

Mathématiques 9-10-11

Aide-mémoire

Savoirs, savoir-faire et stratégies



LEP



CONFÉRENCE INTERCANTONALE
DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DE
LA SUISSE ROMANDE ET DU TESSIN

Mathématiques 9-10-11

Aide-mémoire

Savoirs, savoir-faire et stratégies

Ivan Corminboeuf
Michel Mante
Hervé Schild

LEP



CONFÉRENCE INTERCANTONALE
DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DE
LA SUISSE ROMANDE ET DU TESSIN

Remerciements

Pour cet ouvrage, nous remercions de leur engagement :

Les rédacteurs, Ivan Corminboeuf, Michel Mante et Hervé Schild

L'expert externe, Michel Bréchet

Le sous-groupe COPED, Silvia Fankhauser, Alain Ramelet et François Sulliger

Les coordinateurs, Raymond Clavel et Alain Emery

Toutes les personnes ayant participé à l'élaboration de l'édition 2011 de l'*Aide-mémoire*, dont certains contenus ont servi de base ou ont été repris pour ce nouvel ouvrage

Les commissions et conférences intercantionales impliquées, ainsi que les cantons de Berne, Fribourg, Genève, Jura, Neuchâtel, Valais et Vaud.

Crédits

© David Bellot, svg-cards.sourceforge.net : 39

© Editions LEP, Objectif Vie, Le Mont-sur-Lausanne : 59d

© Office fédéral de topographie swisstopo (BA110186) : 59g

Conception et réalisation : LEP, Loisirs et Pédagogie SA

Relecture : Catherine Vallat, Moutier

Edition 2019

© CIIP Conférence intercantonale de l'instruction
publique de la Suisse romande et du Tessin, 2019

© LEP Editions Loisirs et Pédagogie SA, 2019
Le Mont-sur-Lausanne

ISBN 978-2-606-01711-8
LEP 936012A1

Imprimé en Suisse
I 0219 28 STA
Tous droits réservés pour tous les pays

www.editionslep.ch

Préambule

Ton *Aide-mémoire* présente les termes, définitions, notations et notions théoriques ainsi qu'un certain nombre de savoir-faire abordés dans la collection *Mathématiques 9-10-11*.

C'est un ouvrage de référence auquel tu peux accéder, lorsque tu en éprouves le besoin. C'est par exemple le cas :

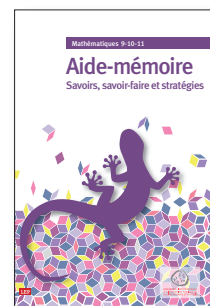
- pour te remémorer une définition ou un savoir-faire ;
- lorsqu'un travail à effectuer nécessite de revenir sur un aspect théorique que tu n'as pas encore parfaitement assimilé ou un savoir-faire que tu ne maîtrises pas complètement.

Tu disposes d'un sommaire, d'une table des matières et d'un index alphabétique pour accéder plus facilement à l'information recherchée.

En utilisant les pages quadrillées prévues à cet effet, tu peux enrichir ton *Aide-mémoire* notamment avec des explications complémentaires, des exemples ou des remarques.

Les rédacteurs

Les pages de l'Aide-mémoire



Sommaire, table des matières, index

Ces différentes parties sont à ta disposition pour te faciliter l'accès aux informations recherchées.

Sommaire	
Nombres et opérations – NO	
■ Généralité	10
■ Ensemble des nombres naturels	12
■ Ensemble des nombres entiers relatifs	17
■ Ensemble des nombres décimaux	21
■ Ensemble des nombres rationnels	27
■ Ensemble des nombres réels	32
■ Puissances	32
■ Racines	36
■ Probabilités	38
Fonctions et algèbre – FA	
■ Fonctions	48
■ Proportionnalité	57
■ Diagrammes	66
■ Calcul littéral	69
■ Équations	78
Espace – ES	
■ Figures géométriques planes	92
■ Transformations	128
■ Géométrie dans l'espace	144
Grandeurs et mesures – GM	
■ Unités de mesure	156
■ Périmètre d'une surface	163
■ Aire d'une surface	165
■ Volume d'un solide	169
■ Théorèmes	173
Recherche et stratégies – RS	
■ Problèmes et résolutions	182
■ Stratégies de recherche	183
■ Vérification et preuves	189

Page 7

200 Table des matières

Aide-mémoire

Table des matières

Nombres et opérations – NO

■ Généralités	10
Les ensembles de nombres	10
Opérations de base	11
Ordre des nombres	11
La droite numérique	11
Opérations et leurs inverses	12
Associativité et distributivité	12
■ Ensembles des nombres naturels $\mathbb{N}$	12
Nombre zéro	12
Nombre, diviseur	13
Divisibilité	13
Le plus petit commun multiple	14
Décomposé en nombre en produits premiers	14
■ Fractions	15
Partitions	15
Plusieurs communs, ajout	16
Plusieurs communs, soustraction	16
Plusieurs communs, produit	16
Conversion de plusieurs nombres	16
■ Ensembles des nombres entiers naturels $\mathbb{Z}$	17
Nombres entiers naturels	17
Différence à zéro	17
Nombres opposés	17
Addition à nombres entiers	17
Soustraction à nombres entiers	18
Enlèvement d'un objet d'un ensemble d'une différence d'un objet d'un ensemble et des différences	19
■ Ensembles des nombres décimaux $\mathbb{D}$	19
Division de nombres décimaux	20
Nombres décimaux	21
Représentation de nombres décimaux sur une droite graduée	21
Apparence d'un nombre décimal	22
■ Addition	22
Addition de nombres décimaux positifs en colonne	23
Addition de nombres décimaux positifs en colonne	23
Addition de nombres décimaux positifs	23
Soustraction des nombres décimaux positifs	24
■ Multiplication	24
Multiplication de nombres décimaux positifs en colonne	24
Multiplication de nombres décimaux positifs en colonne	24
Division et nombres décimaux positifs par produit	25
Propriétés de l'addition et de la multiplication	25
Propriétés des opérations	26
Effet d'un calcul avec des nombres décimaux	26
■ Ensembles des nombres rationnels $\mathbb{Q}$	27
Nombres rationnels	27

Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale	27
Passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire	27
Les fractions	28
Amplification et simplification de fractions	28
Addition et soustraction de fractions	28
Multiplication et division des fractions	29
Multiplication de fractions	29
Calculer la fraction $\times$ nombre	29
Nombres négatifs	29
Division de fractions	30
■ Ensembles des nombres réels $\mathbb{R}$	30
Nombres réels	30
Puissances de 10	30
Puissances et exponent négative	31
Conversion de puissances	31
Propriétés des puissances	31
Notation scientifique	31
Écrire un nombre décimal positif en notation scientifique	32
■ Racines	32
Racine carrée	32
Racine cubique	32
Propriétés des racines	33
Simplifier les racines carrées des nombres carrés	33
■ Probabilité	33
Sé, sélectivité et fréquence	33
Discuter statistique, événement	34
Calculer la probabilité d'un événement	34

Fonctions et algèbre – FA

■ Fonctions	35
Généralités	35
Représentation graphique	35
Définir une fonction	35
Fonction d'un nombre	36
Comme la représentation graphique d'une fonction affine	36
Déterminer à partir d'une droite à partir de la représentation graphique	36
Déterminer l'expression fonctionnelle d'une fonction	37
À partir de la représentation graphique	37
Des caractéristiques de la fonction affine	37
Fonction quadratique	38
Fonction cubique	38
Fonction hyperbolique	38
Fonction trigonométrique	39
■ Propriétés	39
Généralités	39
Reconnaitre un problème de géométrie	39

Pages 200 à 202

[illegible]

Pages 203 à 207

Conventions et notations

Dans cette partie, tu trouves l'ensemble des conventions et notations utilisées dans les ouvrages de *Mathématiques 9-10-11*.

Aide-mémoire

Conventions et notations

195

Conventions et notations

Objet, notion, propriété	Notations, conventions et commentaires
Qui est proche de...	$\approx$
Inférieur à... (plus petit que...)	$<$
Supérieur à... (plus grand que...)	$>$
Inférieur ou égal à...	$\leq$
Supérieur ou égal à...	$\geq$
Couple de nombres	$\{a; b\}$
Ensemble	$\{a; b; \dots\}$
Ensemble vide	$\emptyset = \{\}$
Ensemble de solutions	$S = \{x_1; x_2; \dots\}$
Est élément de... n'est pas élément de... ou Appartient à... n'appartient pas à...	$\in$ $\notin$
Ensembles de nombres	N : ensemble des nombres naturels Z : ensemble des nombres entiers relatifs Q : ensemble des nombres décimaux Q' : ensemble des nombres rationnels R : ensemble des nombres réels
Symboles représentant, numériquement parlant : - ce qu'il y a de plus grand - - ce qu'il y a de plus petit -	$+\infty$ $-\infty$
Valeur absolue d'un nombre x	$ x $
Opposé d'un nombre x	$-x$
Inverse d'un nombre x ($x \neq 0$)	x^{-1} ou $\frac{1}{x}$
Pour cent	%
Pour mille	‰
Fonction	$f: R \rightarrow R$
On trouve aussi les notations :	$x \mapsto y = \mathbf{R}$ $x \mapsto f(x) = \dots$

Conventions et notations

Pages 195 à 197

Conventions et notations

197

propriété	Notations, conventions et commentaires
	deux droites d et d' possédant un seul point d'intersection a
	plusieurs droites d , d' et d'' possédant un seul point d'intersection a
	les droites e et f sont parallèles $a // f$
	sur ce dessin, l'angle droit formé par les droites a et f est noté à l'aide du signe $\perp$, par conséquent il est signalé à l'aide des symboles $\perp$ ou $a \perp b$
appliquées	translation $f \rightarrow f'(T)$ symétrie axiale $f \rightarrow f'(S)$ rotation $f \rightarrow f'(R, O, \alpha)$ $f \rightarrow f'(R, O, -120^\circ)$ symétrie centrale $f \rightarrow f'(S)$ homothétie $f \rightarrow f'(O, k)$
en de transformations	la composition des transformations f et g peut être notée $g \circ f$; on commencera par l'application f , puis la transformation g

et grec

Musécules	En français	Macroniscules	Musécules	En français
α	alpha	N	ν	nu
β	béta	S	ξ	xi
γ	gamma	O	$\omicron$	oméron
δ	déta	II	ι	pi
ϵ	épsilon	P	ρ	rhô
ζ	zéta	E	σ	sigma
η	éta	T	τ	tau
θ	théta	V	υ	upsilon
ι	iota	Φ	φ	phi
κ	kappa	X	χ	chi
λ	lamda	Ψ	ψ	psi
μ	mu	SZ	ω	oméga

Conventions et notations

Repères graphiques

Savoir

Dans ces rubriques, tu trouves notamment, les définitions, les propriétés et les théorèmes relatifs aux notions étudiées. Ils sont accompagnés de remarques, d'exemples et d'illustrations. Chaque rubrique est précédée d'un disque blanc que tu peux cocher ✓ lorsque celle-ci a été abordée.

Savoir-faire

Dans cette partie, tu trouves la description détaillée de *méthodes* liées à la rubrique.

La première colonne décrit les différentes *étapes* à effectuer pour appliquer la méthode ; la deuxième, sur la base d'un exemple donné, illustre concrètement chaque étape.

156 Grandeurs et mesures Aide-mémoire

Unités de mesure

Unités de longueur

Définition

- Dans le système métrique, le **mètre (m)** est l'unité principale de mesure des longueurs.
- On utilise aussi des multiples du mètre : décamètre (dam), hectomètre (hm), kilomètre (km) ainsi que des sous-multiples : décimètre (dm), centimètre (cm), millimètre (mm).

Exemples

- 1 dm = 10 cm = 100 mm
- 1 km = 1000 m ; 100 cm = 1 m ; 0,1 m = 1 dm

Remarque

Il existe d'autres unités de longueur que celles du système métrique.

Exemples

le pouce : 2,54 cm ; le pied : 0,3048 m ; le mille marin : 1852 m ; l'année-lumière : $\sim 10^{13}$ km

→ Puissance de dix (p. 33)

Convertir les unités de longueur

Méthode 1

En utilisant les relations entre les différentes unités.

Exemple Exprimer 1528,9 m en km.

Il y a trois unités pour passer des mètres aux kilomètres (dam, hm, km). On déplace donc la virgule de trois rangs vers la gauche.

Ou 1 km = 1000 m ; on divise donc 1528,9 par 1000.

1 528,9 m = 1,5289 km

Méthode 2

En utilisant un tableau de conversion.

Exemples Exprimer 1528,9 m en km, 12 mm en m et 2,5 hm en m.

1528,9 m en km :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1	5	2	8	9		

1528,9 m = 1,5289 km

Définitions, propriétés, théorèmes

Tu repères ces parties par leur encadré en couleur.

Etymologie

Introduits par le symbole **ÉTYM**, l'étymologie te renseigne sur l'origine de certains mots afin d'en comprendre le sens et de faciliter leur mémorisation.

Renvoi

Introduits par le symbole **→**, les renvois t'indiquent le numéro de page de notions citées dans la rubrique.

Mise en garde

Introduits par le symbole **⚠**, ces commentaires supplémentaires t'informent d'éléments particuliers auxquels il faut être attentif ou te signalent quelques obstacles classiques.

Schéma

Ces illustrations te permettent de visualiser la description d'un objet mathématique.

Espace 117

Cercle inscrit à un triangle et bissectrices

Définition

Le cercle inscrit à un triangle est le cercle tangent aux trois côtés de ce triangle.

Exemple

c est le cercle inscrit au triangle ABC. Les trois côtés du triangle sont tangents à ce cercle.

Propriété

Les bissectrices des angles d'un triangle se coupent en un point. Ce point est le centre du cercle inscrit à ce triangle.

Exemple

O est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

ES

ÉTYM Inscrit : du latin in, à l'intérieur et scribere, écrire.

→ Tangente à un cercle (p. 100), Bissectrice d'un angle (p. 105)

Hauteurs d'un triangle et orthocentre

Définition

Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire aux côtés opposés à ce sommet.

Exemples

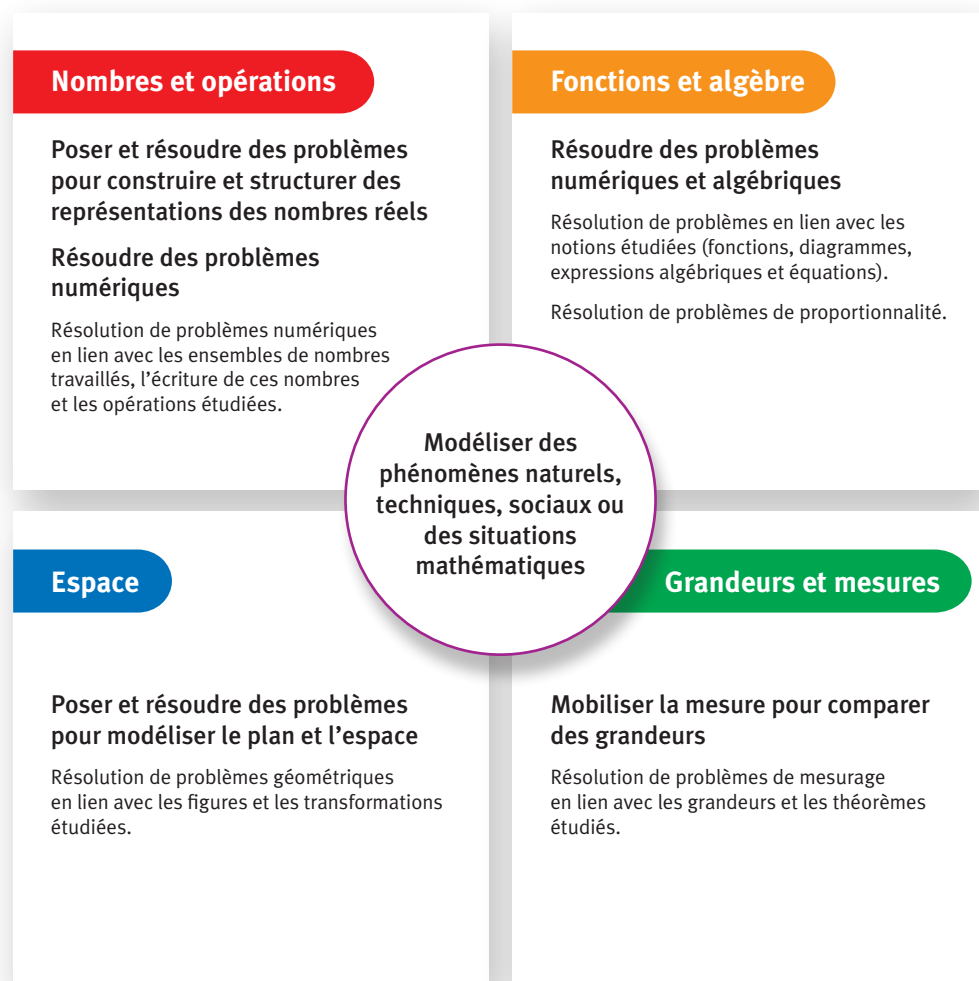
- Les hauteurs peuvent être à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.
- La droite AH est la hauteur issue de A du triangle ABC.
- La droite DH est la hauteur issue de D du triangle DEF.

Extraits du Plan d'études romand

Visées prioritaires MSN

Se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux *Mathématiques* et aux *Sciences de la nature* dans les champs des phénomènes naturels et techniques, du vivant et de l'environnement, ainsi que des nombres et de l'espace.

Mathématiques et sciences de la nature (MSN)



Sommaire

Nombres et opérations

■ Généralités	10
■ Ensemble des nombres naturels	12
■ Ensemble des nombres entiers relatifs	17
■ Ensemble des nombres décimaux	21
■ Ensemble des nombres rationnels	27
■ Ensemble des nombres réels	32
■ Puissances	32
■ Racines	36
■ Probabilités	38

NO

Fonctions et algèbre

■ Fonctions	46
■ Proportionnalité	55
■ Diagrammes	64
■ Calcul littéral	67
■ Equations	76

FA

Espace

■ Figures géométriques planes	90
■ Transformations géométriques	126
■ Géométrie dans l'espace	142

ES

Grandeurs et mesures

■ Unités de mesure	156
■ Périmètre d'une surface	163
■ Aire d'une surface	165
■ Volume d'un solide	169
■ Théorèmes	173

GM

Recherche et stratégies

■ Problèmes et résolutions	182
■ Stratégies de recherche	183
■ Vérification	189
■ Preuve	190

RS

Conventions et notations	195
Table des matières	200
Index	203

Nombres et opérations

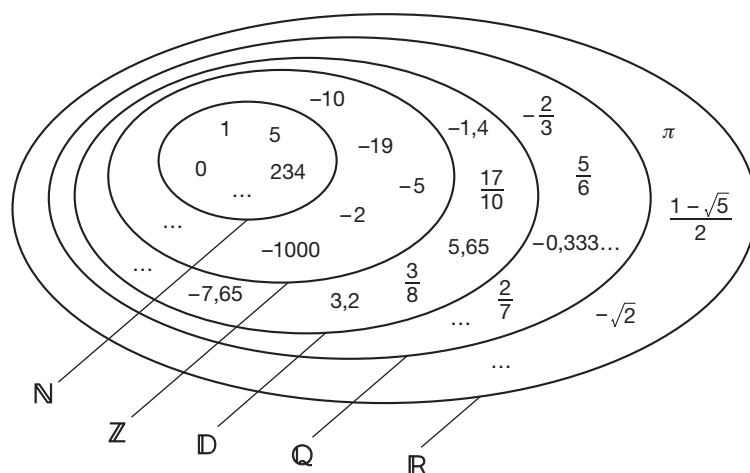
- Généralités
- Ensemble des nombres naturels – $\mathbb{N}$
- Ensemble des nombres entiers relatifs – $\mathbb{Z}$
- Ensemble des nombres décimaux – $\mathbb{D}$
- Ensemble des nombres rationnels – $\mathbb{Q}$
- Ensemble des nombres réels – $\mathbb{R}$
- Puissances
- Racines
- Probabilités

Généralités

Ensembles de nombres

Ensemble de nombres	Notation / Origine	Exemples	Représentation sur une droite
■ Nombres naturels ou entiers naturels ➡ p. 12	$\mathbb{N}$ de l'italien <i>naturale</i>	$0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 10 ; 16 ; \dots$	
■ Nombres entiers relatifs ➡ p. 17	$\mathbb{Z}$ de l'allemand <i>Zahl</i> (nombre)	$\dots ; -13 ; -2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 19 ; \dots$	
■ Nombres décimaux ➡ p. 21	$\mathbb{D}$ du français <i>décimal</i>	$\dots ; -7,65 ; -1,4 ; 0 ; 1 ; \frac{17}{10} ; 3,2 ; 5,65 ; 18,421 ; \dots$	
■ Nombres rationnels ➡ p. 27	$\mathbb{Q}$ de l'italien <i>quotiente</i>	$\dots ; -10 ; -\frac{2}{3} ; -0,2 ; 0 ; 1 ; \frac{5}{6} ; 234 ; \dots$	
■ Nombres réels ➡ p. 32	$\mathbb{R}$ de l'allemand <i>Real</i>	$\dots ; -19 ; -\frac{7}{3} ; -2 ; -\sqrt{2} ; 0 ; 1 ; \pi ; \sqrt{20} ; 20,4 ; \dots$	

Le schéma suivant montre toutes les inclusions entre ces ensembles de nombres.



Chiffres et nombres

Définitions

- Les **chiffres** sont des symboles servant à écrire les nombres dans un système de numération donné.
- Dans notre système de numération décimale, les dix chiffres sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Les **nombres** sont écrits à l'aide d'un ou de plusieurs chiffres.

Remarque

Suivant le contexte, un chiffre peut être aussi un nombre.

Exemple Lorsqu'on dit qu'il y a 5 personnes dans une salle, 5 est un nombre à un chiffre.

ÉTYM Chiffre : de l'arabe *sifr*, zéro.

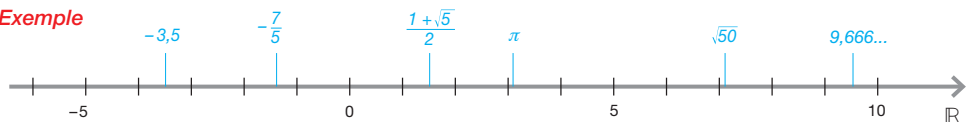
Nombre : du latin *numerus*, nombre, quantité.

Droite numérique

Définition

Une **droite numérique** est une droite possédant un sens (de gauche à droite ou de bas en haut), des graduations régulières et une origine. Chaque point est repéré par un nombre. Chaque nombre réel correspond à un point de cette droite.

Exemple



→ Ensembles de nombres (p. 10), Nombres réels (p. 32)

Ordre croissant et ordre décroissant

Définitions

- Ordonner des nombres en **ordre croissant** signifie qu'on les range du plus petit au plus grand. Pour cela, on utilise le signe $<$ qui signifie « plus petit que ».

Exemple $-1 < \frac{1}{2} < 2 < 5,04 < 12$

- Ordonner des nombres en **ordre décroissant** signifie qu'on les range du plus grand au plus petit. Pour cela, on utilise le signe $>$ qui signifie « plus grand que ».

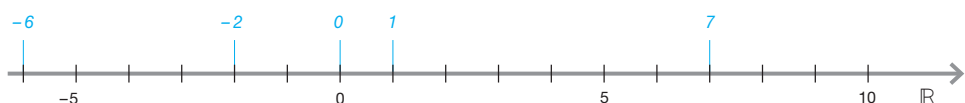
Exemple $127,5 > 8 > 0,0058 > -\frac{3}{4} > -10$

Propriété

Le positionnement des nombres sur la droite numérique permet leur comparaison. Lorsque la droite est horizontale :

- un nombre est plus petit qu'un autre lorsqu'il est à sa gauche ;
- un nombre est plus grand qu'un autre lorsqu'il est à sa droite.

Exemple



Ordre croissant : $-6 < -2 < 0 < 1 < 7$

Estimation d'un résultat

Définition

Estimer le résultat d'un calcul, c'est trouver mentalement une valeur approchée de ce résultat. Pour cela, on remplace chaque nombre du calcul par un autre qui lui est « proche » et qui permette d'effectuer le calcul mentalement.

Exemples

$$9,6 + 125,7 - 19,4 = ? \quad 37,5 \cdot 148,2 = ? \quad 128,7 : 2,8 = ?$$

Estimation :

$$10 + 130 - 20 = 120 \quad 40 \cdot 150 = 6000 \quad 120 : 3 = 40$$

Remarque

Une estimation peut se faire de plusieurs manières et avec un degré de précision variable selon les nombres en jeu et le contexte.



L'estimation d'un résultat doit se calculer mentalement.

Même lorsqu'on effectue un calcul à l'aide d'une calculatrice, il est important d'effectuer une estimation pour vérifier l'ordre de grandeur du résultat obtenu à l'aide de la calculatrice.

Ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$

Nombres naturels

Définitions

- Un **nombre naturel** est un nombre entier supérieur ou égal à 0.
- On utilise la lettre $\mathbb{N}$ pour désigner l'ensemble de tous les nombres naturels.
 $\mathbb{N} = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots \}$

Multiple, diviseur

Définitions

a et b étant deux nombres naturels, on dit que **a est un multiple de b** s'il existe un nombre naturel c tel que $a = b \cdot c$.

On dit aussi que **b est un diviseur de a** ou que **a est divisible par b** .

Exemple

24 est un multiple de 6, car $24 = 6 \cdot 4$.

On dit aussi que 6 est un diviseur de 24 ou que 24 est divisible par 6.

Conséquences

- Tout nombre naturel est un multiple de 1.
- 1 est un diviseur de tous les nombres naturels.
- 0 est un multiple de tous les nombres naturels.

Notation

L'ensemble des multiples d'un nombre n est noté M_n .

L'ensemble des diviseurs d'un nombre n est noté D_n .

Exemple

L'ensemble des multiples de 12: $M_{12} = \{ 0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; \dots \}$.

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \cdot 12 & ; & 1 \cdot 12 & ; & 2 \cdot 12 & ; & 3 \cdot 12 & ; & 4 \cdot 12 \end{array}$$

L'ensemble des diviseurs de 12: $D_{12} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 \}$.

