. Sur un plan de ville à l'échelle 1 : 12 000, quelle est la longueur du segment qui représente cette avenue ?



FA74 Madagascar

Gilles profite d'une promotion pour un voyage à Madagascar : 1248 francs au lieu de 1600 francs.

Quel est le pourcentage de réduction dont il bénéficie ?



Située au sud de l'équateur, dans l'océan Indien, Madagascar est la cinquième île du monde en superficie (587 000 km²) après l'Australie, le Groenland, la Nouvelle-Guinée et Bornéo ; l'île de Madagascar est séparée du continent africain par le canal du Mozambique. La distance entre la côte ouest de Madagascar et les côtes du Mozambique en Afrique de l'Est est d'environ 400 km.

FA75 Le KL

Le départ de la piste de kilomètre lancé des Arcs se trouve à une altitude de 2620 m, son arrivée à une altitude de 2055 m et sa pente moyenne est de 34,3 %.

À quelle distance horizontale du sommet de la piste l'arrivée se situe-t-elle ?

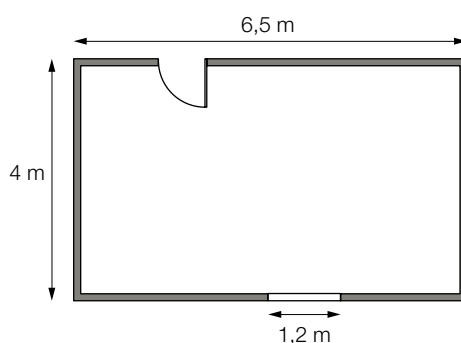
Pour consolider et aller plus loin

Fichier: FA76 et FA77

FA78 La chambre à coucher

Sur ce plan, on a indiqué les dimensions réelles d'une chambre à coucher.

Réalise un plan à l'échelle 1/25 de cette chambre.



FA79 Le pantalon de ski

La masse d'un pantalon de ski se répartit de la façon suivante : laine 42 %, Helanca 44 %, nylon 10 %, autres matières 4 %. Il y a 357 g de laine.

Quelle est la masse totale du pantalon, celle de l'Helanca, celle du nylon et celle des autres matières ?

FA80 Les soldes

Lors des soldes, j'ai bénéficié d'un rabais de 30 % sur une veste de ski qui m'a coûté 315 francs.

Quel était son prix normal ?

Fichier: FA81

FA82 La grande échelle

En intervention lors d'un incendie, les pompiers déploient une grande échelle depuis le sol et l'appuient contre la façade d'un immeuble. Le sommet de l'échelle se trouve alors à 17,1 m du sol et sa base est éloignée de 6 m de la façade.

- Dessine cette situation à l'échelle 1 : 200.
- Quelle est, en pourcent, la pente de la grande échelle ?