● Critères de divisibilité

Propriétés

- Un nombre naturel est divisible par :
- 2 s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8 (on dit aussi que c'est un nombre pair) ;
 - 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
 - 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (notamment s'il se termine par 00) ;
 - 5 s'il se termine par 0 ou 5 ;
 - 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
 - 10 s'il se termine par 0 ;
 - 25 s'il se termine par 00 ; 25 ; 50 ou 75.

Exemples

1534 est divisible par 2 puisqu'il se termine par 4.
897 est divisible par 3 puisque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
136 est divisible par 4 car 36 est divisible par 4.
10035 est divisible par 5 car il se termine par 5.
81 est divisible par 9 car la somme de ses chiffres est divisible par 9.
2550830 est divisible par 10 car il se termine par 0.
6975 est divisible par 25 puisqu'il se termine par 75.

● Nombre premier

Définition

Un nombre premier est un nombre naturel qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 sont des nombres premiers.

Remarques

- Il y a une infinité de nombres premiers.
- 1 n'est pas un nombre premier, car il n'a qu'un seul diviseur.
- 2 est l'unique nombre pair qui est premier.

Liste des nombres premiers inférieurs à 1000

2	101	211	307	401	503	601	701	809	907
3	103	223	311	409	509	607	709	811	911
5	107	227	313	419	521	613	719	821	919
7	109	229	317	421	523	617	727	823	929
11	113	233	331	431	541	619	733	827	937
13	127	239	337	433	547	631	739	829	941
17	131	241	347	439	557	641	743	839	947
19	137	251	349	443	563	643	751	853	953
23	139	257	353	449	569	647	757	857	967
29	149	263	359	457	571	653	761	859	971
31	151	269	367	461	577	659	769	863	977
37	157	271	373	463	587	661	773	877	983
41	163	277	379	467	593	673	787	881	991
43	167	281	383	479	599	677	797	883	997
47	173	283	389	487		683		887	
53	179	293	397	491		691			
59	181			499					
61	191								
67	193								
71	197								
73	199								
79									
83									
89									
97									

● Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété

Tout nombre naturel se décompose de manière unique en un **produit de facteurs premiers**.

Exemples $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$

$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

→ Ensembles de nombres (p. 10), Nombres naturels (p. 12)

Décomposer un nombre en un produit de facteurs premiers

Méthode 1

De proche en proche.

Exemple Décomposer 72 et 150 en un produit de facteurs premiers.

ÉTAPE 1 Décomposer le nombre en un produit de deux facteurs qui ne sont pas forcément des nombres premiers.	$72 = 8 \cdot 9$ $150 = 15 \cdot 10$
ÉTAPE 2 Décomposer chacun des facteurs en un produit de facteurs.	$72 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$ $150 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$
ÉTAPE 3 S'arrêter lorsque tous les facteurs de la décomposition sont des nombres premiers.	$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
ÉTAPE 4 Recourir (si nécessaire) aux puissances pour écrire le résultat.	$72 = 2^3 \cdot 3^2$ $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Méthode 2

En divisant par des nombres premiers.

Exemple Décomposer 504 en un produit de facteurs premiers.

ÉTAPE 1 Chercher un nombre premier qui est un diviseur du nombre à décomposer. Pour cela tester les premiers nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; ...	$ \begin{array}{r l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} $
ÉTAPE 2 Diviser le nombre à décomposer par ce nombre premier. Puis, recommencer ce travail avec le quotient obtenu.	
ÉTAPE 3 Continuer ainsi jusqu'à obtenir 1 comme quotient.	
ÉTAPE 4 Écrire le produit de tous les nombres premiers utilisés, en recourant éventuellement aux puissances.	$504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

● Multiple commun, ppmc

Définition

Un multiple commun de plusieurs nombres naturels est un multiple de chacun de ces nombres.

Exemple 72 est un multiple commun de 3 ; 9 et 12, car $72 = 3 \cdot 24$; $72 = 9 \cdot 8$; $72 = 12 \cdot 6$.

Propriété

Quels que soient les nombres naturels donnés, ils ont une infinité de multiples communs.

Exemple 72 ; $72 \cdot 2 = 144$; $72 \cdot 3 = 216$; ... sont des multiples communs de 3 ; 9 et 12.

⚠ Le plus grand multiple commun de plusieurs nombres naturels n'existe pas. Par contre, il existe un plus petit multiple commun.

Définition

Le **ppmc** de plusieurs nombres naturels est le **plus petit multiple commun** non nul ($\neq 0$) de ces nombres.

Exemple 36 est le ppmc de 3 ; 9 et 12. On écrit : $\text{ppmc}(3 ; 9 ; 12) = 36$.

➡ Ensembles de nombres (p. 10), Nombres naturels (p. 12), Multiple, diviseur (p. 12)

Calculer le ppmc de plusieurs nombres

Méthode 1

Écrire les premiers multiples des nombres.

Exemple Calculer le ppmc de 10 ; 12 et 15.

ÉTAPE 1	
Écrire les premiers multiples de chacun de ces nombres.	$M_{10} = \{0 ; 10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50 ; \mathbf{60} ; 70 ; 80 ; \dots\}$ $M_{12} = \{0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; \mathbf{60} ; 72 ; \dots\}$ $M_{15} = \{0 ; 15 ; 30 ; 45 ; \mathbf{60} ; 75 ; \dots\}$
ÉTAPE 2	
Identifier le premier multiple commun non nul.	$\text{ppmc}(10 ; 12 ; 15) = 60$

Méthode 2

Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers.

Exemple Calculer le ppmc de 180 et 2625.

ÉTAPE 1 Décomposer les nombres en un produit de facteurs premiers. ➡ p. 14	<table><tr><td>180</td><td>2</td><td>2625</td><td>5</td></tr><tr><td>90</td><td>2</td><td>525</td><td>5</td></tr><tr><td>45</td><td>3</td><td>105</td><td>5</td></tr><tr><td>15</td><td>3</td><td>21</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>7</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td></tr></table> $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$2625 = 3 \cdot 5^3 \cdot 7$	180	2	2625	5	90	2	525	5	45	3	105	5	15	3	21	3	5	5	7	7	1		1	
180	2	2625	5																						
90	2	525	5																						
45	3	105	5																						
15	3	21	3																						
5	5	7	7																						
1		1																							
ÉTAPE 2 Ecrire tous les facteurs premiers qui figurent au moins une fois dans l'une ou l'autre des décompositions avec leur plus grand exposant.	Les facteurs qui figurent au moins une fois dans les deux décompositions sont : 2 ; 3 ; 5 et 7. Pour 2, le plus grand exposant est 2. Pour 3, le plus grand exposant est 2. Pour 5, le plus grand exposant est 3. Pour 7, le plus grand exposant est 1.																								
ÉTAPE 3 Effectuer le produit des nombres obtenus. C'est le ppmc des nombres choisis.	$ppmc(180 ; 2625) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 = 31\,500$																								

Comment choisir parmi ces deux méthodes

On choisit de préférence la première méthode lorsque les premiers multiples sont faciles à calculer et qu'il n'est pas nécessaire d'en calculer beaucoup.

Diviseur commun, pgdc

Définition

Un diviseur commun de plusieurs nombres naturels est un diviseur de chacun de ces nombres.

Exemple 2 est un diviseur commun de 6 ; 24 et 172, car 2 divise chacun de ces trois nombres.

Propriété

Quels que soient les nombres naturels donnés, ils ont au moins un diviseur commun. En effet, 1 est un diviseur de tous les nombres.

Définition

Le **pgdc** de plusieurs nombres naturels est le **plus grand diviseur commun** de ces nombres.

Exemple 5 est le pgdc de 10 ; 15 et 30. On écrit : $\text{pgdc}(10 ; 15 ; 30) = 5$.

→ Ensembles de nombres (p. 10), Nombres naturels (p. 12), Multiple, diviseur (p. 12)

Calculer le pgdc de plusieurs nombres

Méthode 1

Écrire tous les diviseurs de chaque nombre.

Exemple Calculer le pgdc de 30 ; 12 et 18.

ÉTAPE 1 Écrire tous les diviseurs de chacun de ces nombres. → Recherche de tous les diviseurs d'un nombre entier (p. 12).	$D_{30} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30\}$ $D_{12} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$ $D_{18} = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18\}$
ÉTAPE 2 Identifier le plus grand diviseur commun.	$\text{pgdc}(30 ; 12 ; 18) = 6$

Méthode 2

Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers.

Exemple Calculer le pgdc de 9800 et 308.

ÉTAPE 1 Décomposer les nombres en un produit de facteurs premiers.	<table><tr><td>9800</td><td>2</td><td>308</td><td>2</td></tr><tr><td>4900</td><td>2</td><td>154</td><td>2</td></tr><tr><td>2450</td><td>2</td><td>77</td><td>7</td></tr><tr><td>1225</td><td>5</td><td>11</td><td>11</td></tr><tr><td>245</td><td>5</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>49</td><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr></table> $9800 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$308 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11$	9800	2	308	2	4900	2	154	2	2450	2	77	7	1225	5	11	11	245	5	1		49	7			7	7			1			
9800	2	308	2																														
4900	2	154	2																														
2450	2	77	7																														
1225	5	11	11																														
245	5	1																															
49	7																																
7	7																																
1																																	
ÉTAPE 2 Écrire tous les facteurs premiers qui figurent dans les deux décompositions avec leur plus petit exposant.	Les facteurs qui figurent dans les deux décompositions sont : 2 et 7. Pour 2, le plus petit exposant est 2. Pour 7, le plus petit exposant est 1.																																
ÉTAPE 3 Effectuer le produit des nombres obtenus. C'est le pgdc des nombres choisis.	$pgdc(9800 ; 308) = 2^2 \cdot 7 = 28$																																

Comment choisir parmi ces deux méthodes

On choisit de préférence la première méthode lorsque les diviseurs de chacun des nombres sont faciles à calculer.

Ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$

Nombres entiers relatifs

Définitions

- Un nombre entier relatif est un nombre entier muni d'un signe positif s'il est supérieur à zéro ou négatif s'il est inférieur à zéro.
- On utilise la lettre $\mathbb{Z}$ pour désigner l'ensemble de tous les nombres entiers relatifs.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots \}$$

Exemples

(-27) ; 0 ; $(+5)$ sont des nombres entiers relatifs.

(-27) est un nombre négatif et $(+5)$ un nombre positif.

Remarque

0 est à la fois positif et négatif.

Distance à zéro

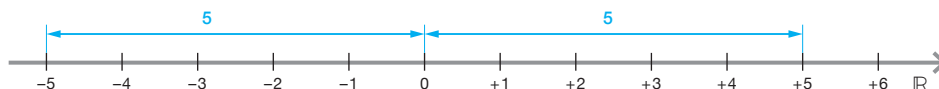
Définition

La distance à zéro d'un nombre a est la distance séparant sur la droite numérique ce nombre a de zéro.

Exemples

La distance à zéro de (-5) est 5.

La distance à zéro de $(+5)$ est 5.



→ Droite numérique (p. 11)

Nombres opposés

Définition

Deux nombres sont opposés si leur somme est égale à zéro. Ils ont donc la même distance à zéro et sont de signes différents.

Exemples

$(+3)$ et (-3) sont deux nombres opposés, car $(+3) + (-3) = 0$.

L'opposé de (-154) est $(+154)$, car $(-154) + (+154) = 0$.



ÉTYM Opposé : du latin *opponere*, « placer en face de ».

→ Distance à zéro (p. 17)

Addition de nombres relatifs

Propriétés

Pour additionner des nombres de même signe :

- on additionne les distances à zéro des nombres ;
- on met devant le résultat le signe commun aux deux nombres.

Exemple

$$(+2) + (+7) = (+9)$$

$$(-2) + (-7) = (-9)$$

Pour additionner des nombres de signes différents :

- on soustrait la plus petite distance à zéro à la plus grande ;
- on met devant le résultat le signe du nombre ayant la plus grande distance à zéro.

Exemple

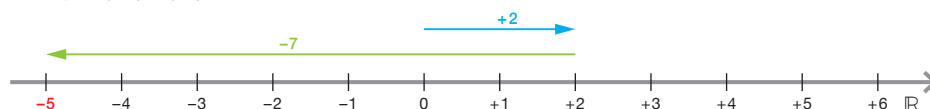
$$(+2) + (-7) = (-5)$$

$$(-2) + (+7) = (+5)$$

Remarques

- On peut visualiser l'addition de nombres relatifs à l'aide de la droite numérique.

Exemple $(+2) + (-7) = -5$



- Les propriétés ci-dessus de l'addition pour les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) sont également valables pour les nombres réels ($\mathbb{R}$).

Exemples

$$(+3,4) + (-6,5) = (-3,1)$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{6}{5}\right)$$

➡ Ensembles de nombres (p. 10), Distance à zéro (p. 17), Nombres réels (p. 32)

Soustraction de nombres relatifs

Propriété

Pour soustraire un nombre, on additionne son opposé.

Exemples

$$(-9) - (-10) = (-9) + (+10) = (+1)$$

$$(+3) - (+4) = (+3) + (-4) = (-1)$$

Remarque

Cette propriété de la soustraction pour les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) est également valable pour les nombres réels ($\mathbb{R}$).

Exemples

$$(+3,4) - (-6,5) = (+3,4) + (+6,5) = (+9,9)$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(+\frac{4}{5}\right) = \left(+\frac{2}{5}\right)$$

➡ Ensembles de nombres (p. 10), Nombres opposés (p. 17), Nombres réels (p. 32)

Ecriture simplifiée d'une somme ou d'une différence de nombres relatifs

Convention d'écriture

Dans une addition de nombres relatifs, on peut supprimer :

- les signes d'addition ;
- les parenthèses autour de chaque nombre ;
- le signe d'un nombre positif écrit en début de calcul.

Exemples

$$(+6) + (-7) + (-12) = 6 - 7 - 12 = -13$$

$$(-5) + (+4) + (+8) = -5 + 4 + 8 = 7$$

Remarques

- Simplifier l'écriture permet de calculer plus facilement des sommes et des différences de nombres relatifs.
- Les conventions d'écriture ci-dessus sont également valables pour les nombres réels ($\mathbb{R}$).

 S'il y a des soustractions de nombres relatifs dans l'opération proposée, on les transformera en addition de l'opposé avant de simplifier l'écriture.

Exemples

$$(+5) - (+9) + (-12) = (+5) + (-9) + (-12) = 5 - 9 - 12 = -16$$

$$(-3) + (+4) - (-8) = (-3) + (+4) + (+8) = -3 + 4 + 8 = 9$$

➡ Ensembles de nombres (p. 10), Nombres opposés (p. 17), Nombres réels (p. 32)

Effectuer un calcul comportant des sommes et des différences de nombres relatifs

Méthode

Exemple $(-25) + (-10) - (-5) - (+14) + (+68) = ?$

ÉTAPE 1 Transformer les soustractions en additions de l'opposé (propriété de la soustraction de nombres relatifs).	$(-25) + (-10) - (-5) - (+14) + (+68) =$ $(-25) + (-10) + (+5) + (-14) + (+68) =$
ÉTAPE 2 Supprimer les signes d'addition et les parenthèses en appliquant la convention d'écriture.	$-25 - 10 + 5 - 14 + 68 =$
ÉTAPE 3 Regrouper les nombres qui sont précédés du même signe, puis effectuer les calculs.	$\begin{array}{r} 5 + 68 - 25 - 10 - 14 = \\ \hline 73 \quad - \quad 49 \quad = \quad 24 \end{array}$

Remarques

- On peut aussi faire les calculs de gauche à droite une fois l'écriture simplifiée sans passer par le regroupement.
- Cette méthode est également valable pour les nombres réels.

Multiplication de nombres relatifs

Propriété 1

Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie leurs distances à zéro et on donne au produit :

- le signe + si les deux nombres sont de même signe ;
- le signe – si les deux nombres sont de signes différents.

Exemples

$$(+2) \cdot (+4) = (+8) = 8$$

$$(-2) \cdot (-4) = (+8) = 8$$

$$(+2) \cdot (-4) = (-8) = -8$$

$$(-2) \cdot (+4) = (-8) = -8$$

Propriété 2

Quand on multiplie plusieurs nombres relatifs différents de zéro :

- si le nombre de facteurs négatifs est pair, le produit est positif ;
- si le nombre de facteurs négatifs est impair, le produit est négatif.

Exemples

Le produit $(-5) \cdot (+4) \cdot (+2) \cdot (-4) \cdot (-3)$ est négatif, car il y a trois facteurs négatifs.

Le produit $(+2) \cdot (-3) \cdot (-7) \cdot (-8) \cdot (-5)$ est positif, car il y a quatre facteurs négatifs.

Remarques

- Pour effectuer le produit de plusieurs nombres relatifs, on peut d'abord déterminer le signe du produit à l'aide de la propriété 2, puis calculer le produit des nombres sans leur signe.

Exemple

$$(-4) \cdot (-2) \cdot (+3) \cdot (-5) = (-120)$$

Il y a trois facteurs
négatifs donc le
produit est négatif

$$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

- Les propriétés de la multiplication pour les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) sont également valables pour les nombres réels ($\mathbb{R}$).

➡ Ensembles de nombres (p. 10), Distance à zéro (p. 17), Nombres réels (p. 32)

Division de nombres relatifs

Propriété

Pour diviser deux nombres relatifs, on divise leurs distances à zéro.

On donne alors au quotient :

- le signe + si les deux nombres sont de même signe ;
- le signe – si les deux nombres sont de signes différents.

Exemples

$$(+32) : (+8) = (+4) = 4$$

$$(-32) : (-8) = (+4) = 4$$

$$(+32) : (-8) = (-4) = -4$$

$$(-32) : (+8) = (-4) = -4$$

Remarque

Les propriétés de la division pour les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) sont également valables pour les nombres réels ($\mathbb{R}$).

➡ Distance à zéro (p. 17)

Ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

Nombres décimaux

Définitions

- Un **nombre décimal** est le quotient d'un nombre entier relatif par une puissance de dix.
- Son **écriture décimale** possède un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule.
- On utilise la lettre $\mathbb{D}$ pour désigner l'ensemble de tous les nombres décimaux.

Exemples

$\frac{7}{10} = 0,7$; $1,125 = \frac{1125}{1000}$; $8,43 = \frac{843}{100}$; $-\frac{5}{2} = -\frac{25}{10} = -2,5$ sont des nombres décimaux.

$\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$; $\frac{2}{7} = 0,285714$; $\pi = 3,14159 \dots$; $-\frac{2}{7}$ ne sont pas des nombres décimaux.

Définitions

- Les **décimales** sont les chiffres figurant après la virgule.
- La **numération** décimale est la numération en base dix.

Exemple



$$4272,512 = 4000 + 200 + 70 + 2 + 0,5 + 0,01 + 0,002$$

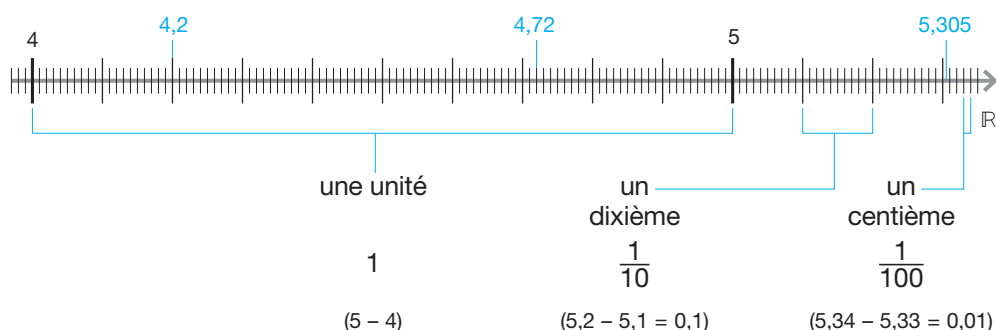
⚠ 04,50 = 4,50 = 4,5

Les zéros placés à gauche de la partie entière et ceux placés à la fin de la partie décimale ne changent pas la valeur du nombre. Ils ne sont généralement pas notés.

ÉTYM Décimal : du latin *decimus*, dixième.

➡ Ensembles de nombres (p. 10), Nombres entiers relatifs (p. 17), Puissance de dix (p. 33)

Représentation de nombres décimaux sur une droite graduée



● Approximation d'un nombre décimal

Définition

Donner une **approximation** ou une **valeur approchée** d'un nombre décimal, c'est trouver une valeur proche de ce nombre à une précision choisie. Cette valeur approchée peut, par exemple, être un **arrondi** ou une **troncature**.

NO

Arrondi

Définition

L'arrondi d'un nombre est la valeur approchée la plus proche possible de ce nombre, étant donné la précision choisie.

On arrondit :

- vers le haut (par excès) lorsque le chiffre suivant la précision demandée est supérieur ou égal à 5 (5 à 9) ;
- vers le bas (par défaut) lorsque le chiffre suivant la précision demandée est inférieur à 5 (0 à 4).

Exemples

3,168 arrondi au centième donne 3,17.

3,163 arrondi au centième donne 3,16.

3,165 arrondi au centième donne, par convention, 3,17.

Troncature

Définition

La troncature d'un nombre est la valeur approchée inférieure à ce nombre, étant donné la précision choisie. Tronquer signifie « couper ». Tronquer l'écriture d'un nombre, c'est la couper avec la précision choisie.

Exemples

Nombre	Précision choisie	Valeur approchée	
		arrondi	troncature
0,468	... au centième	0,47	0,46
1,841	... au dixième	1,8	1,8
12,35	... au dixième	12,4	12,3
5,8	... à l'unité	6	5
125	... à la dizaine	130	120

Remarque

Le choix de la précision d'une approximation dépend du contexte de la situation et de la taille des nombres.

Exemple La distance parcourue par un piéton arrondie au millimètre près n'a pas vraiment de sens.

● Addition

Définitions

- L'**addition** est l'opération qui associe, à deux nombres a et b , un troisième noté $a + b$.
- Le résultat d'une **addition** s'appelle une **somme** et les nombres que l'on additionne des **termes**.

Exemple

$$14,8 + 6,4 = 21,2$$

termes
somme

Additionner des nombres décimaux positifs en colonnes

Méthode

Exemple $255,45 + 33,9 + 7,2 = ?$

ÉTAPE 1	Tout d'abord, calculer une approximation du résultat, ce qui permettra de vérifier que la réponse finale est plausible.	$255,45 + 33,9 + 7,2 \approx ?$ $260 + 30 + 10 = 300$																																			
ÉTAPE 2	Ecrire les termes de la somme en alignant les unités.	<table><tr><td>...</td><td>centaines</td><td>dizaines</td><td>unités</td><td>dixièmes</td><td>centièmes</td><td>...</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td>5</td><td>5,</td><td>4</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>+</td><td></td><td>3</td><td>3,</td><td>9</td><td></td><td></td></tr><tr><td>+</td><td></td><td></td><td>7,</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>2</td><td>9</td><td>6,</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr></table>	...	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	...		2	5	5,	4	5		+		3	3,	9			+			7,	2				2	9	6,	5	5	
...	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	...																															
	2	5	5,	4	5																																
+		3	3,	9																																	
+			7,	2																																	
	2	9	6,	5	5																																
ÉTAPE 3	Effectuer l'addition en colonne en commençant par la droite. S'il y a des retenues, les noter au haut de la colonne précédente.																																				
ÉTAPE 4	Vérifier que la somme corresponde à l'approximation.	$296,55 \approx 300$																																			

NO

Soustraction

Définitions

- La **soustraction** est l'opération qui associe, à deux nombres a et b , un troisième noté $a - b$.
- Le résultat d'une **soustraction** s'appelle une **différence** et les nombres que l'on soustrait des **termes**.

Exemple

$$43 - 21,2 = 21,8$$

termes différence

Soustraire des nombres décimaux positifs en colonnes

Méthode

Exemple $528,94 - 40,8 = ?$

ÉTAPE 1	Tout d'abord, calculer une approximation du résultat, ce qui permettra de vérifier que la réponse finale est plausible.	$528,94 - 40,8 \cong ?$ $530 - 40 = 490$																												
ÉTAPE 2	Ecrire les termes de la différence en alignant les unités.	<table><tr><td>...</td><td>centaines</td><td>dizaines</td><td>unités</td><td>dixièmes</td><td>centièmes</td><td>...</td></tr><tr><td></td><td>⁴5</td><td>¹²2</td><td>8,</td><td>9</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>-</td><td></td><td>4</td><td>0,</td><td>8</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>4</td><td>8</td><td>8,</td><td>1</td><td>4</td><td></td></tr></table>	...	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	...		⁴ 5	¹² 2	8,	9	4		-		4	0,	8				4	8	8,	1	4	
...	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	...																								
	⁴ 5	¹² 2	8,	9	4																									
-		4	0,	8																										
	4	8	8,	1	4																									
ÉTAPE 3	Effectuer la soustraction en colonne en commençant par la droite. S'il y a des emprunts, les noter comme dans l'exemple ci-contre.																													
ÉTAPE 4	Vérifier que la différence corresponde à l'approximation.	$488,14 \cong 490$																												

Multiplication

Définitions

- La **multiplication** est l'opération qui associe, à deux nombres a et b , un troisième noté $a \cdot b$.
- Le résultat d'une **multiplication** s'appelle un **produit** et les nombres que l'on multiplie des **facteurs**.

Exemple

$$8,2 \cdot 5 = 41$$

facteurs produit

Remarque

Pour éviter la confusion entre le symbole « $\times$ » de la multiplication et la lettre « x » utilisée en algèbre, on utilise le symbole « $\cdot$ » pour indiquer la multiplication.

Multiplier des nombres décimaux positifs en colonnes

Méthode

Exemple $15,82 \cdot 5,3 = ?$

ÉTAPE 1 Tout d'abord, calculer une approximation du résultat, ce qui permettra de vérifier que la réponse finale est plausible.	$15,82 \cdot 5,3 \approx ?$ $16 \cdot 5 = 80$
ÉTAPE 2 Effectuer la multiplication en colonnes sans tenir compte des virgules.	$ \begin{array}{r} \begin{array}{c} 2 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 8 \quad 2 \end{array} \\ \cdot \quad \begin{array}{c} 5 \quad 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 4 \quad 7 \quad 4 \quad 6 \\ + 7 \quad 9 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 8 \quad 3 \quad 8 \quad 4 \quad 6 \end{array} \end{array} $
ÉTAPE 3 Additionner le nombre de décimales présentes dans chaque facteur et placer la virgule en conséquence dans le produit.	
ÉTAPE 4 Vérifier que le produit corresponde à l'approximation.	
	$83,846 \approx 80$

Division

Définitions

- La **division** est l'opération qui, à deux nombres a et b ($b \neq 0$), associe un troisième c tel que $a = b \cdot c$. On note ce nombre $a : b$. Il est appelé quotient de a par b .
- Le résultat d'une **division** s'appelle le **quotient**, le nombre a se nomme le **dividende** et le nombre b le **diviseur**.

Exemple

$$278 : 4 = 69,5 \quad \text{car} \quad 69,5 \cdot 4 = 278$$

dividende diviseur quotient

Propriété

Le quotient ne change pas si on multiplie le dividende et le diviseur de la division par un même nombre non nul.

Exemple

$$35,2 : 6,4 = 352 : 64$$

$$5,5 = 5,5$$

Diviser un nombre décimal positif par un nombre décimal positif

Méthode

Exemple $195,04 : 5,3 = ?$

ÉTAPE 1 Tout d'abord, calculer une approximation du résultat, ce qui permettra de vérifier que la réponse finale est plausible.	$195,04 : 5,3 \approx ?$ $200 : 5 = 40$
ÉTAPE 2 Multiplier le diviseur par 10, 100, 1000, ... de manière que le diviseur soit un nombre naturel. Multiplier le dividende par le même nombre pour ne pas changer le quotient. ➡ Division (p. 24)	$195,04 : 5,3 = 1950,4 : 53$
ÉTAPE 3 Effectuer la division jusqu'à la virgule. Mettre alors cette dernière après le dernier chiffre du quotient et continuer la division.	1950,4 53 36,8
ÉTAPE 4 Continuer la division jusqu'à ce que le reste soit nul ou lorsque le niveau de précision demandé soit atteint.	
ÉTAPE 5 Vérifier que le quotient corresponde à l'approximation.	$36,8 \approx 40$

NO

Propriétés de l'addition et de la multiplication

Addition

Propriété 1

Lorsqu'on effectue une addition de deux termes, on peut l'effectuer dans l'ordre que l'on veut.

L'addition est commutative :

$a + b = b + a.$

Exemple $40 + 146 = 146 + 40$

Propriété 2

Lorsqu'on effectue une addition de plusieurs termes, on peut grouper ces termes comme on le veut.

L'addition est associative :

$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$

Exemple $41,3 + 15,9 + 4,1 = 41,3 + (15,9 + 4,1) = 41,3 + 20$

Propriété 3

Dans une suite d'additions, on peut effectuer les calculs dans l'ordre que l'on veut en utilisant la commutativité et l'associativité.

Cette propriété permet dans certains cas de simplifier les calculs.

Exemple $137 + 89 + 63 = (137 + 63) + 89 = 200 + 89 = 289$

Multiplication

Lorsqu'on effectue une multiplication de deux facteurs, on peut l'effectuer dans l'ordre que l'on veut.

La multiplication est commutative :

$a \cdot b = b \cdot a.$

Exemple $10 \cdot 5 = 5 \cdot 10$

Lorsqu'on effectue une multiplication de plusieurs facteurs, on peut grouper les facteurs comme on le veut.

La multiplication est associative :

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$

Exemple $12 \cdot 25 \cdot 4 = 12 \cdot (25 \cdot 4) = 12 \cdot 100$

Dans une suite de multiplications, on peut effectuer les calculs dans l'ordre que l'on veut en utilisant la commutativité et l'associativité.

Cette propriété permet dans certains cas de simplifier les calculs.

Exemple $25 \cdot 91 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 91 = 100 \cdot 91 = 9100$

Propriété 4

Lorsqu'on additionne 0 à un nombre, on obtient ce nombre.

0 est l'élément neutre pour l'addition : $a + 0 = a$.

Exemple $128,09 + 0 = 128,09$

Lorsqu'on multiplie un nombre par 1, on obtient ce nombre.

1 est l'élément neutre pour la multiplication : $a \cdot 1 = a$.

Exemple $4235,2 \cdot 1 = 4235,2$

Lorsqu'on multiplie un nombre par 0, on obtient 0.

0 est l'élément absorbant pour la multiplication : $a \cdot 0 = 0$.

Exemple $78,206 \cdot 0 = 0$

Propriété 5

Lorsqu'on multiplie une somme ou une différence par un nombre, on peut multiplier chaque terme de cette somme ou différence par ce nombre.

La multiplication est distributive sur l'addition et la soustraction : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ et $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Exemples

$$12 \cdot (100 + 1) = 12 \cdot 100 + 12 \cdot 1 = 1200 + 12 = 1212$$

$$34 \cdot (10 - 1) = 34 \cdot 10 - 34 \cdot 1 = 340 - 34 = 306$$

⚠ La soustraction et la division ne sont ni associatives ni commutatives.

Exemples

$$\begin{array}{l} (45 - 25) - 10 \neq 45 - (25 - 10) \\ \begin{array}{ccc} 20 & - & 10 \\ \hline 10 \end{array} & \neq & \begin{array}{ccc} 45 & - & 15 \\ \hline 30 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (100 : 50) : 2 \neq 100 : (50 : 2) \\ \begin{array}{ccc} 2 & : & 2 \\ \hline 1 \end{array} & \neq & \begin{array}{ccc} 100 & : & 25 \\ \hline 4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 40 - 60 \neq 60 - 40 \\ \begin{array}{ccc} -20 & & \\ \hline -20 \end{array} & \neq & \begin{array}{ccc} 20 & & \\ \hline 20 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 20 : 4 \neq 4 : 20 \\ \begin{array}{ccc} 5 & & \\ \hline 5 \end{array} & \neq & \begin{array}{ccc} 0,2 & & \\ \hline 0,2 \end{array} \end{array}$$

⚠ En mathématiques, la division par 0 est impossible, car elle n'a pas de sens.

Priorités des opérations

Convention

Dans une série d'opérations, on effectue d'abord les opérations entre parenthèses.

Dans les parenthèses ou lorsqu'il n'y plus de parenthèses, on effectue :

- d'abord les puissances et les racines ;
- ensuite les multiplications et les divisions de gauche à droite ;
- enfin les additions et les soustractions.

Exemples

$$12 \cdot (5 + 2) = 12 \cdot 7 = 84$$

$$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

$$4 + 2 \cdot 3 = 4 + 6 = 10$$

$$12 - 5 + 7 = 7 + 7 = 14$$

$$6 : 3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$$

Effectuer un calcul avec ou sans parenthèses

Méthode

Exemple $7 + 3 \cdot (4^2 + 20 : 4)$

ÉTAPE 1 Repérer s'il y a des parenthèses. Si oui, effectuer les calculs prioritaires à l'intérieur.	$7 + 3 \cdot (4^2 + 20 : 4)$ $= 7 + 3 \cdot (16 + 5)$
ÉTAPE 2 Terminer le calcul entre parenthèses et écrire le résultat en enlevant les parenthèses.	$= 7 + 3 \cdot 21$
ÉTAPE 3 Effectuer l'opération prioritaire et écrire le résultat.	$= 7 + 63$
ÉTAPE 4 Achever le calcul en effectuant les opérations de gauche à droite.	$= 70$

NO

Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Nombres rationnels

Définitions

- Un **nombre rationnel** est le quotient de deux nombres entiers relatifs a et b ($b \neq 0$). Il peut s'écrire sous la forme d'une **fraction** $\frac{a}{b}$, où a est le **numérateur** et b le **dénominateur**. Son écriture décimale est finie ou périodique.
- On utilise la lettre $\mathbb{Q}$ pour désigner l'ensemble de tous les nombres rationnels.

$\frac{3}{4}$ — NUMÉRATEUR (ou dividende)
— barre de fraction
— DÉNOMINATEUR (ou diviseur)

Exemples
 -2 ; $-\frac{7}{5}$; 0 ; $\frac{1}{4}$; $0,5$; $\frac{2}{3}$; $8,4\overline{5}$; ... sont des nombres rationnels.
Par contre : π ; $\sqrt{2}$; ... ne sont pas des nombres rationnels.

Remarques

- Les nombres décimaux sont inclus dans les nombres rationnels.
La réciproque n'est pas vraie.
- Il faut faire la différence entre une fraction et une écriture fractionnaire.
Une fraction est le rapport de deux nombres entiers relatifs écrit sous forme fractionnaire ($\frac{a}{b}$ avec a et b appartenant à $\mathbb{Z}$).
Une écriture fractionnaire est le rapport de deux nombres quelconques écrit sous forme fractionnaire ($\frac{a}{b}$ quels que soient a et b).

Exemples
 $\frac{3}{5}$; $-\frac{7}{3}$ sont des fractions.
 $\frac{2,4}{5}$; $\frac{-3}{-5,15}$; $\frac{3}{5}$; $-\frac{7}{3}$ sont des écritures fractionnaires.

➡ Ensembles de nombres (p. 10), Nombres entiers relatifs (p. 17), Nombres décimaux (p. 21)

Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale

Méthode En divisant le numérateur par le dénominateur.

Exemple $\frac{7}{8} = ?$ et $\frac{13}{11} = ?$

ÉTAPE 1

Effectuer la division.

$$\frac{7}{8} = 7 : 8 = 0,875$$

$$\frac{13}{11} = 1,1818\dots$$

ÉTAPE 2

Vérifier que la division se termine ou que l'on retrouve un reste déjà rencontré.

$\begin{array}{r} 7 \overline{) 8} \\ 70 \overline{) 0,875} \\ \underline{-64} \\ 60 \\ \underline{-56} \\ 40 \\ \underline{-40} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 13 \overline{) 11} \\ -11 \\ \underline{} 20 \\ -11 \\ \underline{} 90 \\ -88 \\ \underline{} 2 \end{array}$
---	---

Remarque

Pour certaines fractions, il est possible, par amplification ou par simplification, d'obtenir une fraction égale dont le dénominateur est une puissance de 10.

Exemple

$$\frac{3}{5} = ?$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

Passer d'une écriture décimale finie à une écriture fractionnaire

Méthode

Exemple $3,15 = ?$

ÉTAPE 1

Écrire le nombre sous forme de fraction (par amplification).

$$3,15 = \frac{3,15}{1} = \frac{315}{100}$$

ÉTAPE 2

Rechercher la fraction irréductible (par simplification).

$$\frac{315}{100} = \frac{315 : 5}{100 : 5} = \frac{63}{20}$$
$$3,15 = \frac{63}{20}$$

Remarque

Pour mettre un nombre entier sous forme de fraction, il suffit de mettre 1 comme dénominateur. On peut ensuite amplifier cette fraction pour obtenir un autre nombre comme dénominateur.

Exemples

$$4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{20}{5} = \dots$$

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{12}{12} = \dots$$

● Amplification et simplification de fractions

Propriété

Si on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre entier non nul, on obtient une fraction égale à la première.

On dit qu'on a **amplifié** la fraction par le nombre en question.

Quels que soient les nombres a , b et k ($b \neq 0$ et $k \neq 0$), on a : $\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$.

Exemples

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{15}{100}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{12}{27}$$

Propriété

Si on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un diviseur commun au numérateur et dénominateur, on obtient une fraction égale à la première. On dit qu'on a **simplifié** la fraction par le diviseur commun.

Quels que soient les nombres a , b et k diviseur commun de a et b ($b \neq 0$), on a : $\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$.

Exemples

$$\frac{84}{70} = \frac{12}{10}$$

$$\frac{48}{36} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

Remarque

Une **fraction irréductible** est une fraction qu'on ne peut plus simplifier.

Exemples

$\frac{1}{4}$; $\frac{11}{5}$; $-\frac{3}{7}$ sont des fractions irréductibles.

Par contre, les fractions $\frac{12}{4}$; $\frac{11}{555}$; $-\frac{30}{70}$ ne sont pas irréductibles.

Addition et soustraction de fractions

Propriété

Pour calculer la somme ou la différence de deux fractions ayant le même dénominateur, on additionne les numérateurs et on garde le **dénominateur commun**.

Quels que soient les nombres entiers a , b et c ($c \neq 0$),

$$\text{on a : } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Exemples

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3} \qquad \frac{7}{5} - \frac{4}{5} = \frac{7-4}{5} = \frac{3}{5}$$

Remarque

Si les deux fractions à additionner n'ont pas le même dénominateur, il faut les remplacer par deux fractions égales qui ont le même dénominateur.

Exemple

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$$

Additionner et soustraire des fractions

Méthode

Exemple 1 $\frac{5}{6} + \frac{2}{6} = ?$

ÉTAPE 1	
Ces fractions ont-elles le même dénominateur?	Oui
ÉTAPE 2	
Appliquer la propriété énoncée précédemment : additionner les numérateurs et garder le dénominateur commun.	$\frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5+2}{6} = \frac{7}{6}$

Exemple 2 $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = ?$

ÉTAPE 1	
Ces fractions ont-elles le même dénominateur?	Non
ÉTAPE 2	
Chercher un dénominateur commun. Pour cela, calculer par exemple le produit des deux dénominateurs ou chercher le ppmc de ces deux nombres.	$\text{ppmc}(4; 6) = 12$
ÉTAPE 3	
Amplifier chaque fraction afin d'obtenir le dénominateur commun qu'on vient de trouver.	$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12}$
ÉTAPE 4	
Appliquer la propriété énoncée précédemment : soustraire les numérateurs et garder le dénominateur commun.	$\frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$

Remarque

Il est généralement souhaitable de donner la réponse finale sous forme de fraction irréductible.

Multiplication de fractions

Propriété

Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Quels que soient les nombres entiers a , b , c et d ($b \neq 0$ et $d \neq 0$),

$$\text{on a : } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Exemples

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35} \quad \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot 3 = \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \frac{3}{1} = -\frac{15}{7}$$

Remarque

Il peut être très utile de simplifier les fractions avant d'effectuer les produits.

Exemple

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{12}{14} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}} \cdot \overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{2}{\cancel{9}} \cdot \underset{7}{\cancel{14}}} = \frac{1 \cdot \overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot 2} = \frac{1 \cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{3 \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

Calculer la fraction d'un nombre

En revenant au sens de la fraction.

Exemple

Pour calculer les $\frac{2}{5}$ de 15,

- on cherche la valeur de $\frac{1}{5}$ de 15 $\rightarrow 15 : 5 = 3$;
- on multiplie le résultat par 2 $\rightarrow 3 \cdot 2 = 6$.

En utilisant la propriété «calculer $\frac{a}{b}$ de c , c'est calculer $\frac{a}{b} \cdot c$ ».

Exemple

Pour calculer les $\frac{3}{4}$ des $\frac{7}{5}$, on fait : $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$.

Nombres inverses

Définition

Deux nombres non nuls sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Exemples

- $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ sont inverses l'un de l'autre, car $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$.
- 4 et $\frac{1}{4}$ sont inverses l'un de l'autre, car $4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 1}{4} = 1$.
- $-\frac{1}{5}$ est l'inverse de (-5) , car $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-5) = \frac{(-1) \cdot (-5)}{5} = 1$.

Division de fractions

Propriété

Pour diviser deux fractions, on multiplie la première par l'inverse de la seconde. Quels que soient les nombres entiers a , b , c et d ($b \neq 0$; $c \neq 0$ et $d \neq 0$),

$$\text{on a : } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}.$$

Exemples

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21} \quad \frac{9}{14} : \frac{3}{7} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{14}}} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{3}{2} \quad -\frac{8}{5} : 4 = -\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}} = -\frac{2}{5}$$

Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Nombres réels

Définitions

- Un **nombre réel** est un nombre dont l'écriture décimale est formée d'une partie entière et d'une partie décimale finie ou infinie.
- On utilise la lettre $\mathbb{R}$ pour désigner l'ensemble de tous les nombres réels.

Exemples 2,57 ; -9 ; 3,14159... ; 0,123456789101112... ; $\frac{2}{5} = 0,4$; 0 ; 5 ; ...

Conséquences

- Les nombres naturels, relatifs, décimaux et rationnels sont des nombres réels.
- Les nombres qui ont une écriture décimale infinie non périodique sont appelés nombres irrationnels. Ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction. Les nombres irrationnels sont des nombres réels.

Exemples $\sqrt{2} = 1,41421356...$; $\pi = 3,14159265...$; 1,110 100 100 10000...

- Les nombres réels permettent de repérer n'importe quel point sur une droite graduée.

Puissances

Puissance d'exposant positif

Définition

La **puissance** d'un nombre est le résultat de la multiplication répétée de ce nombre avec lui-même.

Notation

Soient n un nombre naturel ($n \neq 0$) et a un nombre réel, alors :

$$\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{a^n}_{\substack{\text{base} \\ \text{exposant}}}$$

a^n se lit « a exposant n » ou « a puissance n ». C'est une puissance de a . a s'appelle la base et n l'exposant.

Exemple $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$

Remarques

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)
- a^2 se lit généralement « a au carré» et a^3 « a au cube».
- Le carré d'un nombre entier est aussi appelé carré parfait.

Exemples 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; ... sont des carrés parfaits.

Puissance d'exposant négatif

Définition

Soient n un nombre naturel et a un nombre réel différent de 0.
Le nombre a^{-n} désigne l'inverse du nombre a^n .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemples

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001 \qquad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Puissance de dix

Définition

Soit n un nombre naturel.
On appelle puissance de dix le nombre noté 10^n ou 10^{-n} .

Propriété 1

Quel que soit l'entier positif n :

$$10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_{(n \text{ fois})} = \underbrace{1\,000 \dots 0}_{(\text{un } 1 \text{ suivi de } n \text{ zéros})}$$

Exemple $10^6 = 1\,000\,000$ (un 1 suivi de 6 zéros)

Propriété 2

Quel que soit l'entier positif n :

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1\,000 \dots 0} = \underbrace{0,000 \dots 1}_{(n \text{ chiffres après la virgule})}$$

Exemple $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0,0001$ (4 chiffres après la virgule)

Notation

Puissance	Ecriture décimale	Nom	Préfixe	Symbole
...				
10^{12}	1 000 000 000 000	billion	téra	T
10^9	1 000 000 000	milliard	giga	G
10^6	1 000 000	million	méga	M
10^3	1 000	mille	kilo	k
10^2	100	cent	hecto	h
10^1	10	dix	déca	da
10^0	1	un		
10^{-1}	0,1	dixième	déci	d
10^{-2}	0,01	centième	centi	c
10^{-3}	0,001	millième	milli	m
10^{-6}	0,000 001	millionième	micro	μ
10^{-9}	0,000 000 001	milliardième	nano	n
10^{-12}	0,000 000 000 001	billionième	pico	p
...				

Exemples

$1 \text{ GW} = 10^9 \text{ W}$
 $1 \text{ Mo} = 10^6 \text{ o}$

$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$
 $1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$

$1 \text{ mg} = 0,001 \text{ g}$
 $1 \mu\text{s} = 10^{-6} \text{ s}$

Propriétés des puissances

Soit m et n deux nombres entiers et a et b deux nombres réels ($b \neq 0$).

Propriété 1 Produit de puissances de même base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Exemple $9^2 \cdot 9^3 = 9^{2+3} = 9^5$

Propriété 2 Quotient de puissances de même base $a^m : a^n = a^{m-n}$

Exemple $6^5 : 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$

Propriété 3 Puissance d'une puissance $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemple $(10^2)^3 = 10^{2 \cdot 3} = 10^6$

Propriété 4 Puissance d'un produit $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Exemple $(10 \cdot 4)^2 = 10^2 \cdot 4^2$

Propriété 5 Puissance d'un quotient $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemple $\left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{7^3}{4^3}$

⚠ La puissance est une opération étroitement liée à la multiplication.

Les règles de calculs ci-dessus ne fonctionnent pas pour l'addition et la soustraction :

$$a^m + a^n \neq a^{m+n} \quad \text{et} \quad a^m - a^n \neq a^{m-n}$$

Exemples

$$\begin{array}{r} 5^2 \cdot 4^2 = (5 \cdot 4)^2 \\ 25 \cdot 16 = 20^2 \\ 400 = 400 \end{array}$$

par contre

$$\begin{array}{r} 5^2 + 4^2 \neq (5+4)^2 \\ 25 + 16 \neq 9^2 \\ 41 \neq 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10^3 \cdot 10^1 = 10^{3+1} = 10^4 \\ 1000 \cdot 10 = 10000 \end{array}$$

par contre

$$\begin{array}{r} 10^3 + 10^1 \neq 10^{3+1} = 10^4 \\ 1000 + 10 \neq 10000 \end{array}$$

Remarque Ces propriétés peuvent aisément être retrouvées en revenant à la définition de la puissance.

Exemples

$$2^4 \cdot 2^3 = 2^7$$

$$\begin{array}{c} \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ facteurs}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{7 \text{ facteurs}} \end{array}$$

● Notation scientifique

Définition

Un nombre décimal positif est écrit en **notation scientifique** s'il est écrit sous la forme $a \cdot 10^n$ où :

- a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ (c'est-à-dire ayant un seul chiffre non nul devant la virgule) ;
- n est un nombre entier relatif.

NO

Exemples

Les nombres suivants sont écrits en notation scientifique :

$1,25 \cdot 10^5$ $4 \cdot 10^{-3}$ $8,561 \cdot 10^2$ $7,2 \cdot 10^{-4}$

Par contre : $0,253 \cdot 10^5$ ou $42,1 \cdot 10^{-3}$ ne sont pas écrits en notation scientifique.

Remarques

- La notation scientifique est particulièrement intéressante lorsque l'on traite de très petits ou de très grands nombres pour les rendre plus facilement lisibles et plus simple à écrire.

Exemples

Diamètre d'un noyau d'atome $\cong 0,000\,000\,000\,000\,001\text{ m} = 1 \cdot 10^{-15}\text{ m}$.

Masse de la Terre $\cong 5\,970\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\text{ kg} = 5,97 \cdot 10^{24}\text{ kg}$.

- Lorsqu'un résultat dépasse la capacité d'affichage d'une calculatrice, celle-ci affiche le résultat en notation scientifique.

⚠ $1,2^5 \neq 1,2 \cdot 10^5$

↔ Ensembles de nombres (p. 10), Nombres décimaux (p. 21)

Ecrire un nombre décimal positif en notation scientifique

Méthode

Exemple Ecrire 0,000012 en notation scientifique.

ÉTAPE 1	
Noter le coefficient a ($1 \leq a < 10$) de la puissance de 10.	$1,2 \cdot 10^{\cdots}$
ÉTAPE 2	
Déterminer le signe de l'exposant de 10. Si le nombre est plus grand que 1, l'exposant est un entier positif. Si le nombre est plus petit que 1, l'exposant est un entier négatif.	$0,000\,012 < 1$, alors l'exposant est un entier négatif.
ÉTAPE 3	
Déterminer la valeur de cet exposant en comptant de combien de rangs il est nécessaire de déplacer la virgule.	Ici, la virgule doit se déplacer de 5 rangs vers la droite (0,00001,2). L'exposant sera donc -5. 
ÉTAPE 4	
Ecrire le nombre en notation scientifique.	$0,000\,012 = 1,2 \cdot 10^{-5}$

Racines

Racine carrée

NO

Définition

Soit a un nombre réel positif. On appelle **racine carrée** de a , notée $\sqrt{a}$, le nombre positif dont le carré est égal à a .
La racine carrée de a est la solution positive de l'équation $x^2 = a$.

Exemples $\sqrt{81} = 9$ car $9^2 = 81$ et 9 est positif. $\sqrt{2,25} = 1,5$, car $1,5^2 = 2,25$ et 1,5 est positif.

⚠ $\sqrt{81} \neq -9$ même si $(-9)^2 = 81$.

Remarques

- Un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{R}$.

Exemple $\sqrt{-9}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

- $\sqrt{0} = 0$
- Si a est positif, $\sqrt{a^2} = a$.

➡ Ensembles de nombres (p. 10), Nombres réels (p. 32)

Racine cubique

Définition

Soit a un nombre réel. On appelle **racine cubique** de a , notée $\sqrt[3]{a}$, le nombre dont le cube est égal à a .

Exemples $\sqrt[3]{-125} = -5$, car $(-5)^3 = -125$. $\sqrt[3]{27} = 3$, car $3^3 = 27$.

Remarques

- $\sqrt[3]{0} = 0$
- La racine cubique d'un nombre négatif existe, contrairement à la racine carrée d'un tel nombre.

➡ Ensembles de nombres (p. 10), Nombres réels (p. 32)

Propriétés des racines

Propriétés

Soient a et b , deux nombres réels positifs.

$$\blacksquare \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\blacksquare \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

Exemples $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{72}{50}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}$$

Conséquence $\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ pour tout nombre a et b positif.

Exemple $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

⚠ $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ ($a > 0$ et $b > 0$)

Exemple

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$$

$$4 + 3 \neq \sqrt{25}$$

$$7 \neq 5$$

Remarque Ces propriétés sont également valables pour les racines cubiques.

➡ Ensembles de nombres (p. 10), Nombres réels (p. 32)

Simplifier des sommes contenant des racines carrées

Méthode

Exemple 1 $3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 6\sqrt{7} = ?$

ÉTAPE 1	
Les nombres sous la racine sont-ils les mêmes ?	Oui.
ÉTAPE 2	
Additionner les coefficients placés devant la racine carrée (distributivité), puis noter le facteur entier avant la racine.	$3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 6\sqrt{7} = (3 + 5 - 6) \cdot \sqrt{7}$ $= 2\sqrt{7}$

Exemple 2 $\sqrt{8} + \sqrt{18} = ?$

ÉTAPE 1	
Les nombres sous la racine sont-ils les mêmes ?	Non.
ÉTAPE 2	
Décomposer les nombres sous les racines en un produit pour faire apparaître, si possible, un carré parfait et un facteur commun aux deux termes.	$\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2}$
ÉTAPE 3	
Appliquer la propriété du produit des racines carrées.	$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2}$ $= 2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2}$
ÉTAPE 4	
Utiliser la distributivité et réduire l'écriture.	$= (2 + 3) \cdot \sqrt{2}$ $= 5\sqrt{2}$

Remarque

Il n'est pas toujours possible de simplifier des sommes de racines carrées.

Exemple $2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$

Probabilités

● Série statistique et fréquence

NO

Série statistique

Définition

Une série statistique est un ensemble de valeurs numériques.

Exemples

Les notes obtenues par une classe à un test de mathématiques, le nombre de frères et sœurs d'une population donnée, le nombre d'habitants des villes d'un canton, les salaires des employés d'une entreprise, etc. sont des séries statistiques.

Fréquence

Définition

On appelle fréquence d'une valeur d'une série statistique le quotient

$$\frac{\text{Nombre d'apparitions de cette valeur}}{\text{Nombre de valeurs de la série}}$$

Ce quotient est compris entre 0 et 1. Il peut aussi s'exprimer sous forme d'un pourcentage.

Exemple

Un élève lance un dé seize fois de suite. Voici les nombres qu'il obtient :

2 ; 3 ; 3 ; 5 ; 6 ; 1 ; 2 ; 5 ; 6 ; 4 ; 3 ; 1 ; 4 ; 2 ; 5 ; 5.

Quelle est la fréquence du 5 ?

Le 5 apparaît 4 fois.

La fréquence du 5 est de $\frac{4}{16} = 0,25 = 25\%$.

● Situation aléatoire, événement

Situation aléatoire

Définition

Une situation est dite **aléatoire** si elle conduit à des résultats possibles parfaitement identifiables. Par contre, on ne sait pas à l'avance quel résultat va se produire.

Exemple

On tire au hasard une boule d'un sac qui contient deux boules rouges, trois boules vertes et cinq boules jaunes. On regarde la couleur de la boule tirée.

Cette situation est une situation aléatoire, car elle conduit à des résultats possibles parfaitement identifiables : obtenir une boule rouge, une boule verte ou une boule jaune.

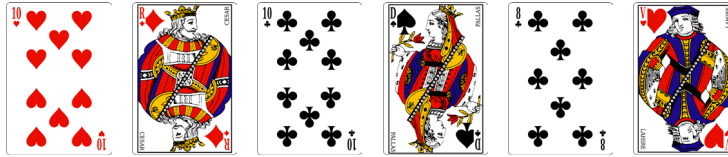
Par contre, avant de tirer la boule, on ne peut pas prévoir précisément quelle sera sa couleur.

Événement

Définition

Un événement d'une situation aléatoire est un ensemble contenant un ou plusieurs résultats.

Exemple On dispose des cartes ci-dessous. On tire une carte au hasard.



NO

Probabilité d'un événement

Définition

Pour certaines situations aléatoires, on peut déterminer par un quotient la « chance » qu'un événement a de se produire. Ce quotient est appelé **probabilité de cet événement**.

Exemple

On tire au hasard une boule d'un sac qui contient deux boules rouges et trois boules blanches. On a deux chances sur cinq d'obtenir une boule rouge.

Donc la probabilité d'obtenir une boule rouge est de $\frac{2}{5} = 0,4$.

Résultats équiprobables

Définition

Dans certaines situations aléatoires, tous les résultats ont la même probabilité. On dit qu'ils sont **équiprobables**.

Exemple

Lorsqu'on lance un dé usuel, numéroté de 1 à 6, parfaitement équilibré et qu'on regarde le numéro qui apparaît, tous les numéros ont la même probabilité d'apparition.

Les résultats aléatoires de cette expérience sont équiprobables.

Lorsque le dé est pipé, ce n'est pas le cas.

Propriété

Si les résultats d'une situation aléatoire sont équiprobables, alors la probabilité d'un événement est égale au quotient :

$$\frac{\text{Nombre de résultats favorables}}{\text{Nombre de résultats possibles}}$$

Exemple

Un sac contient les jetons numérotés 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 9.

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Nombre de résultats possibles : 7

Nombre de résultats favorables : 2

$$p = \frac{2}{7}$$

Probabilité et fréquence

Propriété

Si l'on répète une situation aléatoire un très grand nombre de fois, la **fréquence d'apparition** de n'importe quel événement sera proche d'un nombre qui correspond à la **probabilité de cet événement**.

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, on répète l'expérience un très grand nombre de fois :

« On tire un jeton dont on note le numéro et on le remet dans le sac. »

La fréquence d'apparition d'un nombre pair sera proche du nombre $\frac{2}{7}$, car c'est la probabilité de l'événement « obtenir un nombre pair ».

Calculer la probabilité d'un événement

Méthode 1

Utilisation du quotient
$$\frac{\text{Nombre de résultats favorables}}{\text{Nombre de résultats possibles}}$$

Exemple A l'aide d'un tableur, on tire au hasard un nombre entier compris entre 1 et 40.
Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3 ?

NO

ÉTAPE 1 Est-ce que les résultats sont équiprobables ?	Le tirage au tableur étant effectué au hasard, les résultats sont équiprobables.
ÉTAPE 2 Si c'est le cas, la probabilité de l'événement est égale au quotient $\frac{\text{Nombre de résultats favorables}}{\text{Nombre de résultats possibles}}$	Nombre de résultats possibles : 40 Nombre de résultats favorables : 13, car il y a 13 multiples de 3 entre 1 et 40. La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est de $\frac{13}{40}$.

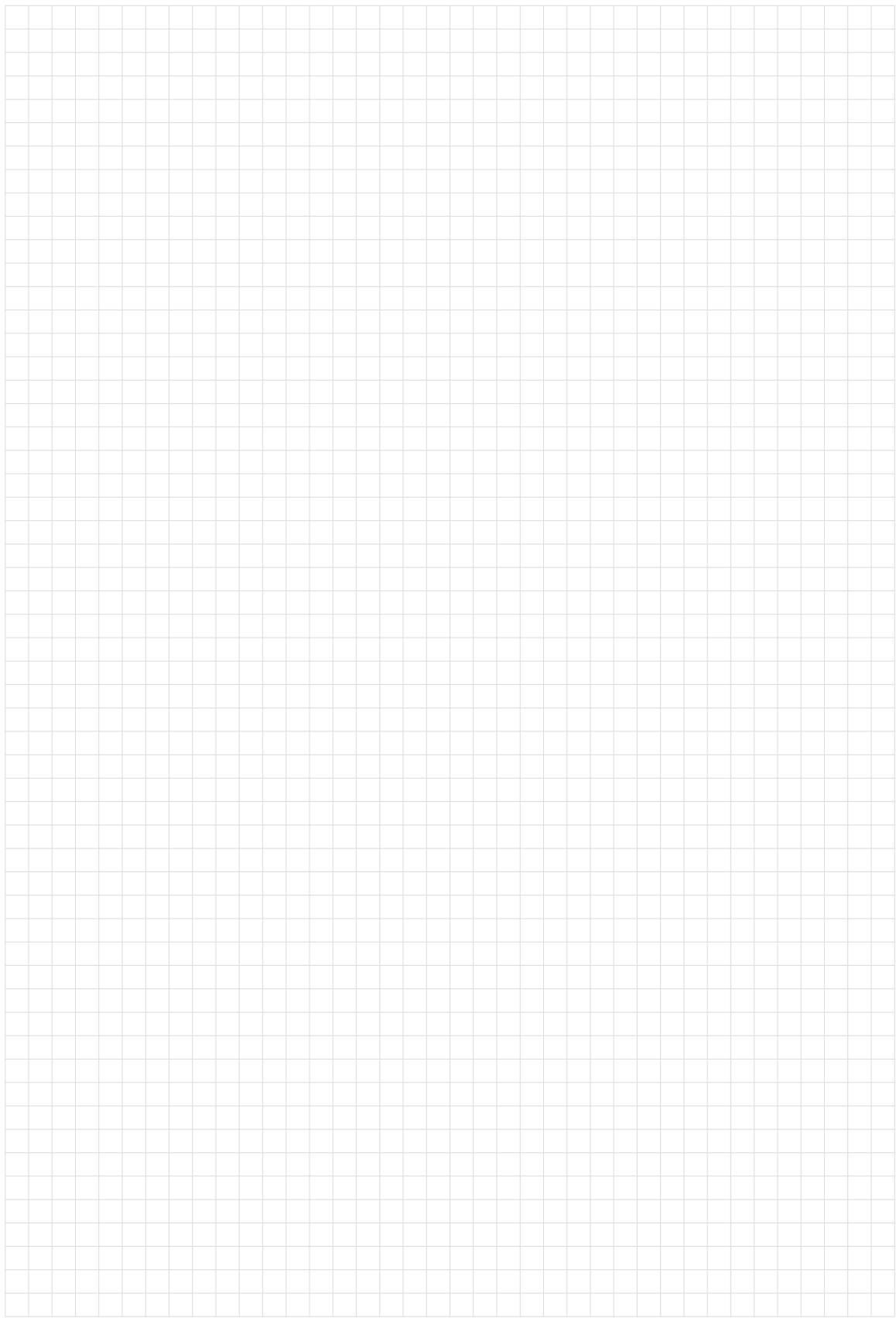
Méthode 2

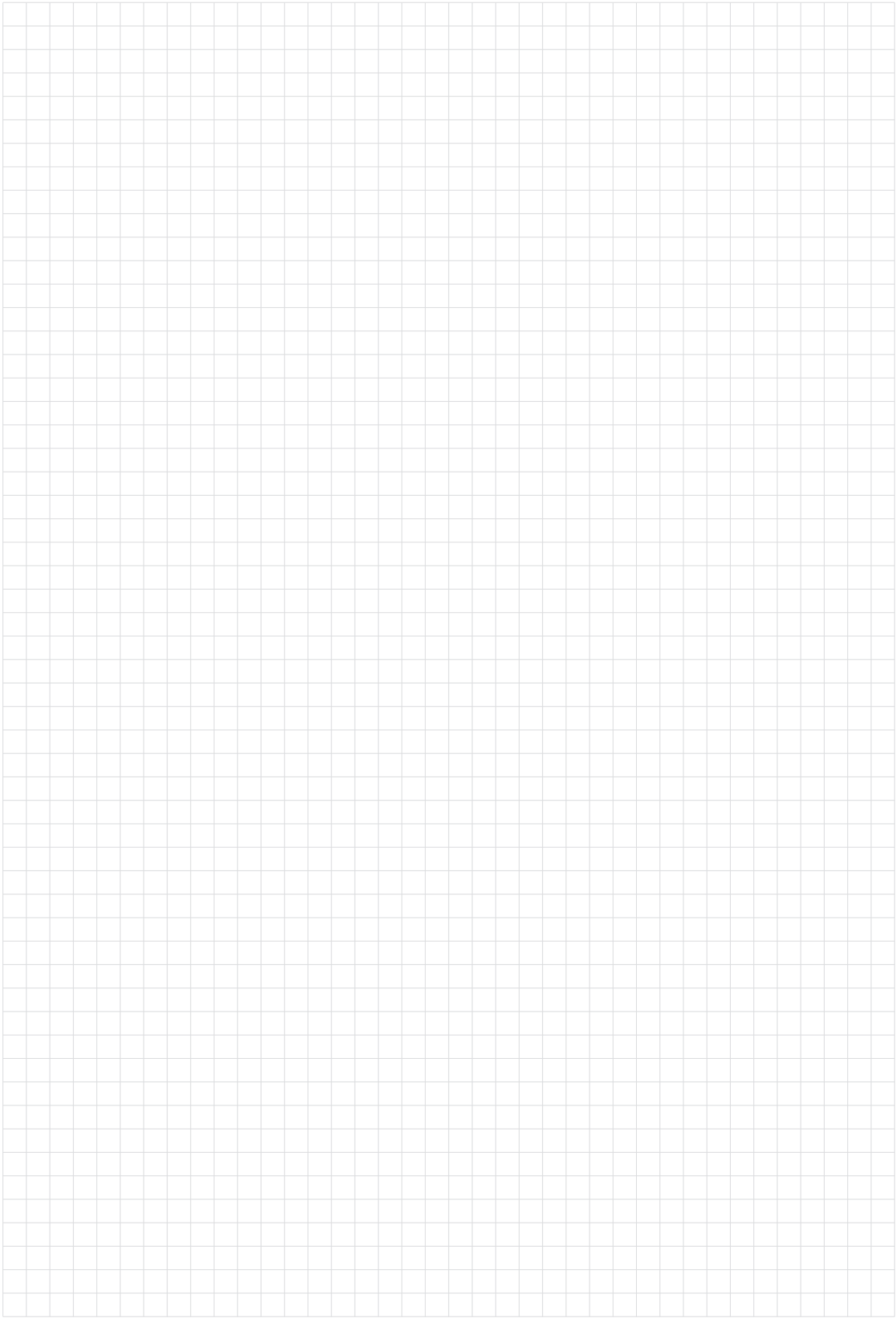
Calcul de la fréquence de l'événement.

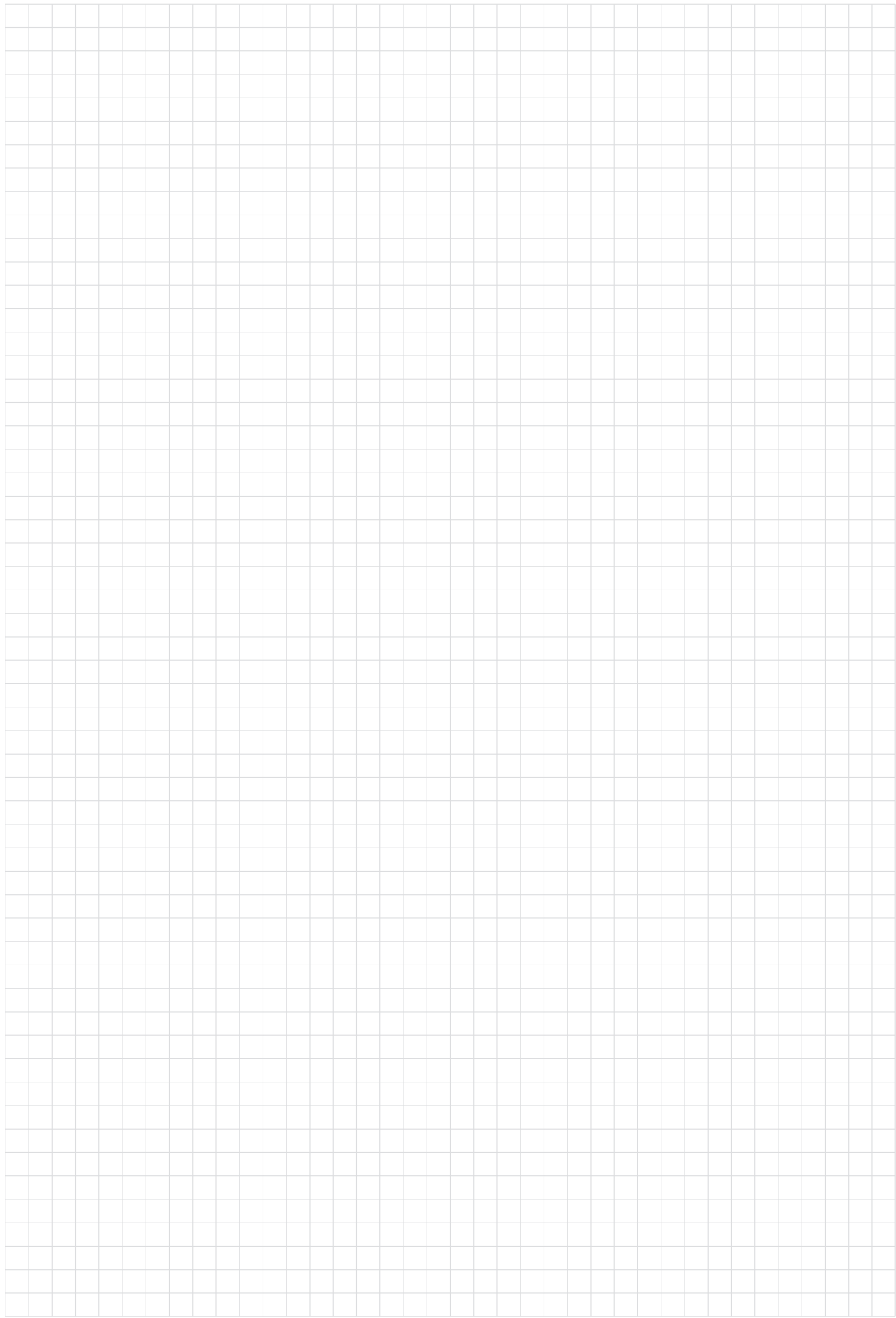
Exemple On dispose d'un dé cubique pipé (truqué) numéroté de 1 à 6. Comment peut-on calculer la probabilité de l'apparition du 6 ?

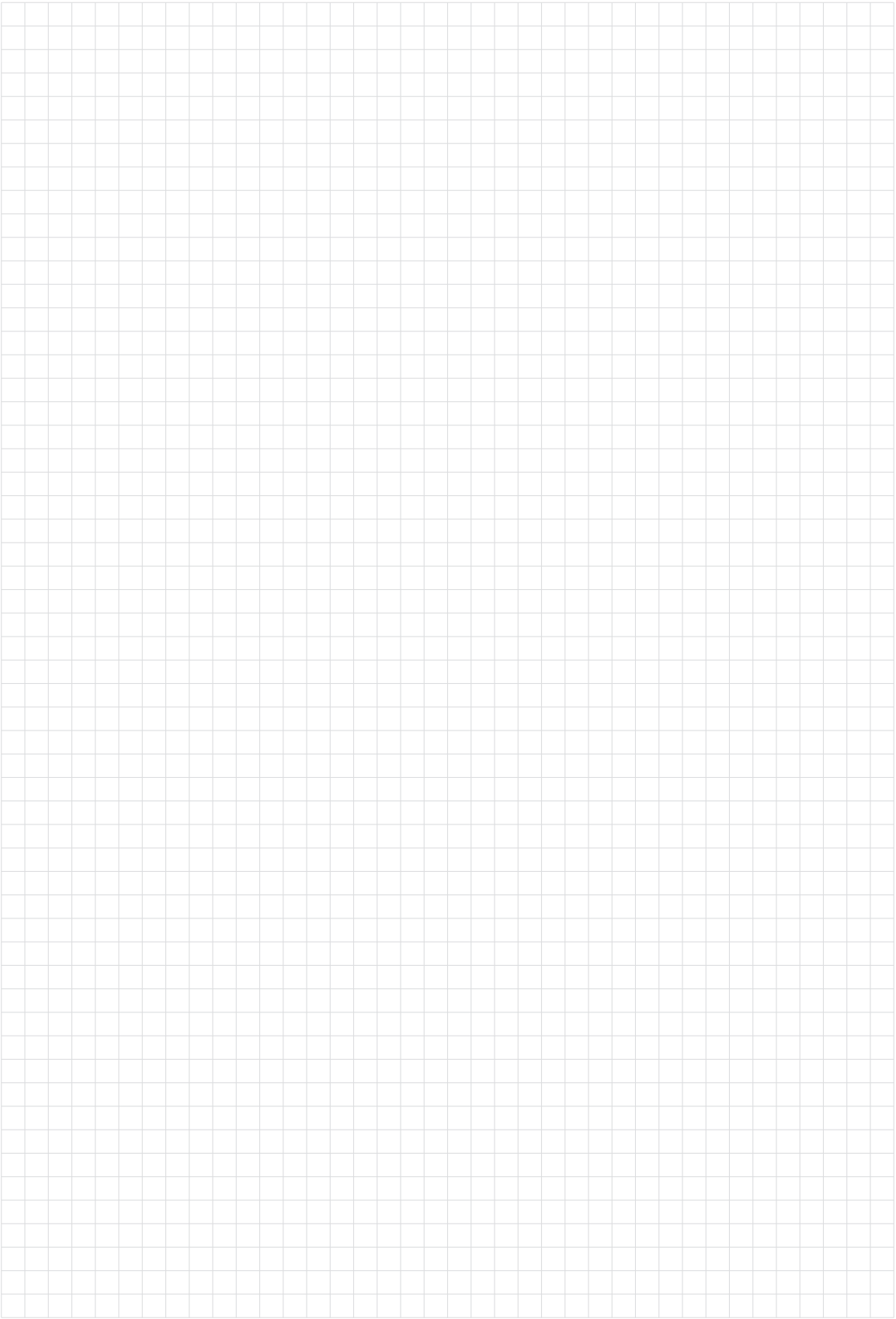
ÉTAPE 1 Est-ce que la probabilité de chaque résultat est la même ?	La probabilité de chaque résultat n'est pas la même, car le dé est pipé. On ne peut donc pas utiliser le rapport : $\frac{\text{Nombre de résultats favorables}}{\text{Nombre de résultats possibles}}$
ÉTAPE 2 Effectuer un très grand nombre de lancers et calculer la fréquence de l'événement.	Pour trouver la probabilité de l'événement «tirer un 6» on lance un très grand nombre de fois le dé et on note chaque fois le résultat obtenu. On calcule ensuite la fréquence de l'événement en divisant le nombre de fois qu'on a obtenu le 6 par le nombre total de lancers.

Choix de la méthode
La première méthode n'est utilisable que si les résultats sont équiprobables.









Fonctions et algèbre

- Fonctions
- Proportionnalité
- Diagrammes
- Calcul littéral
- Equations

Fonctions

Généralités

Définition

Une **fonction** est une **relation** qui associe à chaque élément d'un ensemble de départ (E) un et un seul élément d'un ensemble d'arrivée (F).

Si f désigne cette fonction, on note :

$$f: E \longrightarrow F.$$

Si x est un élément de E, on désigne par $f(x)$ l'élément de F qui est associé à x .

On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f et l'on note :

$$f: x \longmapsto f(x).$$

Exemple

Soit la fonction f qui, à un nombre x , lui associe le nombre $x^2 + 1$.

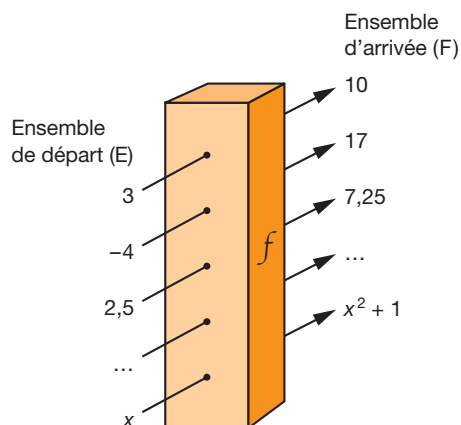
On note : $f: x \longmapsto x^2 + 1$

Par la fonction f , le nombre 3 est associé à 10.

En effet, si $x = 3$, $f(x) = 3^2 + 1 = 10$.

On peut alors écrire cela de différentes façons :

$f: 3 \longmapsto 10$; $f(3) = 10$; l'image de 3 est 10.



Représentation graphique

Définition

La représentation graphique d'une fonction f dans un repère du plan est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$.

Pour tracer la courbe représentative d'une fonction, il faut :

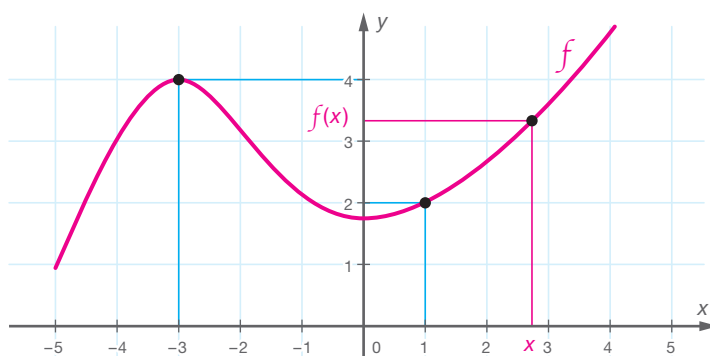
- Déterminer, si nécessaire, sa nature (fonction affine, quadratique, etc.) afin d'anticiper la forme de sa représentation graphique.
- Trouver les coordonnées d'un certain nombre de points qu'on peut rassembler dans un tableau de valeurs.
- Construire un repère en choisissant des graduations adaptées aux coordonnées calculées précédemment.
- Placer les points dans le repère.
- Les relier lorsque c'est pertinent.

Remarque La représentation graphique permet de lire les images de certaines valeurs de x .

Exemple

Soit la représentation graphique de la fonction f .

Sur cette représentation, on peut lire les images de certaines valeurs de x , par exemple, l'image de -3 est 4, celle de 1 est 2.



➤ Fonction affine (p. 48), Fonction quadratique (p. 53)

FA

Définir une fonction

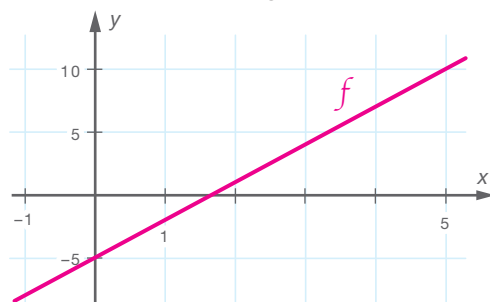
Il existe différentes façons de définir une fonction f .

Considérons par exemple la fonction f qui associe à tout nombre son triple diminué de 5. On peut la définir de plusieurs manières :

- **Par un tableau de valeurs**

Éléments de l'ensemble de départ	20	1	4,5	...	x
Images dans l'ensemble d'arrivée	55	-2	8,5	...	$3x - 5$

- **Par une représentation graphique**



- **Par une expression fonctionnelle**

$$f: x \mapsto 3x - 5$$

ou $f(x) = 3x - 5$

ou $y = 3x - 5$

Dans cette écriture, x représente un nombre de l'ensemble de départ et $3x - 5$ sont image dans l'ensemble d'arrivée.

➤ Fonctions (p. 46), Représentation graphique (p. 46)

Fonction affine

Définition

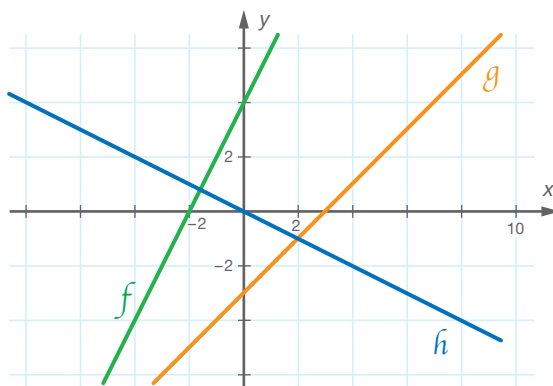
Une **fonction affine** est une fonction de la forme $x \mapsto ax + b$ ($a ; b \in \mathbb{R}$).
La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.

Exemples

$$f: x \mapsto 2x + 4$$

$$g: x \mapsto x - 3$$

$$h: x \mapsto -0,5x$$



Pente de la droite représentant une fonction affine

Propriété 1

Pour calculer la **pente** p d'une droite qui passe par les points $M(x_1 ; y_1)$ et $N(x_2 ; y_2)$, on utilise la formule $p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Remarque

La pente d'une droite peut être négative, contrairement à la pente d'un terrain, d'une route, etc., qui est toujours positive. Pour exprimer le fait de monter ou de descendre, notamment dans les courses de montagne, on utilise les expressions « dénivelé positif » et « dénivelé négatif ».

Propriétés 2

Dans l'expression fonctionnelle $x \mapsto ax + b$,

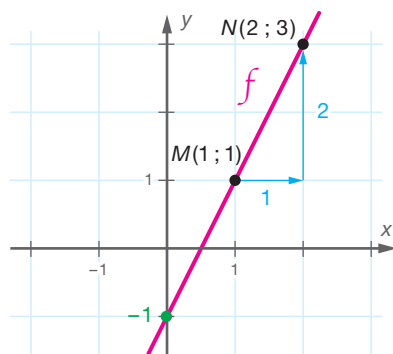
- le nombre a est la **pente** de la droite ;
- le nombre b est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe vertical (**axe des ordonnées**). On l'appelle l'**ordonnée à l'origine**.

Exemples

$$f: x \mapsto 2x - 1$$

La pente de la droite est 2.

L'ordonnée à l'origine est -1.

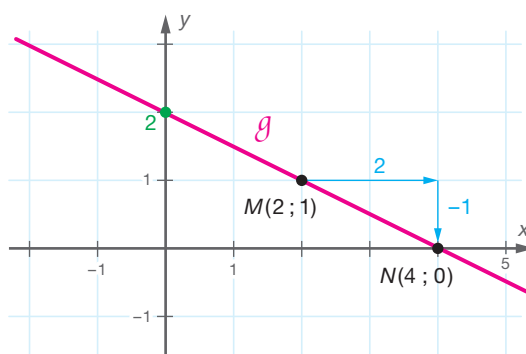


$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$g: x \mapsto -0,5x + 2$$

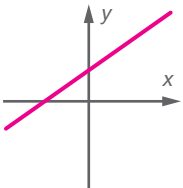
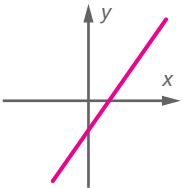
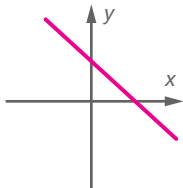
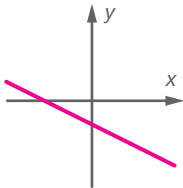
La pente de la droite est -0,5.

L'ordonnée à l'origine est 2.



$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{4 - 2} = \frac{-1}{2} = -0,5$$

Généralités

Pente positive		Pente négative	
			
$a > 0$ et $b > 0$	$a > 0$ et $b < 0$	$a < 0$ et $b > 0$	$a < 0$ et $b < 0$

Construire la représentation graphique d'une fonction affine

Méthode 1

A l'aide des coordonnées de deux points.

Exemple Construire la représentation graphique de la fonction

$f: x \mapsto 0,5x - 3$.

FA

ÉTAPE 1

Déterminer la nature de la fonction et anticiper sa représentation graphique.

$f: x \mapsto 0,5x - 3$ est de la forme $x \mapsto ax + b$ ($a; b \in \mathbb{R}$).

C'est une fonction affine, donc sa représentation graphique est une droite.

ÉTAPE 2

Trouver, à l'aide de l'expression fonctionnelle, les coordonnées de deux points appartenant à la droite.

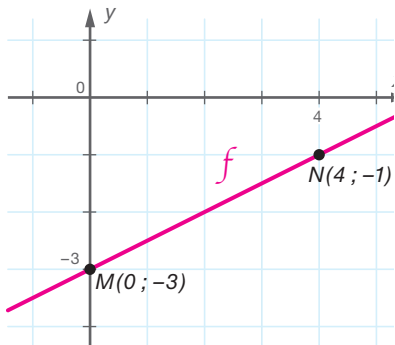
x	0	4
$0,5x - 3$	$0,5 \cdot 0 - 3 = -3$	$0,5 \cdot 4 - 3 = -1$

Remarque

Pour une question de précision ou de contrôle, il peut être utile de trouver les coordonnées d'un troisième point de la droite.

ÉTAPE 3

Placer ces deux ou trois points dans le graphique et tracer la droite qui passe par ces points.



Méthode 2

A l'aide de la pente et de l'ordonnée à l'origine.

Exemple Construire la représentation graphique de la fonction

$$f: x \mapsto 0,5x - 3.$$

ÉTAPE 1

Déterminer la nature de la fonction et anticiper sa représentation graphique.

$f: x \mapsto 0,5x - 3$ est de la forme $x \mapsto ax + b$ ($a; b \in \mathbb{R}$).

C'est bien une fonction affine, donc sa représentation graphique est une droite.

ÉTAPE 2

Déterminer l'ordonnée à l'origine et placer le point correspondant.

Le point $M(0; -3)$ appartient à la droite représentant la fonction.

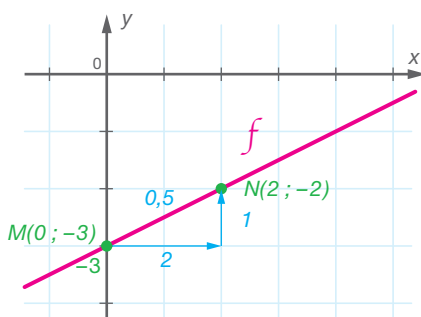
Ordonnée à l'origine: -3 .

ÉTAPE 3

Déterminer la pente, puis à partir du point précédemment placé et en utilisant la pente de la droite, placer un deuxième point. Tracer ensuite la droite qui passe par ces points.

Remarque

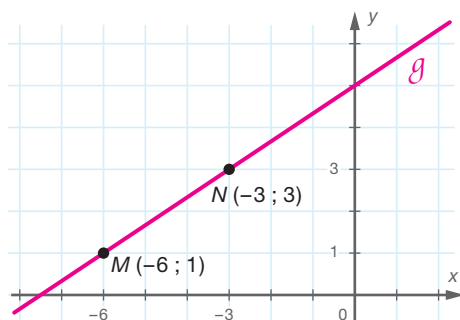
Pour vérifier que la représentation graphique est correcte, on peut déterminer les coordonnées d'un point à l'aide de l'expression fonctionnelle et vérifier qu'il appartient bien à la droite.



Déterminer la pente d'une droite à partir de sa représentation graphique

Méthode

Exemple Déterminer la pente de la droite g .



ÉTAPE 1

Trouver les coordonnées de deux points de la droite g . Choisir si possible des points dont les coordonnées sont entières.

Par exemple, les points $M(-6; 1)$ et $N(-3; 3)$.

ÉTAPE 2

Calculer la différence des ordonnées de ces deux points, puis la différence des abscisses de ces deux points.

$$y_2 - y_1 = 3 - 1 = 2$$

$$x_2 - x_1 = (-3) - (-6) = 3$$

⚠ Bien garder le même ordre des points pour calculer ces deux différences.

ÉTAPE 3

Utiliser la formule du calcul de la pente.

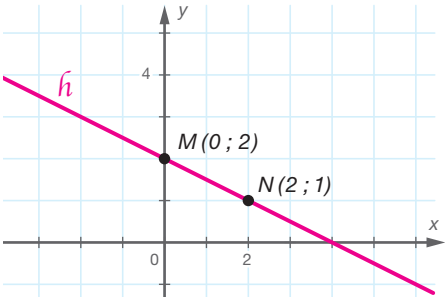
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{3}$$

La pente de la droite g vaut $\frac{2}{3}$.

Déterminer l'expression fonctionnelle d'une fonction affine à partir de sa représentation graphique

Méthode

Exemple Déterminer l'expression fonctionnelle de la fonction affine représentée par la droite $\hat{f}_1$.



ÉTAPE 1	Noter l'expression fonctionnelle d'une fonction affine sous sa forme généralisée.	$\hat{f}_1 : x \longmapsto ax + b \quad (a ; b \in \mathbb{R})$
ÉTAPE 2	Chercher l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe vertical pour trouver la valeur de b (ordonnée à l'origine).	Point d'intersection : $(0 ; 2)$. Donc ici $b = 2$.
ÉTAPE 3	Trouver les coordonnées d'un deuxième point de la droite $\hat{f}_1$. Choisir, si possible, un point dont les coordonnées sont entières.	Par exemple le point $(2 ; 1)$.
ÉTAPE 4	Calculer la pente de la droite $\hat{f}_1$ à l'aide des coordonnées des deux points précédemment déterminées.	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 2}{2 - 0} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ Donc ici, $a = -\frac{1}{2}$.
ÉTAPE 5	Noter l'expression fonctionnelle de cette fonction affine.	$\hat{f}_1 : x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 2$

FA

Cas particuliers de la fonction affine

Définitions

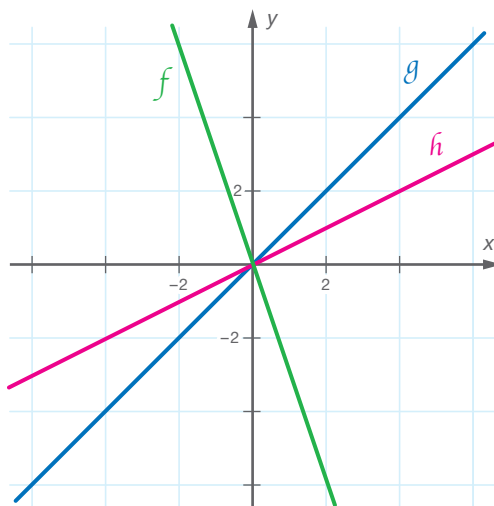
- Une **fonction linéaire** est une fonction affine pour laquelle $b = 0$. Son expression fonctionnelle est de la forme $x \mapsto ax$ ($a \in \mathbb{R}$). La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine des axes.
- Le nombre réel a s'appelle le **facteur de linéarité** (ou coefficient de linéarité). Il représente la pente de la droite.

Exemples

$$f: x \mapsto -3x$$

$$g: x \mapsto x$$

$$h: x \mapsto 0,5x$$



Remarque

Toute relation de proportionnalité entre deux grandeurs peut être représentée par une fonction linéaire.

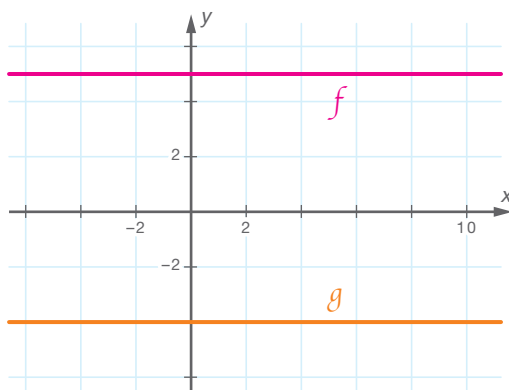
Définition

Une **fonction constante** est une fonction affine dont l'expression fonctionnelle est de la forme $x \mapsto b$ ($b \in \mathbb{R}$). Sa pente est nulle ($a = 0$). La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemples

$$f: x \mapsto 5$$

$$g: x \mapsto -4$$

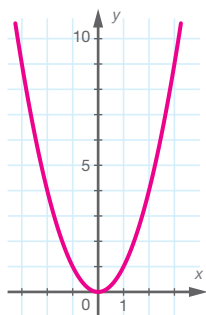


Fonction quadratique

Définitions

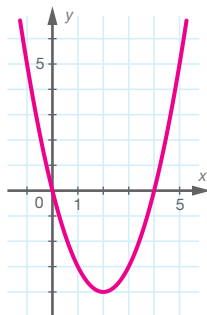
- Une **fonction quadratique** est une fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
- La représentation graphique d'une fonction quadratique est une **parabole**.

Exemples



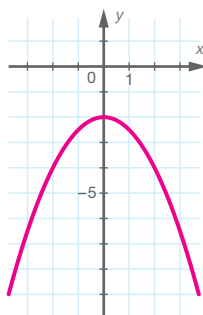
$$x \mapsto x^2$$

($a = 1$; $b = 0$; $c = 0$)



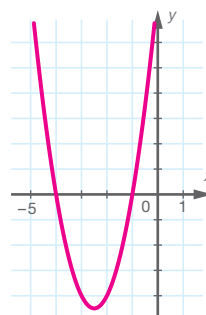
$$x \mapsto x^2 - 4x$$

($a = 1$; $b = -4$; $c = 0$)



$$x \mapsto -0,5x^2 - 2$$

($a = -0,5$; $b = 0$; $c = -2$)



$$x \mapsto 2x^2 + 10x + 8$$

($a = 2$; $b = 10$; $c = 8$)

ÉTYM Quadratique : du latin *quadratus*, carré.

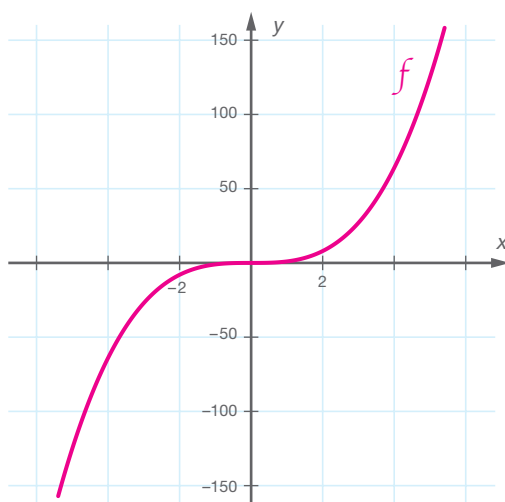
Fonction cubique

Définition

Une **fonction cubique** est une fonction de la forme $x \mapsto ax^3$ ($a \neq 0$; $a \in \mathbb{R}$).

Exemple

$$f: x \mapsto x^3$$

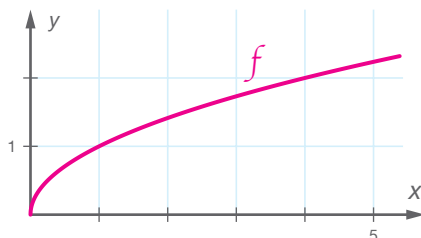


● Fonction racine carrée

Définition La **fonction racine carrée** est une fonction de la forme $x \mapsto \sqrt{x}$ ($x \geq 0$).

Exemple

$$f: x \mapsto \sqrt{x}$$



● Fonction homographique

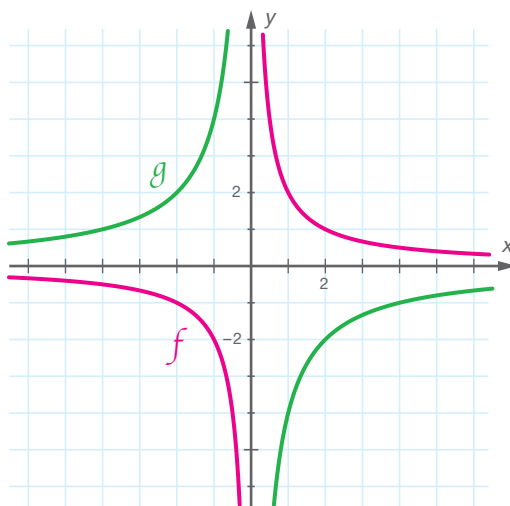
Définitions

- Les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$; $x \neq 0$; $a \in \mathbb{R}$) sont des **fonctions homographiques**.
- Leur représentation graphique est une **hyperbole**.
- Une hyperbole comporte deux **branches**.

Exemples

$$f: x \mapsto \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$g: x \mapsto \frac{-4}{x} \quad (x \neq 0)$$



Proportionnalité

Généralités

Définition

Deux grandeurs sont proportionnelles si l'on peut calculer les valeurs de l'une en multipliant (ou en divisant) les valeurs de l'autre par un même nombre non nul. Ce nombre est appelé **facteur de proportionnalité** (ou facteur de linéarité).

Remarque

Le tableau présentant des valeurs de grandeurs proportionnelles est appelé **tableau de proportionnalité**.

Exemples

- A une même pompe, le prix à payer et la quantité d'essence achetée sont proportionnels. En effet, pour obtenir le prix à payer on multiplie la quantité d'essence (en l) par le prix d'un litre. On dit aussi que le prix à payer est proportionnel à la quantité d'essence achetée ou que la quantité d'essence est proportionnelle au prix à payer.
- Le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur de son côté.

Longueur du côté	3	6	c
Périmètre	12	24	4c

Le facteur de proportionnalité est 4.

- Les grandeurs composées suivantes correspondent toutes à des situations de proportionnalités : pourcentage, échelle, vitesse moyenne, masse volumique.

Contre-exemples

- L'âge d'une personne n'est pas proportionnel à sa taille. En effet, il n'y a pas de facteur de proportionnalité qui permette de passer de l'âge de la personne à sa taille.
- L'aire d'un carré n'est pas proportionnelle à la longueur de son côté.

Côté du carré	2	3	c
Aire du carré	4	9	c ²

Il n'y a pas de facteur de proportionnalité permettant de passer du côté du carré à son aire.

Remarque

La fonction associée à une situation de proportionnalité est une fonction linéaire.

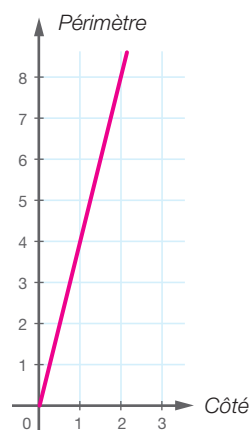
Exemple

Le périmètre d'un carré et la longueur d'un de ses côtés est une situation de proportionnalité (cf. ci-dessus).

Elle peut être représentée par la fonction qui associe $f: c \mapsto 4c$.

C'est bien une fonction linéaire.

Sa représentation est dans ce cas une demi-droite qui passe par l'origine du repère puisqu'il n'y a que des valeurs positives.



Propriété 1 Dans un tableau de proportionnalité, il y a **égalité des rapports**. Une égalité de deux rapports est une proportion.

Grandeur 1	x	y	z
Grandeur 2	x'	y'	z'



c est le facteur de proportionnalité.

On a : $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = c$.

Exemple

Dans le tableau de proportionnalité suivant, exprimant le prix des abricots en fonction du poids, on a bien l'égalité des rapports.

Quantité d'abricots en kg	4	7	13
Prix en francs	20	35	65



On a : $\frac{20}{4} = \frac{35}{7} = \frac{65}{13} = 5$.

Propriété 2 Si les grandeurs 1 et 2 sont proportionnelles, on peut utiliser la **propriété de la somme** illustrée par le tableau ci-dessous.

Grandeur 1	x	y	$x + y$
Grandeur 2	x'	y'	$x' + y'$

Exemple

Dans le tableau de proportionnalité suivant exprimant la hauteur d'une pile de pièces de 50 centimes en fonction du nombre de pièces, la propriété de la somme est bien vérifiée.

Nombre de pièces	8	20	28
Hauteur de la pile en mm	10	25	35



Propriété 3 Les grandeurs 1 et 2 sont proportionnelles, on peut utiliser la **propriété du produit** illustrée par le tableau ci-dessous.

Grandeur 1	x	kx
Grandeur 2	x'	kx'

Exemple

Dans le tableau de proportionnalité suivant exprimant la hauteur d'une pile de pièces 50 centimes en fonction du nombre de pièces, la propriété du produit est bien vérifiée.

Nombre de pièces	8	40	120
Hauteur de la pile en mm	10	50	150



Remarque Pour savoir si deux grandeurs sont proportionnelles on peut :

- Chercher s'il existe un facteur de proportionnalité.
- Représenter graphiquement la situation pour voir s'il s'agit d'une droite passant par l'origine.

→ Fonction linéaire (p. 52), Pourcentage (p. 58), Echelle (p. 59), Pente (p. 60), Vitesse moyenne (p. 61), Masse volumique (p. 62), Débit (p. 63)

Résoudre un problème de proportionnalité

Pour toutes ces méthodes, il faut s'assurer avant tout qu'il y a bien proportionnalité entre les deux grandeurs en jeu de l'énoncé, ce qui est bien le cas dans les exemples qui suivent.

Méthode 1

A l'aide de la propriété du produit.

Exemple 5 croissants coûtent 6 francs.
Quel est le prix de 15 croissants ?

ÉTAPE 1	Peut-on trouver facilement la grandeur cherchée à l'aide de la propriété du produit ?	Oui, $15 = 3 \cdot 5$. 15 croissants coûtent trois fois plus cher que 5 croissants.
ÉTAPE 2	Appliquer la propriété du produit des grandeurs.	Prix de 15 croissants (en francs): $3 \cdot 6 = 18$

Méthode 2

A l'aide de la propriété de la somme.

Exemple 5 croissants coûtent 6 francs et 6 croissants coûtent 7.20 francs.
Quel est le prix de 11 croissants ?

ÉTAPE 1	Peut-on trouver la grandeur cherchée à l'aide de la propriété de la somme ?	Oui, $11 = 5 + 6$. Le prix de 11 croissants est la somme du prix de 5 croissants et du prix de 6 croissants.
ÉTAPE 2	Appliquer la propriété de la somme des grandeurs.	Prix de 11 croissants (en francs): $6 + 7,2 = 13,2$

Méthode 3

A l'aide du retour à l'unité.

Exemple 5 croissants coûtent 6 francs.
Quel est le prix de 3 croissants ?

ÉTAPE 1	Chercher la valeur de l'unité pour l'une des deux grandeurs.	On calcule le prix de 1 croissant. $6 : 5 = 1,2$ 1 croissant coûte 1.20 franc.
ÉTAPE 2	Multiplier la valeur de l'unité par la quantité recherchée.	Prix de 3 croissants (en francs): $3 \cdot 1,2 = 3,6$

Méthode 4

A l'aide du facteur de proportionnalité.

Exemple 5 croissants coûtent 6 francs.
Quel est le prix de 7 croissants ?

ÉTAPE 1	Faire un tableau de proportionnalité et chercher le facteur de proportionnalité.	Le facteur de proportionnalité est: $\frac{6}{5} = 1,2$ <table><tr><td>Nombre de croissants</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>Prix des croissants</td><td>6</td><td></td></tr></table>	Nombre de croissants	5	7	Prix des croissants	6	
Nombre de croissants	5	7						
Prix des croissants	6							
ÉTAPE 2	Compléter le tableau en utilisant le facteur de proportionnalité.	<table><tr><td>Nombre de croissants</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>Prix des croissants</td><td>6</td><td>$7 \cdot 1,2 = 8,4$</td></tr></table> Donc le prix de 7 croissants est de 8.40 francs.	Nombre de croissants	5	7	Prix des croissants	6	$7 \cdot 1,2 = 8,4$
Nombre de croissants	5	7						
Prix des croissants	6	$7 \cdot 1,2 = 8,4$						

Méthode 5

A l'aide de la propriété de l'égalité des rapports.

Exemple 5 croissants coûtent 6 francs.
Quel est le prix de 9 croissants ?

ÉTAPE 1	Ecrire une proportion en utilisant la propriété de l'égalité des rapports.	$\frac{5}{6} = \frac{9}{x}$
ÉTAPE 2	Appliquer la propriété de l'égalité des rapports et résoudre l'équation. Remarque Pour écrire la proportion correctement, on peut s'aider d'un tableau de proportionnalité.	$\frac{5}{6} = \frac{9}{x}$ $5 \cdot x = 9 \cdot 6$ donc $x = \frac{54}{5} = 10,8$ Donc le prix de 9 croissants est de 10.80 francs.

Pourcentage

Définition

Un **pourcentage** est un facteur de proportionnalité entre deux grandeurs, une «**partie**» et un «**tout**» qui est fixé à 100.

Par conséquent, ce facteur s'exprime sous la forme d'une **fraction dont le dénominateur est égal à 100**.

Notation

$\frac{20}{100}$ est un pourcentage qui se note 20 % et qui se lit «vingt pour-cent».

$$20 \% = \frac{20}{100} = 0,20$$

Exemple

Dire qu'il y a 20 % de chocolat dans un gâteau signifie :

- Qu'il y a proportionnalité entre la masse de chocolat (*la partie*) et la masse de gâteau (*le tout*).
- Qu'il y a 20 g de chocolat pour 100 g de gâteau. Par conséquent, $20 \% = \frac{20}{100} = 0,20$ est le facteur de proportionnalité qui permet de passer du *tout* à sa *partie*.

Remarques

- Pour calculer le pourcentage d'un nombre, on peut utiliser un tableau de proportionnalité, mais comme on connaît le facteur de proportionnalité (le pourcentage), on peut directement multiplier ce nombre par le pourcentage.

Exemple

Dans un pot de yoghourt de 180 grammes, il y a 4 % de matières grasses.

Quelle est la quantité de matières grasses, en grammes, dans ce pot ?

$$180 \cdot \frac{4}{100} = 180 \cdot 0,04 = 7,2$$

La quantité de matières grasses de ce pot est de 7,2 g.

- Le tout peut aussi être fixé à 1000. On parle alors de ‰ (pour-mille).

Exemple

Le taux de natalité en Suisse en 2016 était de 10,5 ‰.

✚ Proportionnalité (p. 55)

Déterminer un pourcentage

Méthode

A l'aide de la propriété du produit.

Exemple Dans un village de 600 habitants, il y a 210 habitants de langue française. Quel est le pourcentage d'habitants de langue française dans ce village ?

ÉTAPE 1	
Identifier la «partie» et le «tout».	La «partie» : les habitants de langue française. Le «tout» : les habitants du village.
ÉTAPE 2	
Chercher le facteur de proportionnalité en divisant la partie par le tout.	$\frac{210}{600} = 0,35$
ÉTAPE 3	
Ecrire le résultat sous forme d'une fraction dont le dénominateur est 100.	$0,35 = \frac{35}{100}$
ÉTAPE 4	
Conclure.	Le pourcentage d'habitants de langue française dans ce village est de 35 %.

Echelle

Définition

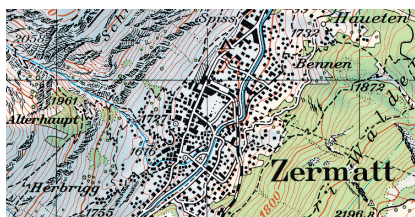
Lorsque les dimensions d'une reproduction (plan, carte, maquette, dessin, photo, etc.) et les dimensions réelles sont proportionnelles, on appelle échelle le rapport d'une longueur mesurée sur le plan par la longueur réelle correspondante, exprimée dans la même unité.

$$\text{Echelle} = \frac{\text{Longueur mesurée sur la reproduction (plan, carte, etc.)}}{\text{Longueur réelle}}$$

Remarques

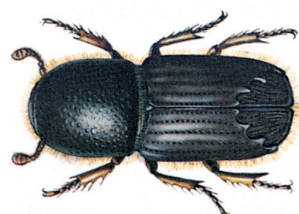
- Si l'échelle est inférieure à 1, la reproduction est une réduction de la réalité.
- Si elle est supérieure à 1, la reproduction est un agrandissement de la réalité.
- L'échelle n'a pas d'unité, c'est un facteur de proportionnalité.

Exemples



Echelle: $1:50\,000$ ou $\frac{1}{50\,000}$

La carte topographique est une réduction de la réalité. Chaque dimension réelle a été divisée par 50 000.



Echelle: $10:1$ ou $\frac{10}{1}$

Le dessin du coléoptère est un agrandissement de la réalité. Chaque dimension réelle a été multipliée par 10.

- Une échelle peut être exprimée de plusieurs manières:
 - Par un quotient
 - Par un dessin
 - Par une indication du type

Exemples

$1:50\,000$ ou $\frac{1}{50\,000}$

0 ——— 1000 m

« 2 cm sur la carte correspondent à 1 km en réalité »

- L'échelle permet de mettre en relation la distance mesurée sur une carte, un dessin, etc. avec la distance réelle. Il est donc possible de calculer l'une de ces grandeurs quand on connaît les deux autres.

→ Proportionnalité (p. 55), Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule (p. 83)

Déterminer l'échelle d'une reproduction de la réalité

Méthode

Exemple Sur une carte, une distance de 3 km est représentée par une distance de 12 cm. Quelle est l'échelle de cette carte ?

ÉTAPE 1 Ecrire la formule de l'échelle.	Echelle = $\frac{\text{Longueur mesurée sur la carte}}{\text{Longueur réelle}}$
ÉTAPE 2 Exprimer les longueurs dans la même unité.	3 km = 300 000 cm
ÉTAPE 3 Appliquer la formule et exprimer l'échelle sous la forme d'une fraction dont : – le numérateur est égal à 1 dans le cas d'une réduction ; – le dénominateur est égal à 1 dans le cas d'un agrandissement.	$\text{Echelle} = \frac{12}{300\,000} = \frac{1}{25\,000}$
ÉTAPE 4 Conclure.	L'échelle de la carte est 1:25 000.

Pente

Définition

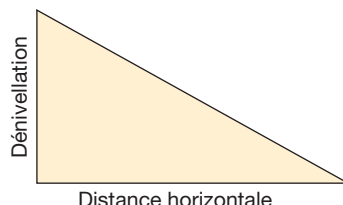
La **pente moyenne** d'un terrain, d'une route, etc. est le rapport de la dénivellation (différence d'altitude) par la distance horizontale, exprimée dans la même unité.

$$\text{Pente} = \frac{\text{Dénivellation}}{\text{Distance horizontale}}$$

Remarques

- Une pente s'exprime généralement à l'aide d'un pourcentage.

Quand une pente est constante, il y a proportionnalité entre la dénivellation et la distance horizontale.



- La pente n'a pas d'unité, c'est un coefficient de proportionnalité.

Exemple

Le panneau ci-contre indique que, en moyenne, sur ce tronçon de route pour une distance horizontale de 100 m, la dénivellation est de 10 m.

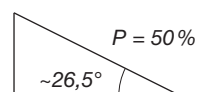
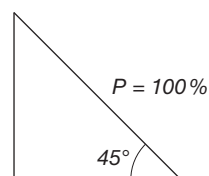


- La pente peut aussi s'exprimer en degrés.

⚠ Il n'y a pas proportionnalité entre la pente exprimée en pour-cent et en degré.

Exemple

Une pente de 100 % correspond à un angle de 45°, mais une pente de 50 % ne correspond pas à un angle de 22,5°, mais à un angle d'environ 26,5°.



- La pente permet de mettre en relation la dénivellation et la distance horizontale d'une route. Il est donc possible de calculer l'une de ces grandeurs quand on connaît les deux autres.

✚ Proportionnalité (p. 55), Pourcentage (p. 58), Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule (p. 83), Degré (angle) (p. 101)

Déterminer la pente moyenne

Méthode

Exemple A l'aide d'une carte, on constate que sur une distance horizontale de 2,5 km, la dénivellation d'une route est de 150 m. Quelle est la pente moyenne de ce tronçon de route ?

ÉTAPE 1	Écrire la formule de la pente.	$\text{Pente} = \frac{\text{Dénivellation}}{\text{Distance horizontale}}$
ÉTAPE 2	Exprimer les longueurs dans la même unité.	$2,5 \text{ km} = 2500 \text{ m}$
ÉTAPE 3	Appliquer la formule et exprimer la pente sous forme d'un pourcentage.	$\text{Pente} = \frac{150}{2500} = 0,06 = 6\%$
ÉTAPE 4	Conclure.	La pente moyenne est de 6%.

Vitesse moyenne

Définition

La **vitesse moyenne** v d'un mobile est le rapport entre la distance parcourue d et la durée du parcours t , appelé aussi temps du parcours.

$$v = \frac{d}{t}$$

Unités usuelles : km/h et m/s.

Remarques

- Quand la vitesse est constante, il y a proportionnalité entre la distance parcourue et le temps de parcours.

Exemple

Une voiture qui roule à la vitesse moyenne de 70 km/h signifie qu'en une heure elle parcourt 70 km. Donc en 2 heures elle parcourt 140 km.

- Dans le langage courant, on parle tout autant de durée de parcours que de temps de parcours d'où le t dans la formule.
- La vitesse permet de mettre en relation la distance parcourue et le temps de parcours. Il est donc possible de calculer l'une de ces grandeurs quand on connaît les deux autres.

Exemples de quelques vitesses

- Vitesse maximale de chute libre (parachutiste) : de l'ordre de 70 m/s soit environ 250 km/h.
- Vitesse du son dans l'air : 343 m/s soit environ 1200 km/h.
- Vitesse de la lumière dans le vide : 300 000 km/s.

→ Proportionnalité (p. 55), Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule (p. 83)

FA

Déterminer la vitesse moyenne

Méthode

Exemple Un piéton parcourt 7 km en 1 h 24 min
Quelle est sa vitesse moyenne en km/h ?

ÉTAPE 1	Ecrire la formule de la vitesse.	$v = \frac{\text{Distance parcourue}}{\text{Durée de parcours}} = \frac{d}{t}$
ÉTAPE 2	Exprimer la distance et le temps dans les unités demandées.	$d = 7 \text{ km}$ $t = 1 \text{ h } 24 \text{ min} = 1,4 \text{ h}$
ÉTAPE 3	Appliquer la formule.	$v \text{ en km/h} = \frac{7}{1,4} = 5$
ÉTAPE 4	Conclure.	La vitesse moyenne du piéton est de 5 km/h.

Masse volumique

Définition

La **masse volumique moyenne** ρ d'un objet ou d'une substance est égale au rapport de sa masse m et son volume V .

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Unités usuelles : kg/m^3 ou g/cm^3 .

Remarques

- Quand l'objet ou la substance est homogène, il y a proportionnalité entre sa masse et son volume.

Exemple

Si l'on dit qu'un objet ou une substance a une masse volumique de 15 g/cm^3 , cela signifie que 1 cm^3 de cet objet ou de cette substance a une masse de 15 g.

Donc pour 10 cm^3 , cet objet ou cette substance a une masse de 150 g.

- La masse volumique permet de mettre en relation la masse et le volume d'un objet. Il est donc possible de calculer l'une de ces grandeurs quand on connaît les deux autres.

Exemples de masses volumiques

- Eau pure : $1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ kg/l}$
- Air (à 0°) : $1,29 \text{ kg/m}^3 = 1,29 \text{ g/l}$
- Fer : 7690 kg/m^3
- Sapin : 500 kg/m^3

✚ Proportionnalité (p. 55), Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule (p. 83)

Déterminer la masse volumique d'un objet

Méthode

Exemple Une plaque de granit de $2,5 \text{ m}^3$ a une masse de 6,5 t. Quelle est la masse volumique de ce granit en kg/m^3 ?

ÉTAPE 1	Écrire la formule de la masse volumique.	$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volume}} = \frac{m}{V}$
ÉTAPE 2	Exprimer la masse et le volume dans les unités demandées.	$6,5 \text{ t} = 6500 \text{ kg}$
ÉTAPE 3	Appliquer la formule.	$\rho \text{ en kg/m}^3 = \frac{6500}{2,5} = 2600$
ÉTAPE 4	Conclure.	La masse volumique du granit est de 2600 kg/m^3 .

● Débit

Définition

Le **débit moyen d** d'un liquide (ou d'une matière) qui s'écoule est égal au rapport du volume V de liquide (ou de la quantité de matière) par la durée de l'écoulement t .

$$d = \frac{V}{t}$$

Les unités usuelles de débit dépendent de la matière qui s'écoule :

- s'il s'agit de liquide, on utilise souvent le m^3/s , le l/s ;
- s'il s'agit d'information (comme pour internet), on utilise le kb/s ou Kbps qui est le kilobit par seconde.

Remarques

- Quand le débit est constant, il y a proportionnalité entre le volume et la durée de l'écoulement.

Exemple

Le débit moyen du Rhône est de $165 \text{ m}^3/\text{s}$ à l'entrée du lac Léman.
Cela signifie qu'en une seconde, il s'écoule 165 m^3 d'eau soit $165\,000 \text{ l}$.
Donc en 10 secondes, il s'écoulera $1\,650\,000$ litres d'eau.

- Le débit permet de mettre en relation le volume d'un écoulement et une durée. Il est donc possible de calculer l'une de ces grandeurs quand on connaît les deux autres.

→ Proportionnalité (p. 55), Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule (p. 83)

FA

Déterminer le débit

Méthode

Exemple Un robinet remplit un jerrican de 20 l en 2 minutes 13 secondes. Quel est le débit de ce robinet en l/s ?

ÉTAPE 1	
Ecrire la formule du débit.	$d = \frac{\text{Volume}}{\text{Durée de l'écoulement}} = \frac{V}{t}$
ÉTAPE 2	
Exprimer le volume et la durée dans les unités demandées.	$t = 2 \text{ min } 13 \text{ s} = 133 \text{ s}$
ÉTAPE 3	
Appliquer la formule.	$d \text{ en l/s} = \frac{20}{133} \approx 0,15$
ÉTAPE 4	
Conclure.	Le débit de ce robinet est de $0,15 \text{ l/s}$.

Diagrammes

Diagramme

Définition

Un **diagramme** est une représentation graphique d'une ou plusieurs séries de données.

Il permet de visualiser les informations recueillies ou les prévisions d'évolution d'un phénomène.

Il existe plusieurs types de diagrammes.

Le diagramme cartésien

Le diagramme cartésien est constitué d'un ensemble de points dont les coordonnées correspondent aux données à représenter.

Exemple

Moyenne des températures mensuelles à Montréal.

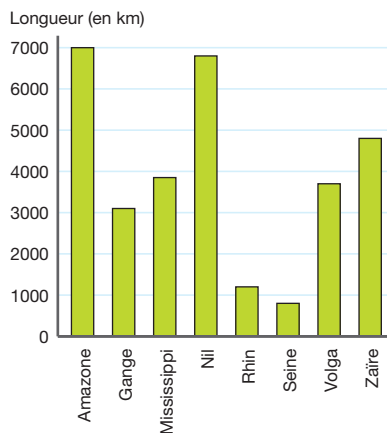


Le diagramme en colonnes

Dans un diagramme en colonnes, toutes les colonnes ont la même largeur; les hauteurs des colonnes sont proportionnelles aux mesures des grandeurs représentées.

Exemple

Longueur des fleuves.

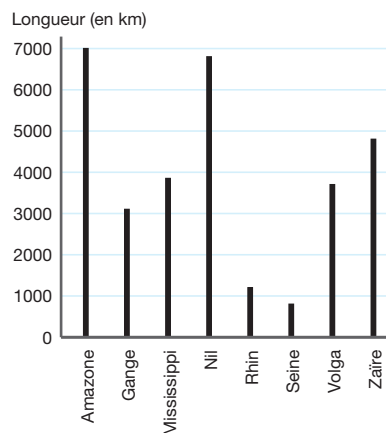


Le diagramme en bâtons

Dans un diagramme en bâtons, les hauteurs des bâtons sont proportionnelles aux mesures des grandeurs représentées.

Exemple

Longueur des fleuves.

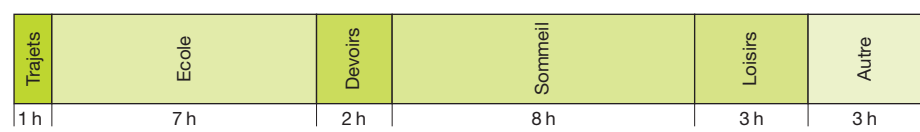


Le diagramme en barre

Dans un diagramme en barre, les longueurs des parties sont proportionnelles aux mesures des grandeurs représentées.

Exemple

Répartition des activités d'un élève durant 24 h.

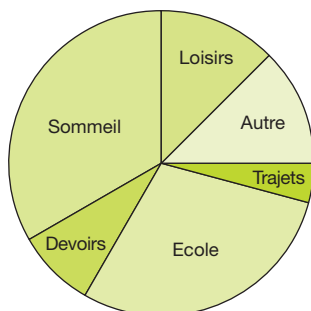


Le diagramme circulaire

Dans un diagramme circulaire, le rayon du cercle peut être choisi arbitrairement ; les mesures des angles des différentes parties sont proportionnelles aux mesures des grandeurs représentées.

Exemple

Répartition des activités d'un élève durant 24 h.



Remarque

Le diagramme en barre et le diagramme circulaire servent à représenter les parties (ici la durée de chaque activité) par rapport à un tout (ici 24 h).

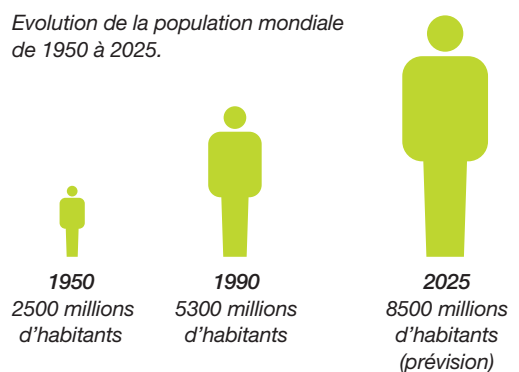
Le diagramme figuratif

Dans un diagramme figuratif, l'une des dimensions des figures est proportionnelle aux mesures des grandeurs représentées.

Exemple

Dans le diagramme figuratif ci-contre, il y a proportionnalité entre la hauteur des personnages et la population mondiale.

Evolution de la population mondiale de 1950 à 2025.



Remarque

Un diagramme figuratif est généralement ambigu, car il incite à comparer les aires des figures et non leurs longueurs uniquement.

ÉTYM Diagramme : du grec *diagramma*, figure dessinée, dessin.

Construire un diagramme circulaire

Méthode

Exemple Représenter la situation suivante à l'aide d'un diagramme circulaire.
On a demandé aux élèves d'une même classe d'un collège quel était leur sport préféré. Voici les réponses obtenues :

Sport	Ski	Football	Basket	Tennis	Volley	Natation
Nb. de voix	8	5	4	3	2	2

ÉTAPE 1

Trouver l'effectif total.

Le nombre total des voix exprimées :
 $8 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 = 24$

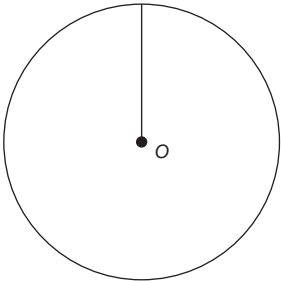
ÉTAPE 2

A l'aide d'un tableau de proportionnalité, calculer la valeur des angles en jeu.
(Vérifier que la somme des angles soit égale à 360° .)

		S	F	B	T	V	N
Nb. de voix	24	8	5	4	3	2	2
Mesure de l'angle en $^\circ$	360	120	75	60	45	30	30

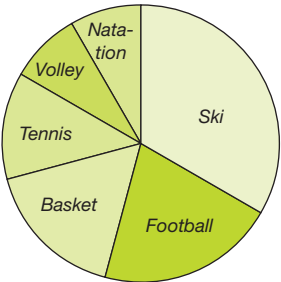
ÉTAPE 3

Construire un cercle de centre O et tracer un rayon.



ÉTAPE 4

A l'aide d'un rapporteur, construire successivement les différents secteurs de centre O en jou et les nommer.



✚ Proportionnalité (p. 55), Mesurer un angle à l'aide d'un rapporteur (p. 102)

Calcul littéral

● Expression littérale

Définition

Une **expression littérale** est une expression mathématique qui contient une ou plusieurs lettres appelées **variables**, **inconnues** ou **indéterminées**, suivant le contexte.

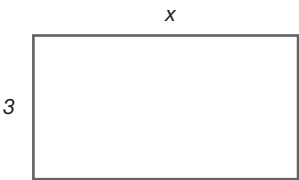
Exemples
 x ; $2 \cdot (y + 5)$; $4,8 - a + b$; $\frac{x^2}{3} + 3x$; $\frac{1}{z}$; $2y$; ... sont des expressions littérales.

- Les expressions littérales sont utiles pour :
- établir des formules, des expressions fonctionnelles dans ce cas, la lettre est appelée «**variable**» ;
 - résoudre des problèmes à l'aide d'équations dans ce cas, la lettre est appelée «**inconnue**» ;
 - prouver des conjectures sur les nombres dans ce cas, la lettre est appelée «**indéterminée**».

Remarque

Une expression littérale «en fonction de x » est une expression qui contient la lettre x .

Exemple
Les expressions littérales $2 \cdot (x + 3)$ ou $3 + 3 + x + x$ expriment le périmètre du rectangle en «fonction de x ».



● Alléger l'écriture d'expressions littérales

Des conventions d'écriture, des propriétés et des définitions permettent d'alléger les écritures des expressions littérales.

Conventions d'écritures	Exemples
On peut supprimer le signe de la multiplication entre :	
• Un nombre et une lettre lorsque le nombre est devant la lettre.	$5 \cdot y = 5y$
• Un nombre et une parenthèse lorsque le nombre est devant la parenthèse.	$3 \cdot (x + y) = 3(x + y)$
• Une lettre et une parenthèse lorsque la lettre est devant la parenthèse.	$a \cdot (b + 5) = a(b + 5)$

Propriétés et définitions		
$1 \cdot a = a$	$0 \cdot a = 0$	$(-1) \cdot a = -a$
$a \cdot a = a^2$	$a \cdot a \cdot a = a^3$	

Egalité de deux expressions littérales

Définition

Deux expressions littérales sont égales si elles donnent le même résultat quelle que soit la valeur numérique attribuée à chacune des lettres qui figurent dans ces deux expressions.

- Conséquences**
- Pour prouver que deux expressions littérales sont égales, on les réduit à l'aide des propriétés des opérations et des règles de priorité jusqu'à obtenir des expressions littérales identiques.

Exemple

Soit $A = 5m + 11 + 2(m - 3)$ et $B = 7m + 5$.

Ces deux expressions sont égales, en effet :

$$A = 5m + 11 + 2(m - 3)$$

$$A = 5m + 11 + 2m - 6$$

$$A = 5m + 2m + 11 - 6$$

$$A = 7m + 5$$

On peut donc conclure que $A = B$.

- Pour prouver que deux expressions littérales ne sont pas égales, il suffit de trouver une valeur numérique pour laquelle ces expressions donnent des résultats différents.

Exemple

$A = 5 + 3x$ et $B = 8x$ ne sont pas des expressions littérales égales, car pour $x = 4$,

A vaut $5 + 3 \cdot 4 = 17$ et B vaut $8 \cdot 4 = 32$.

Monôme

Définitions

- Un **monôme** est une expression littérale qui est égale au produit d'un nombre réel par une ou des lettres dont le ou les exposants sont des entiers naturels.
- Le nombre est appelé **coefficient du monôme**.
- Le produit des lettres est appelé **partie littérale du monôme**.

Exemples

Monôme	$4x^2y$	$5x$	7	y	$\frac{a^2b}{4}$	$-\frac{z}{2}$
Coefficient	4	5	7	1 (car $y = 1y$)	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
Partie littérale	x^2y	x	Par exemple x^0 car $7 = 7x^0$	y	a^2b	z

Par contre, $\frac{5}{x}$; $\sqrt{x}$; $x + 5$ ne sont pas des monômes.

Degré d'un monôme

Définition

Le **degré d'un monôme** est égal à la somme des exposants de sa partie littérale.

Exemples

Le degré du monôme $5x^2$ est 2.

Le degré du monôme $4x^2y$ est $2 + 1 = 3$; en effet, $4x^2y = 4x^2y^1$.

Le degré du monôme 7 est 0 ; en effet, $7 = 7x^0$, par exemple.

● Multiplication de monômes

Définition

Pour multiplier deux monômes, on multiplie leurs coefficients entre eux et leurs parties littérales entre elles.

Exemples

$$\begin{aligned} 3x \cdot 5y^2 &= 3 \cdot x \cdot 5 \cdot y^2 \\ &= 3 \cdot 5 \cdot x \cdot y^2 \\ &= 15xy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x^3y^2 \cdot 4x^2y &= -2 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot y \\ &= -2 \cdot 4 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot y \\ &= -8x^5y^3 \end{aligned}$$

● Monômes semblables

Définition

Deux monômes sont **semblables** s'ils ont la **même partie littérale**.

Exemples

- $5x^2y$ et $-3x^2y$ sont des monômes semblables, car ils ont la même partie littérale : x^2y .
- $-7x$ et x sont des monômes semblables, car ils ont la même partie littérale : x .

Contre-exemples

- $5x^2$ et $5x$ ne sont pas des monômes semblables, car ils n'ont pas la même partie littérale : x^2 n'étant pas égal à x .
- $7x^2y$ et $7xy^2$ ne sont pas des monômes semblables, car ils n'ont pas la même partie littérale : x^2y n'étant pas égal à xy^2 .

FA

● Addition ou soustraction de monômes semblables

Définition

Pour additionner (ou soustraire) deux monômes semblables :

- On additionne (ou soustrait) leurs coefficients.
- On conserve la partie littérale.

Exemples

$$\begin{aligned} 4x^2 + 7x^2 &= (4 + 7) \cdot x^2 \\ &= 11x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2y - 9x^2y &= (2 - 9)x^2y \\ &= -7x^2y \end{aligned}$$

⚠ La somme $4 + 5x^2$ ne peut pas être réduite, car les monômes 4 et $5x^2$ ne sont pas des monômes semblables.

● Polynôme

Définition

Un **polynôme** est une **somme de monômes**.

Ces monômes sont appelés les **termes** du polynôme.

Exemples

$\frac{y}{2} + 4$; $-x^2 + 1,5z$; $4xy^2 - 2y$; $5x^3$; ... sont des polynômes.

Par contre, $\frac{5}{x}$ n'est pas un polynôme, car $\frac{5}{x}$ n'est pas un monôme.

Remarque

Un polynôme peut être composé d'un seul ou de plusieurs monômes.

Exemples

$x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ est un polynôme formé de quatre termes.

$3x^2y$ est un polynôme formé d'un seul terme, c'est aussi un monôme.

$x - y$ est un binôme.

$x^2 + 2x + 1$ est un trinôme.

... Monôme (p. 68)

Réduction d'un polynôme

Définition Pour réduire un polynôme, on additionne (ou soustrait) ses monômes semblables.

Exemples

$$2x^2 - 4x + 5x^2 + x = 2x^2 + 5x^2 - 4x + x = \underline{7x^2 - 3x}$$

forme réduite

$$w^2 + 3 + 5w - 2w^2 - 8 + w = w^2 - 2w^2 + 5w + w + 3 - 8 = \underline{-w^2 + 6w - 5}$$

forme réduite

→ Monômes semblables (p. 69)

Degré d'un polynôme

Définition Le **degré d'un polynôme** est le degré le plus élevé de ses monômes une fois ce polynôme réduit.

Exemples

$$x + \frac{x^2}{5} \quad \text{est un polynôme de degré 2 (le monôme de plus haut degré est } \frac{x^2}{5} \text{).}$$

$$-2a^3 + a^3b - 4,4 \quad \text{est un polynôme de degré 4 (le monôme de plus haut degré est } a^3b \text{).}$$

Définition **Ordonner un polynôme** par rapport à l'une de ses lettres, c'est le réduire puis écrire ses monômes dans l'ordre croissant ou décroissant de leur degré.

Exemples

$$5m^2 + 2m - 1 \quad \text{est un polynôme ordonné dans l'ordre décroissant des puissances de } m.$$

$$-2 + a^3 + 2ab - a^2b^3 + b^4 \quad \text{est un polynôme ordonné dans l'ordre croissant des puissances de } b.$$

$$x^3 + 1 + x^2 + x \quad \text{est un polynôme qui n'est pas ordonné.}$$

→ Ordre croissant et ordre décroissant (p. 11), Degré d'un monôme (p. 68)

Addition de polynômes

Définition Pour additionner deux polynômes, on additionne chaque terme de ces polynômes.

Propriété Dans une expression littérale, on peut supprimer les parenthèses si elles ne sont précédées d'aucun signe ou du signe « + » et qu'elles ne sont pas suivies d'un signe « • », « : » ou d'une parenthèse.

Exemples

$$\begin{aligned} & (5x^2 - x) + (2x^2 + 9x - 10) \\ &= 5x^2 - x + 2x^2 + 9x - 10 \quad \text{Suppression des parenthèses précédées du signe +.} \\ &= 7x^2 + 8x - 10 \quad \text{Réduction du polynôme.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x + (-2x + 2) \\ &= 3x - 2x + 2 \quad \text{Suppression des parenthèses précédées du signe +.} \\ &= x + 2 \quad \text{Réduction du polynôme.} \end{aligned}$$

⚠ Dans l'expression $3x + (5x - 2) \cdot 3$, on ne peut pas enlever les parenthèses avant d'avoir développé le produit $(5x - 2) \cdot 3$ (priorité des opérations).

→ Priorités des opérations (p. 26), Polynôme (p. 69)

Polynômes opposés

Définition

Deux polynômes opposés sont deux polynômes dont la somme est égale à zéro.

Exemples

$6x^2$ et $-6x^2$ sont deux polynômes opposés, car $6x^2 + (-6x^2) = 6x^2 - 6x^2 = 0$.

$y^2 + 5y - 12$ et $-y^2 - 5y + 12$ sont opposés, car $(y^2 + 5y - 12) + (-y^2 - 5y + 12)$
 $= y^2 + 5y - 12 - y^2 - 5y + 12 = 0$.

Soustraction de polynômes

Définition

Pour soustraire un polynôme, on additionne son opposé.

Exemples

$$\begin{aligned} & 4y^3 - 2y + 5 - (3y^2 - 2y - 4) \\ &= 4y^3 - 2y + 5 + (-3y^2 + 2y + 4) \\ &= 4y^3 - 2y + 5 - 3y^2 + 2y + 4 \\ &= 4y^3 - 3y^2 + 9 \end{aligned}$$

Addition de l'opposé.

Suppression des parenthèses précédées du signe +.

Addition des monômes semblables.

Conséquence Soustraire un polynôme, c'est soustraire chaque terme de ce polynôme.

Exemples

$$\begin{aligned} & -6x^2 - 5x - 8 - (-3x^2 + 10x - 16) \\ &= -6x^2 - 5x - 8 - (-3x^2) - (+10x) - (-16) \\ &= -6x^2 - 5x - 8 + 3x^2 - 10x + 16 \\ &= -3x^2 - 15x + 8 \end{aligned}$$

→ Polynômes opposés (p. 71)

Somme ou produit d'une expression littérale

Définitions

Pour savoir si une expression littérale est une **somme** ou un **produit**, on regarde dans cette expression la dernière opération à effectuer en respectant les règles de priorité des opérations.

- Si c'est une **addition** ou une soustraction, l'expression est une **somme**.
- Si c'est une **multiplication** ou une division, l'expression est un **produit**.

Exemples

$10 + 3x \cdot 5$ est une somme, car on doit d'abord effectuer la multiplication et donc la dernière opération à effectuer est une addition.

$(10 + 3x) \cdot 5$ est un produit, la dernière opération à effectuer est une multiplication.

Multiplication de polynômes

Propriété 1 Pour multiplier un monôme par un polynôme, on distribue ce monôme sur chacun des termes du polynôme.

Exemples

$$2a \cdot (a - x) = 2a \cdot a - 2a \cdot x = 2a^2 - 2ax$$

$$-2a \cdot (ab - xy + z) = (-2a) \cdot ab - (-2a) \cdot xy + (-2a) \cdot z = -2a^2b + 2axy - 2az$$

Propriété 2 Pour multiplier un polynôme par un polynôme, on multiplie chaque terme du premier par chaque terme du second puis on réduit la somme obtenue lorsque c'est possible.

Exemple

$$\begin{aligned} (y-2) \cdot (2x+y-5) &= y \cdot 2x + y \cdot y + y \cdot (-5) + (-2) \cdot (2x) + (-2) \cdot y + (-2) \cdot (-5) \\ &= y \cdot 2x + y \cdot y - y \cdot 5 - 2 \cdot 2x - 2y + 2 \cdot 5 \\ &= 2xy + y^2 - 5y - 4x - 2y + 10 \\ &= 2xy + y^2 - 7y - 4x + 10 \end{aligned}$$

Conséquence Quels que soient les monômes a , b , c et d ,
 $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$.
 Cette égalité est appelée **double distributivité**.

→ Monôme (p. 68), Polynôme (p. 69)

Produits remarquables

Propriétés Quels que soient les monômes a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemples

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$(2y - 1)^2 = 4y^2 - 4y + 1$$

$$\left(\frac{x}{3} - 5\right)\left(\frac{x}{3} + 5\right) = \frac{x^2}{9} - 25$$

Remarque Ces produits remarquables appelés aussi **identités remarquables** ne sont que des cas particuliers de la double distributivité.
 Il est important de les repérer surtout lorsqu'on doit factoriser une expression.

Exemple

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Développement d'un produit

Définition

Développer un produit, c'est le transformer en une somme. On utilise alors la distributivité ou les produits remarquables.

Une fois le produit développé, on réduit le polynôme lorsque c'est possible.

Exemples

Avec la distributivité :

$$5xy(2x - 1 + 4y) = 10x^2y - 5xy + 20xy^2$$

$$(2a + 3)(a^2 - 2a) = 2a^3 - 4a^2 + 3a^2 - 6a = 2a^3 - a^2 - 6a$$

Avec un produit remarquable :

$$(2x + 3y)(2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$$

➡ Réduction d'un polynôme (p. 70), Produits remarquables (p. 72)

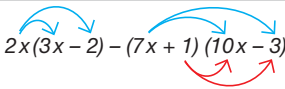
Développer et réduire une expression littérale

Méthode 1

En utilisant la distributivité simple et double.

Exemple Développer et réduire l'expression

$$2x(3x - 2) - (7x + 1)(10x - 3).$$

ÉTAPE 1	
Utiliser la distributivité pour développer chacun des produits.	 $2x(3x - 2) - (7x + 1)(10x - 3)$ $= (2x \cdot 3x - 2x \cdot 2) - (7x \cdot 10x - 7x \cdot 3 + 1 \cdot 10x - 1 \cdot 3)$
ÉTAPE 2	
Supprimer les parenthèses autour des polynômes en utilisant les propriétés de l'addition et de la soustraction de polynômes.	$= (6x^2 - 4x) - (70x^2 - 21x + 10x - 3)$ $= 6x^2 - 4x - 70x^2 + 21x - 10x + 3$
ÉTAPE 3	
Réduire le polynôme en additionnant les monômes semblables.	$= -64x^2 + 7x + 3$

Méthode 2

En utilisant un produit remarquable.

Exemple Développer et réduire l'expression $(5x - 2y)^2$.

ÉTAPE 1	
Identifier le produit remarquable à utiliser.	Il s'agit d'élever au carré une différence ; le produit remarquable adéquat est donc : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ avec } a = 5x \text{ et } b = 2y$
ÉTAPE 2	
Développer l'expression en utilisant cette formule.	$(5x - 2y)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 2y + (2y)^2$ $= 25x^2 - 20xy + 4y^2$

Remarque

Ces méthodes peuvent se combiner.

Exemples

Développer et réduire

$$2(2x + 3)(2x - 3) = 2(4x^2 - 9)$$

$$= 8x^2 - 18$$

Utilisation d'un produit remarquable.
Distributivité.

➡ Réduction d'un polynôme (p. 70), Produits remarquables (p. 72)

Calculer la valeur numérique d'une expression littérale connaissant la valeur de la lettre

Méthode

Exemple Calculer la valeur de l'expression $3x + 6x^2 - x(5 + x)$ pour $x = 4$.

ÉTAPE 1	Développer et réduire l'expression littérale.	$3x + 6x^2 - x(5 + x) = 3x + 6x^2 - 5x - x^2$ $= -2x + 5x^2$
ÉTAPE 2	Remplacer la lettre par la valeur numérique choisie en rajoutant, si nécessaire, les signes opératoires de la multiplication.	$\text{pour } x = 4$ $-2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2$
ÉTAPE 3	Effectuer les calculs en respectant les règles de priorité.	$= -8 + 5 \cdot 16$ $= -8 + 80$ $= 72$

➡ Priorités des opérations (p. 26), Développer et réduire une expression littérale (p. 73)

Factorisation d'une expression littérale

Définition

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

Exemple

$$12a^2 - 8a + 20ab \quad \text{Somme de 3 monômes.}$$

$$= 4a \cdot 3a - 4a \cdot 2 + 4a \cdot 5b$$

$$= 4a(3a - 2 + 5b) \quad \text{Produit d'un monôme (4a) et d'un polynôme (3a - 2 + 5b).}$$

➡ Somme ou produit d'une expression littérale (p. 71)

Factoriser une expression littérale

Méthode 1

En utilisant la mise en évidence d'un monôme $ab + ac = a(b + c)$.

Exemple Factoriser l'expression $10x^3 - 5x^2 + 5x$.

ÉTAPE 1	Vérifier que l'expression soit sous sa forme réduite.	Les termes sont : $10x^3$, $-5x^2$ et $5x$. Il n'y a aucun monôme semblable, donc l'expression est réduite.
ÉTAPE 2	Y a-t-il des facteurs communs dans chaque monôme ? Si oui, les mettre tous en évidence.	Le facteur commun à chaque monôme est $5x$. On peut donc le mettre en évidence : $10x^3 - 5x^2 + 5x$ $= 5x \cdot 2x^2 - 5x \cdot x + 5x \cdot 1$ $= 5x(2x^2 - x + 1)$
ÉTAPE 3	Contrôler qu'il n'y ait plus de facteurs communs dans la parenthèse.	Il n'y a plus de facteur commun.

Remarque

On peut vérifier la factorisation en développant le produit obtenu.

$$5x(2x^2 - x + 1) = 10x^3 - 5x^2 + 5x.$$

Méthode 2

En utilisant la mise en évidence d'un polynôme.

Exemple Factoriser l'expression $(5z - 6)(8z - 1) - 4z(8z - 1)$.

ÉTAPE 1	
Repérer chacun des termes de la somme.	Les termes sont : $(5z - 6)(8z - 1)$ et $4z(8z - 1)$
ÉTAPE 2	
Dans ces termes, y a-t-il un facteur commun ?	Oui : $(8z - 1)$
ÉTAPE 3	
Si oui, le mettre en évidence et additionner ou soustraire les termes semblables lorsque c'est possible.	$(5z - 6)(8z - 1) - 4z(8z - 1) = (8z - 1)(5z - 6 - 4z)$ $= (8z - 1)(z - 6)$

Méthode 3

En utilisant un produit remarquable.

Exemple Factoriser l'expression $9x^2 + 12xy + 4y^2$.

ÉTAPE 1	
Repérer les termes de la somme.	Les termes sont : $9x^2$, $12xy$ et $4y^2$.
ÉTAPE 2	
Dans ces termes, y a-t-il des facteurs communs à chacun d'entre eux ?	Non.
ÉTAPE 3	
Est-il possible d'utiliser un produit remarquable pour factoriser l'expression ?	Il y a trois termes. Deux d'entre eux sont des carrés : $9x^2$ et $4y^2$. On peut donc supposer que $a^2 = 9x^2$ et $b^2 = 4y^2$, donc que $a = 3x$ et $b = 2y$. Le troisième terme est-il égal à $2ab$? $2 \cdot 3x \cdot 2y = 12xy$. Oui, on peut par conséquent écrire : $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x + 2y)^2$

Remarque

Ces méthodes peuvent se combiner.

Exemple

$$4x^3y - 16xy = 4xy(x^2 - 4)$$
$$= 4xy(x + 2)(x - 2)$$

D'abord, mise en évidence d'un facteur commun.

Puis, utilisation d'un produit remarquable.

➡ Produits remarquables (p. 72), Développer et réduire une expression littérale (p. 73)

Equations

Equation

Définitions

- Une **équation** est une **égalité conditionnelle** entre deux expressions littérales. En effet, cette égalité n'est pas forcément vraie : elle peut être vérifiée pour une, plusieurs ou aucune valeur numérique des lettres. Ces lettres sont appelées **inconnues**.
- La ou les valeurs qui vérifient l'égalité sont appelées **solutions de l'équation**. Résoudre une équation c'est trouver l'**ensemble de ses solutions**, souvent noté **S**.

Exemples

- 16 est la solution de l'équation $4x = 64$, car $4 \cdot 16 = 64$. On note : $S = \{16\}$.
- (-3) et 3 sont les solutions de l'équation $x^2 = 9$, car $(-3)^2 = 9$ et $3^2 = 9$.
On note : $S = \{-3; 3\}$.
- L'équation $a + 1 = a$ n'a pas de solution. On note alors : $S = \emptyset$ ou $S = \{ \}$.
- Tous les nombres sont les solutions de l'équation $2x = 2x$. On note alors : $S = \mathbb{R}$.

Remarque

La partie à gauche de l'égalité est appelée **membre de gauche** et la partie à droite, **membre de droite**.

Exemples

$x + 3,2 = 10$; $a^2 - 2a - 7 = 2a - 2$; $5x + y = 18 - x$; ... sont des équations.
membre membre
de gauche de droite

Equations équivalentes

Définition

Deux équations équivalentes sont deux équations qui ont le même ensemble de solutions.

Exemples

Les équations $x - 5 = 8 - x$ et $5x = 32,5$

sont équivalentes, car elles ont le même ensemble de solutions : $S = \{6,5\}$.

Les équations $10 - 2y = y^2 + y$ et $y^2 + 3y - 10 = 0$

sont équivalentes, car elles ont le même ensemble de solutions : $S = \{-5; 2\}$.

Les équations $5x = 15$ et $5x^2 = 15x$

ne sont pas équivalentes, parce que 0 est une solution de la deuxième équation sans en être une de la première.

Equation du premier degré à une inconnue

Définition

Une équation du premier degré d'inconnue x est une équation équivalente à une équation du type **$ax + b = cx + d$** .

Exemples

$$5x - 6 = 3x + 4$$

$$3x - 2 = 0 \quad (3x - 2 = 0x + 0)$$

$$5x + 8 = -5 \quad (5x + 8 = 0x - 5)$$

Remarque

Une équation du premier degré à une inconnue peut avoir une, aucune ou une infinité de solutions.

→ Equations équivalentes (p. 76)

Règles d'équivalence

Pour obtenir une équation équivalente à une équation donnée, on peut :

Règle 1 Développer, réduire ou factoriser chacun des membres de cette équation.

Exemple Si $3(x - 5) = 12x + 9 - 2x$, alors $3x - 15 = 10x + 9$.

Règle 2 Ajouter ou soustraire un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de cette équation.

Exemple Si $2x - 11 = 8$, alors $2x - 11 + 11 = 8 + 11$ donc $2x = 19$.

Règle 3 Multiplier ou diviser par un même nombre non nul les deux membres de cette équation.

Exemple Si $3x = 21$, alors $\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$ donc $x = 7$.

⚠ Si l'on divise ou multiplie par l'inconnue les deux membres d'une équation, on obtient une équation non équivalente à la première.

Exemple

L'équation $x^2 = x$ a deux solutions : 0 et 1.

Si l'on divise les deux membres par x , on obtient l'équation $x = 1$ qui n'a qu'une solution : 1.

➡ Développer et réduire une expression littérale (p. 73),
Factorisation d'une expression littérale (p. 74), Equations équivalentes (p. 76)

FA

Résoudre une équation du premier degré à une inconnue

Méthode

Exemple Résoudre l'équation $9(x - 1) - 4x = 9 - x$.

ÉTAPE 1 Développer et réduire chacun de ses membres (règle d'équivalence 1).	$\begin{aligned} 9(x - 1) - 4x &= 9 - x \\ 9x - 9 - 4x &= 9 - x \\ 5x - 9 &= 9 - x \end{aligned}$
ÉTAPE 2 Appliquer la règle d'équivalence 2 pour obtenir une équation dans laquelle le terme avec l'inconnue est dans l'un des membres et le terme ne contenant pas l'inconnue dans l'autre.	$\begin{array}{l l} 5x - 9 &= 9 - x \\ 6x - 9 &= 9 \\ 6x &= 18 \end{array} \quad \begin{array}{l} + x \\ + 9 \end{array}$
ÉTAPE 3 Diviser chaque membre par le coefficient de l'inconnue (s'il n'est pas égal à 1 ou 0) pour trouver la solution (règle d'équivalence 3).	$\begin{array}{l l} 6x &= 18 \\ x &= 3 \end{array} \quad : 6$
ÉTAPE 4 Ecrire l'ensemble de solutions.	$S = \{3\}$

Remarque

L'ensemble de solutions est correct si, en remplaçant l'inconnue par le ou les nombres trouvés, l'équation initiale est vérifiée.

3 est bien solution de l'équation $9(x - 1) - 4x = 9 - x$, car :

$$\begin{aligned} 9(3 - 1) - 4 \cdot 3 &= 9 - 3 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

➡ Développer et réduire une expression littérale (p. 73), Règles d'équivalence (p. 77)

Equation du premier degré à deux inconnues

Définitions

- Une **équation du premier degré à deux inconnues** x et y est une équation équivalente à une équation de la forme :
 $ax + by = c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ et $b \neq 0$).
- Une solution d'une équation à deux inconnues x et y est un couple de nombres $(x ; y)$ qui vérifient cette équation.

Exemple

Le couple $(1 ; 2)$ est une solution de l'équation à deux inconnues $2x + 3y = 8$, car : $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$.

$\downarrow$ $\downarrow$
 x y

Dans cette équation, il y a une infinité d'autres couples solution. Par exemple $(4 ; 0)$; $(2 ; \frac{4}{3})$; ...

→ Equations équivalentes (p. 76)

Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Définitions

- Deux équations du premier degré à deux inconnues considérées simultanément forment un système d'équations.
 Un **système d'équations** du premier degré à deux inconnues x et y est équivalent à un système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c & (a, b, c \in \mathbb{R}) \\ a'x + b'y = c' & (a, b, c \in \mathbb{R}) \end{cases}$$
- Résoudre ce système, c'est trouver l'**ensemble des couples de nombres** qui vérifient simultanément les deux équations.

Exemple

$$\begin{cases} 3x - y = -10,5 \\ x + 4y = 16 \end{cases}$$

est un système du premier degré de deux équations à deux inconnues dont l'ensemble de solutions est $S = \{(-2 ; 4,5)\}$

En effet :
$$\begin{cases} 3 \cdot (-2) - 4,5 = -10,5 \\ (-2) + 4 \cdot 4,5 = 16 \end{cases}$$

Remarques

- La résolution algébrique d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues consiste à revenir à une équation à une inconnue.
- Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues peut avoir une, aucune ou une infinité de solutions.

Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Méthode 1

Par substitution.

Exemple Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x + 6y = -12 \end{cases}$$

ÉTAPE 1 A l'aide des règles d'équivalence, exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir d'une des équations.	$\begin{cases} 4x + y = 5 & \text{①} \\ 3x + 6y = -12 & \text{②} \end{cases}$ Dans ce système, le plus simple est d'exprimer y en fonction de x à l'aide de la première équation. $4x + y = 5 \quad \text{①}$$y = 5 - 4x$
ÉTAPE 2 Remplacer, dans la deuxième équation, l'inconnue isolée par l'expression obtenue.	$\begin{array}{l} 3x + 6(5 - 4x) = -12 \\ 3x + 30 - 24x = -12 \\ 30 - 21x = -12 \end{array} \quad \left \begin{array}{l} \\ \\ -30 \end{array} \right.$
ÉTAPE 3 Résoudre l'équation à une inconnue ainsi obtenue à l'aide des règles d'équivalence.	$\begin{array}{l} -21x = -42 \\ x = 2 \end{array} \quad \left \begin{array}{l} : (-21) \\ \end{array} \right.$
ÉTAPE 4 Calculer la valeur numérique de la deuxième inconnue en remplaçant la lettre par la valeur trouvée dans la première équation.	$\begin{array}{l} y = 5 - 4x \\ y = 5 - 4 \cdot 2 \\ y = -3 \end{array}$
ÉTAPE 5 Ecrire l'ensemble de solutions.	$S = \{ (2 ; -3) \}$

Remarque

L'ensemble de solutions est correct si, en remplaçant les inconnues par leur valeur respective, les deux équations initiales sont vérifiées.
Le couple $(2 ; -3)$ est solution du système, car :

$$\begin{cases} 4 \cdot 2 + (-3) = 5 \\ 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) = -12 \end{cases}$$

Méthode 2

Par combinaison linéaire.

Exemple Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 5x = 2y + 1 \end{cases}$$

ÉTAPE 1

A l'aide des règles d'équivalence, transformer les deux équations pour les ramener à un système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 5x = 2y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

ÉTAPE 2

Multiplier ou diviser les deux membres de la première équation par un même nombre et ceux de la deuxième équation par un même nombre de telle façon que les coefficients d'une des inconnues soient opposés.

Additionner les deux équations membre à membre, pour que l'une des inconnues disparaisse.

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases} & \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} & \\ + \begin{cases} 4x + 6y = 54 \\ 15x - 6y = 3 \end{cases} & & \\ \hline 19x + 0y = 57 & & \end{array}$$

ÉTAPE 3

Résoudre une équation à une inconnue ainsi obtenue à l'aide des règles d'équivalence.

$$\begin{array}{rcl} 19x = 57 & & : 19 \\ x = 3 & & \end{array}$$

ÉTAPE 4

Remplacer la lettre par sa valeur dans une des équations du système et déterminer la deuxième inconnue.

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot 3 + 3y = 27 & & -6 \\ 3y = 21 & & : 3 \\ y = 7 & & \end{array}$$

ÉTAPE 5

Noter l'ensemble de solutions.

$$S = \{(3; 7)\}$$

Remarque

L'ensemble de solutions est correct si, en remplaçant les inconnues par leur valeur respective, les deux équations initiales sont vérifiées.

Le couple (3 ; 7) est solution du système, car :

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 27 \\ 5 \cdot 3 = 2 \cdot 7 + 1 \end{cases}$$

→ Règles d'équivalence (p. 77)

Equation du deuxième degré à une inconnue

Définition

Une **équation du deuxième degré** d'inconnue x est une équation qui est équivalente à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$).

Exemples

$$7x^2 + x - 10 = 0$$

$$-3x^2 + 84 = 0$$

$$x^2 + 8x = -5$$

→ Equations équivalentes (p. 76)

● Résolution d'une équation du deuxième degré à une inconnue

Propriété 1 Pour qu'un produit de facteur soit nul, il faut et il suffit qu'un des facteurs soit nul. Quels que soient les nombres n et m , si $n \cdot m = 0$ signifie que $n = 0$ ou $m = 0$ ($n, m \in \mathbb{R}$).

Exemple

Si $(2x - 3)(x + 2) = 0$, alors $2x - 3 = 0$ ou $x + 2 = 0$.

Définition Le **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est le nombre Δ défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$).

Propriétés 2 Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$).

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation a **deux solutions** :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\text{formule de Viète})$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation a **une seule solution** :

$$x_1 = x_2 = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\} \quad (\text{formule de Viète})$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a **pas de solution** :

$$S = \emptyset$$

Exemples

- $6x^2 + x - 2 = 0$
 $a = 6$; $b = 1$; $c = -2$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49$
 $\Delta > 0$, cette équation possède deux solutions.

Comme $\sqrt{49} = 7$, alors

$$S = \left\{ \frac{-1+7}{12} ; \frac{-1-7}{12} \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} ; -\frac{2}{3} \right\}$$

- $\frac{x^2}{2} - 4x + 8 = 0$
 $a = \frac{1}{2}$; $b = -4$; $c = 8$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 16 - 16 = 0$
 $\Delta = 0$, cette équation possède une seule solution.

$$x = \frac{-(-4)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{1} = 4$$

$$S = \{4\}$$

- $x^2 + 2x + 2 = 0$
 $a = 1$; $b = 2$; $c = 2$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$
 $\Delta < 0$, cette équation n'a pas de solution.
 $S = \emptyset$

Remarque Résolution de l'équation $x^2 = n$ ($n \in \mathbb{R}$)

- Si $n > 0$ l'équation possède deux solutions opposées $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$.
- Si $n = 0$ l'équation a une seule solution $\sqrt{0} = 0$.
- Si $n < 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Résoudre une équation du deuxième degré à une inconnue

Méthode 1

Par factorisation.

Exemple Résoudre l'équation $x^2 = -5x$.

ÉTAPE 1	S'assurer que l'équation est écrite sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Si ce n'est pas le cas, effectuer la ou les transformations nécessaires.	$\begin{array}{rcl} x^2 & = & -5x \\ x^2 + 5x & = & 0 \end{array} \quad \left \begin{array}{l} + 5x \end{array} \right.$
ÉTAPE 2	Factoriser le membre contenant l'inconnue à l'aide des méthodes connues.	Par mise en évidence, on obtient : $x(x + 5) = 0$
ÉTAPE 3	Appliquer la propriété : si $a \cdot b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.	Pour que ce produit soit égal à 0, il faut que $x = 0$ ou que $x = -5$.
ÉTAPE 4	Ecrire l'ensemble de solutions.	$S = \{-5 ; 0\}$

Remarque

Pour vérifier que l'ensemble de solutions est correct, on peut remplacer l'inconnue par le ou les nombres trouvés.

$\{-5 ; 0\}$ est bien l'ensemble de solutions de l'équation $x^2 = -5x$, car :
 $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5)$ et $0^2 = (-5) \cdot 0$.

→ Factorisation d'une expression littérale (p. 74)

Méthode 2

A l'aide du discriminant.

Exemple Résoudre l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$.

ÉTAPE 1	S'assurer que l'équation est écrite sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Si ce n'est pas le cas, effectuer la ou les transformations nécessaires.	C'est bien le cas donc on peut passer à l'étape 2.
ÉTAPE 2	Calculer le discriminant et regarder s'il est plus grand, plus petit ou égal à 0. $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$ Le discriminant est plus grand que 0, donc l'équation a deux solutions.
ÉTAPE 3	Calculer les deux solutions avec la formule de Viète. $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 1$ $x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -3$
ÉTAPE 4	Ecrire l'ensemble de solutions.	$S = \{-3 ; 1\}$

Remarque

Pour vérifier que l'ensemble de solutions est correct, on peut remplacer l'inconnue par le ou les nombres trouvés.

$\{-3 ; 1\}$ est bien l'ensemble de solutions de l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$, car :
 $(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 0$ et $1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$.

● Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule

En mathématiques, on utilise de très nombreuses formules qui relient différentes grandeurs. Dans ces formules, si l'on ne connaît pas la valeur d'une seule des lettres, on peut la calculer.

Exemple
Dans la formule $A = L \cdot l$ qui donne l'aire d'un rectangle, si l'on connaît A et L , on peut calculer l .

Utiliser une formule pour calculer une mesure de grandeur

Méthode

Exemple 1 Calculer la petite base b d'un terrain qui a la forme d'un trapèze, sachant que sa grande base $B = 150\text{ m}$, sa hauteur $h = 200\text{ m}$ et son aire $A = 2,7\text{ ha}$.

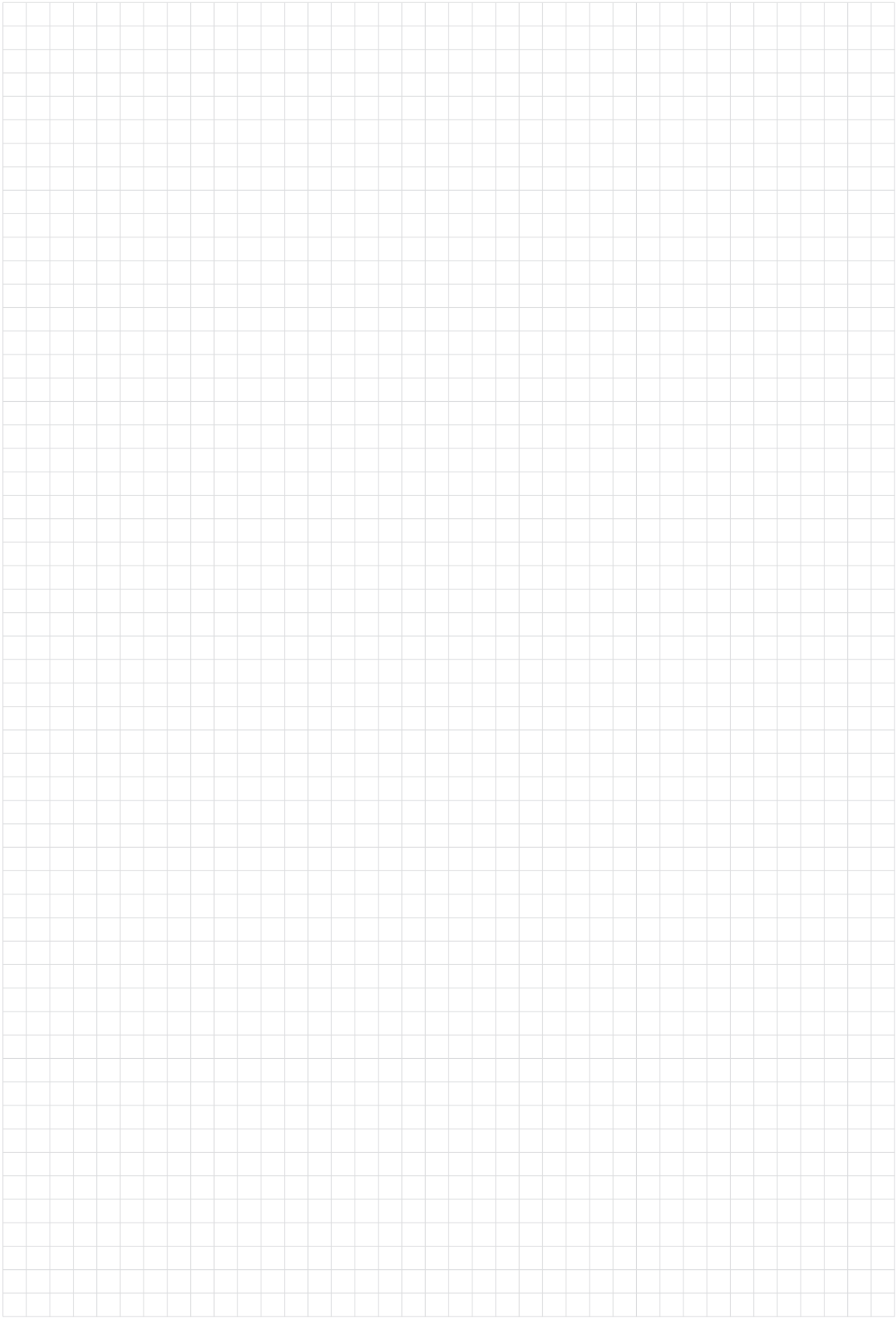
ÉTAPE 1	Ecrire la formule liant les grandeurs en jeu dans la question.	$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$
ÉTAPE 2	Harmoniser les unités.	$2,7\text{ ha} = 27\,000\text{ m}^2$
ÉTAPE 3	Remplacer dans cette formule les lettres connues par leurs valeurs.	$27\,000 = \frac{150 + b}{2} \cdot 200 \quad \cdot 2$
ÉTAPE 4	Calculer la valeur cherchée en appliquant les règles d'équivalence pour résoudre l'équation.	$\begin{array}{l} 54\,000 = (150 + b) \cdot 200 \\ 54\,000 = 30\,000 + 200b \\ 24\,000 = 200b \\ b = \frac{24\,000}{200} = 120 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ - 30\,000 \\ : 200 \end{array}$
ÉTAPE 5	Conclure.	Donc la petite base b est égale à 120 m .

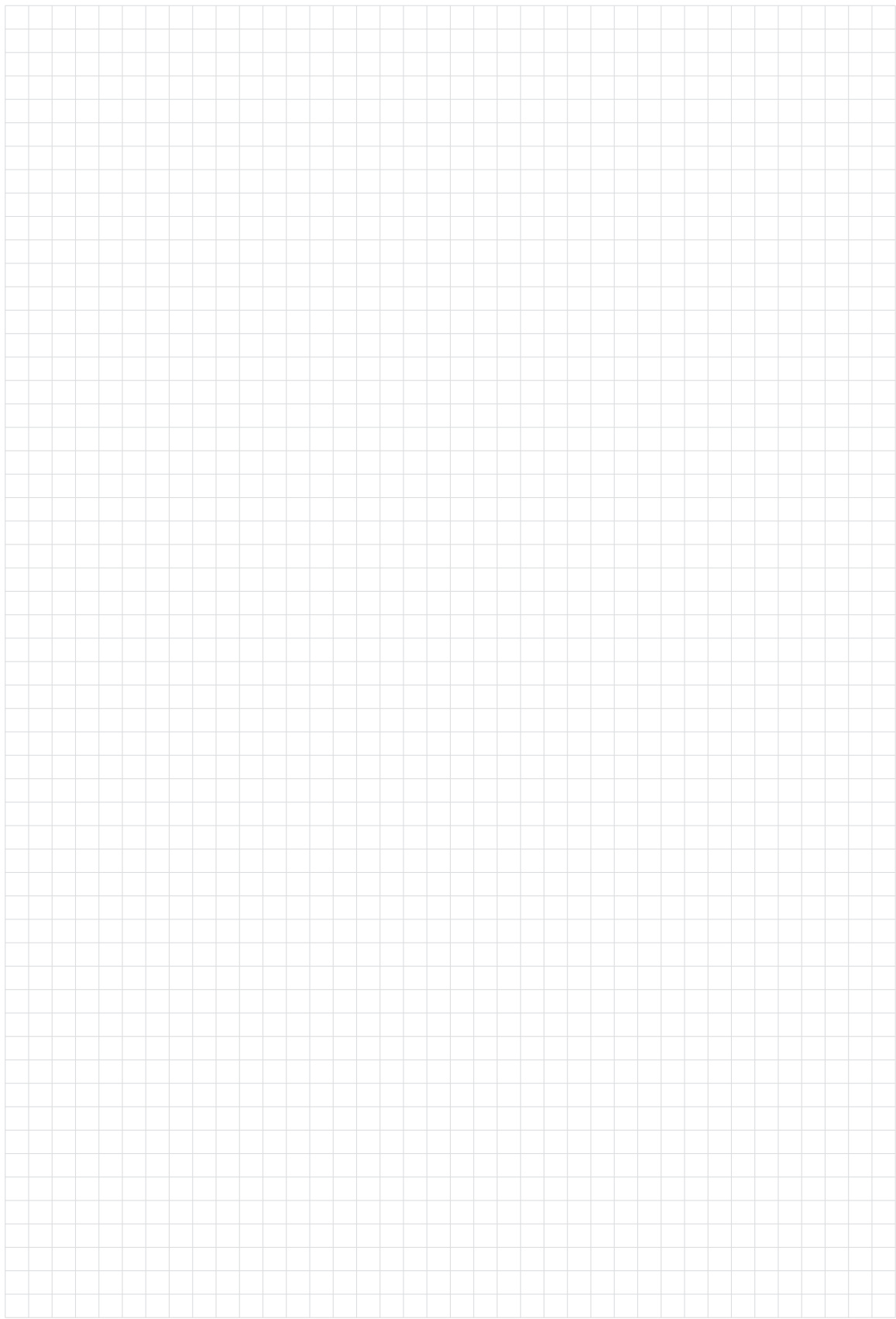
FA

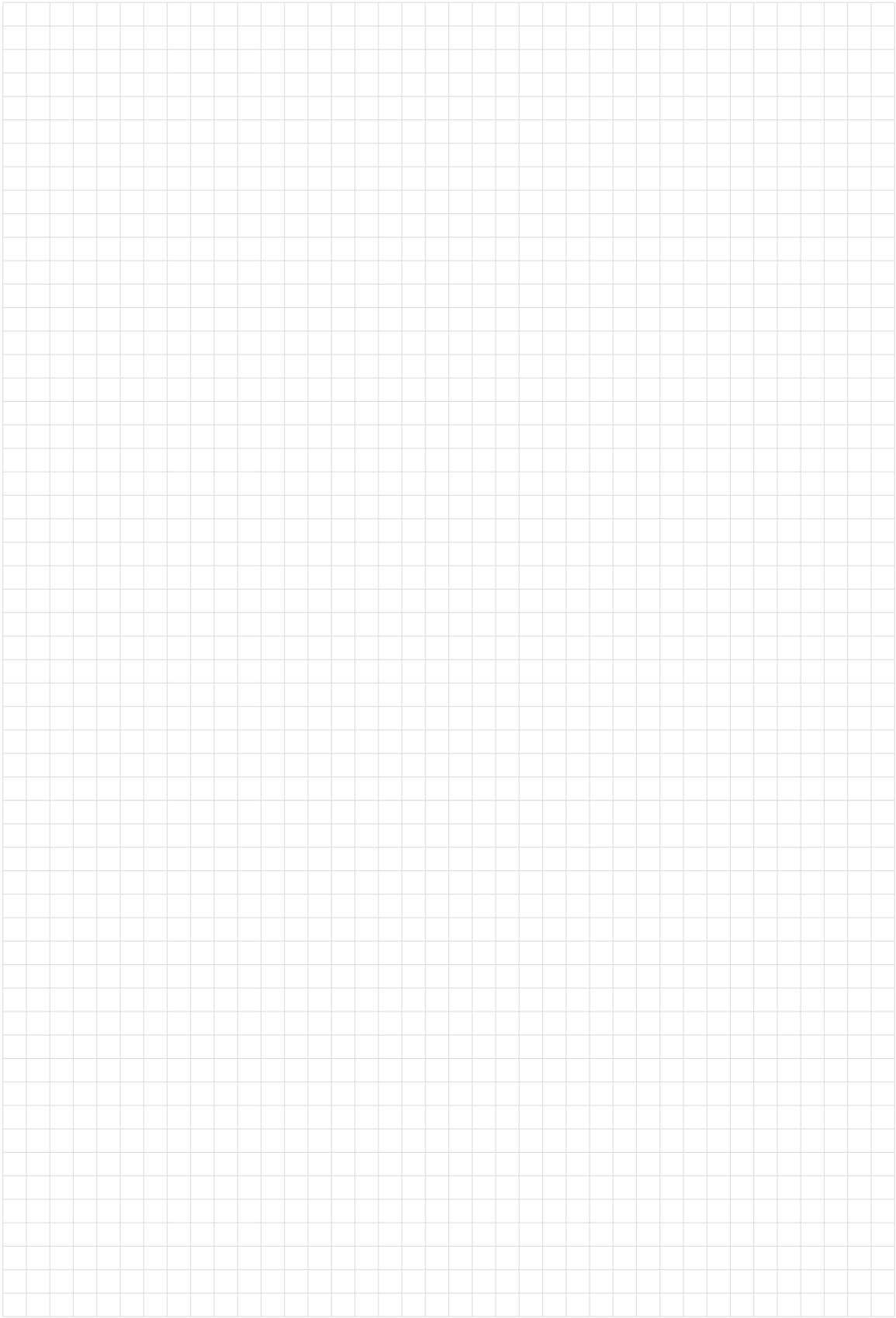
Méthode

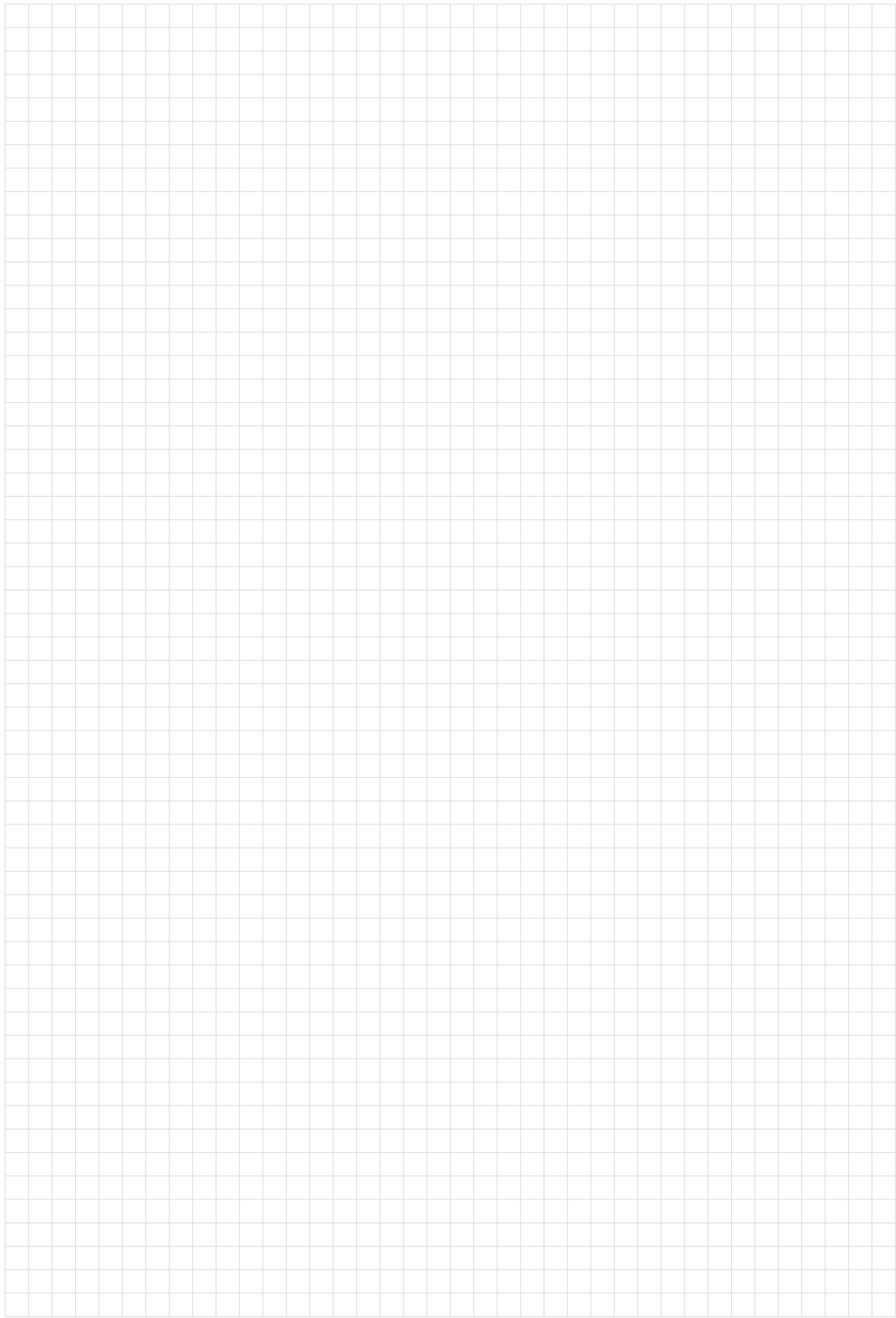
Exemple 2 Un piéton se déplace à la vitesse moyenne de 5 km/h . Quel temps va-t-il mettre pour parcourir $7\,000\text{ m}$?

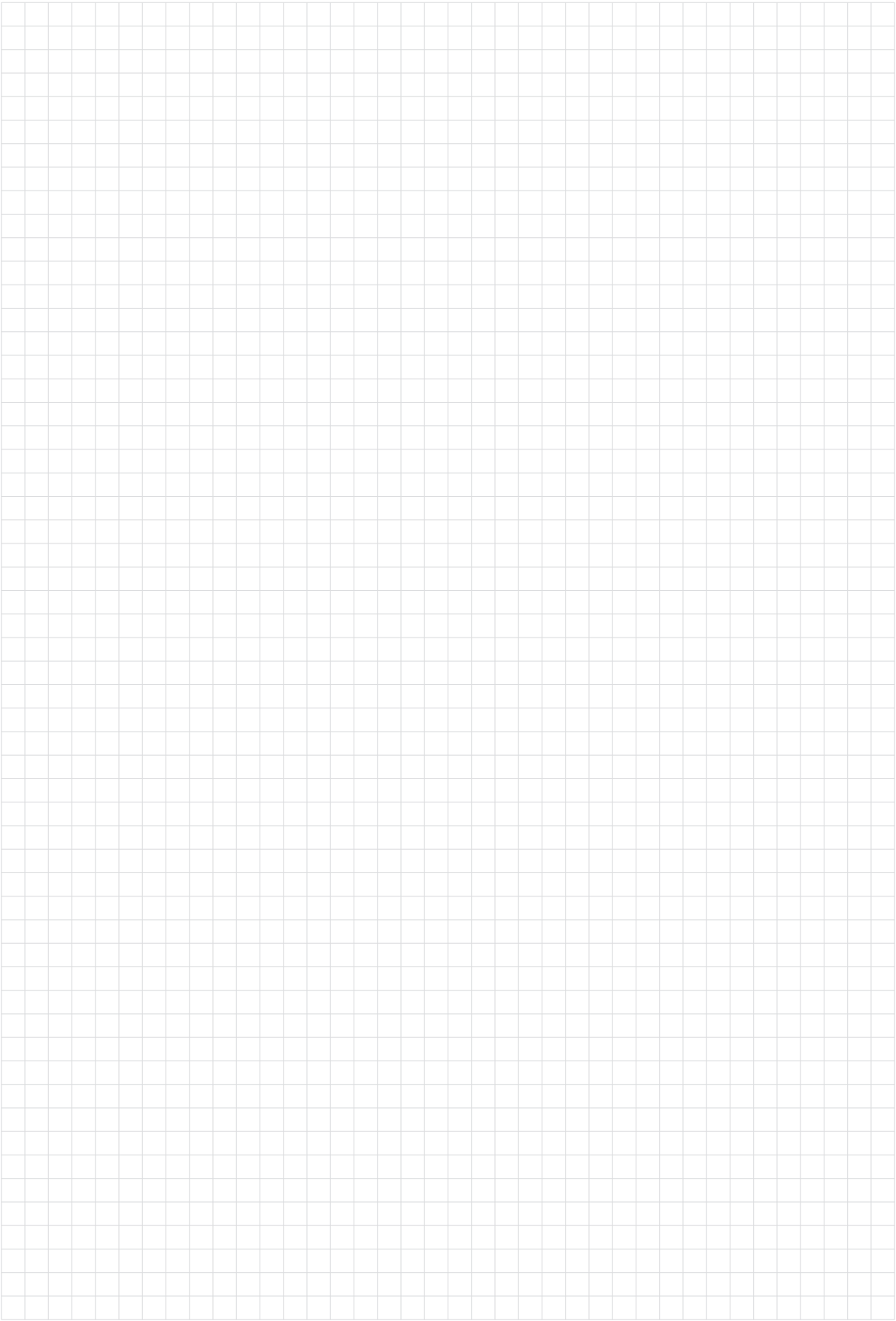
ÉTAPE 1	Ecrire la formule liant les grandeurs en jeu dans la question.	$v = \frac{d}{t}$
ÉTAPE 2	Harmoniser les unités.	$7\,000\text{ m} = 7\text{ km}$ La vitesse est donnée en km/h et la distance en km . Le temps trouvé sera donc en h .
ÉTAPE 3	Remplacer dans cette formule les lettres connues par leurs valeurs.	$5 = \frac{7}{t} \quad \cdot t$
ÉTAPE 4	Calculer la valeur cherchée en appliquant les règles d'équivalence pour résoudre l'équation.	$\begin{array}{l} 5 \cdot t = 7 \\ t = 1,4 \end{array} \quad : 5$
ÉTAPE 5	Conclure.	Le piéton va mettre $1,4\text{ h}$, ce qui correspond à $1\text{ h } 24\text{ min}$.











Espace

- Figures géométriques planes
- Transformations géométriques
- Géométrie dans l'espace

Figures géométriques planes

● Droite

Définition

La droite AB est constituée d'une infinité de points alignés avec A et B .

Notation

La droite qui passe par les points A et B est appelée droite AB .
On peut aussi la désigner par une lettre minuscule.

Exemple

La droite AB ou la droite d .



Remarque

Par deux points distincts, il ne passe qu'une seule droite.
Une droite n'a ni début ni fin, sa représentation peut être prolongée à l'infini.

● Points alignés

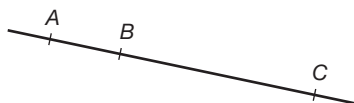
Définition

Trois points (ou plus) sont alignés s'ils appartiennent à une même droite.

Exemples

○ Les points A , B et C sont alignés, car ils appartiennent à une même droite.

○ Les points D , E et F ne sont pas alignés, car ils ne se trouvent pas tous sur une même droite.



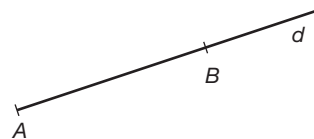
● Demi-droite

Définition

Une demi-droite est une portion de droite limitée par un point. Ce point est appelé l'origine de la demi-droite.

Exemple

On a représenté ci-contre la demi-droite AB , d'origine A et passant par B .
On peut aussi l'appeler demi-droite Ad .



● Segment

Définition

Un segment est une portion de droite limitée par deux points. Ces deux points sont appelés les extrémités du segment.

Exemple

On a représenté ci-contre le segment AB , dont les extrémités sont les points A et B .



Remarque

Une droite, une demi-droite et un segment sont constitués d'une infinité de points. Seul le segment a une longueur déterminée et est donc mesurable.

Distance entre deux points

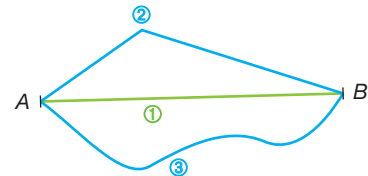
Définition

La distance entre deux points est la longueur du plus court chemin joignant ces deux points. C'est par conséquent la longueur du segment ayant comme extrémités ces deux points.

Exemple

Le plus court chemin joignant les deux points A et B est le segment AB (le chemin ① est plus court que les chemins ② et ③).

On note $AB = 4 \text{ cm}$



Distance d'un point à une droite

Définition

La distance d'un point à une droite est la longueur du plus court chemin de ce point à la droite.

Propriété

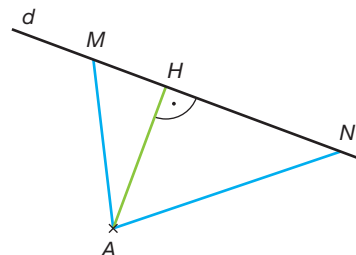
La distance du point A à la droite d est la longueur du segment AH perpendiculaire à la droite d .

Exemple

La distance du point A à la droite d est de 2 cm .

$AH < AM$

$AH < AN$



Distance entre deux droites parallèles

Définition

La distance entre deux droites parallèles est la longueur du plus court chemin joignant ces deux droites.

Propriété

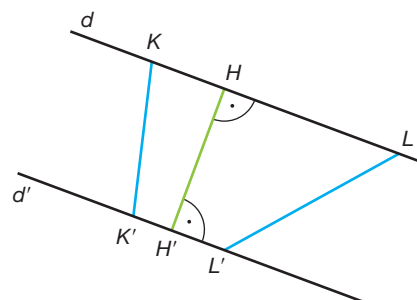
La distance entre les droites parallèles d et d' est la longueur du segment HH' perpendiculaires aux droites d et d' .

Exemple

La distance entre les droites parallèles d et d' est 2 cm .

$HH' < KK'$

$HH' < LL'$



Segments isométriques

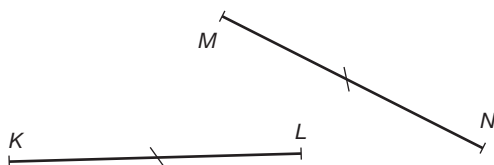
Définition Deux segments isométriques sont des segments qui ont la même longueur.

Notation Pour indiquer que des segments sont isométriques, on place sur chacun d'eux un même signe, par exemple un trait, un double trait, etc.

Exemple

Les segments MN et KL sont isométriques.

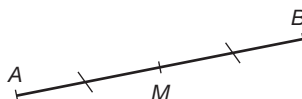
$$MN = KL$$



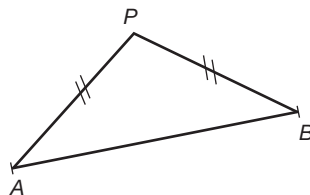
Milieu d'un segment

Définition Le milieu du segment AB est le point M de ce segment, tel que $MA = MB$.

Exemple



⚠ Dans la figure ci-contre, P n'est pas le milieu du segment AB , car P n'est pas un point du segment AB .

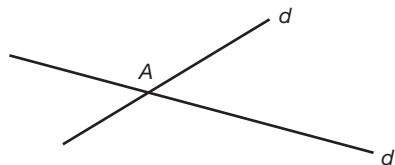


Droites sécantes

Définition Deux droites sécantes sont deux droites qui ont un seul point commun appelé point d'intersection des deux droites.

Exemple

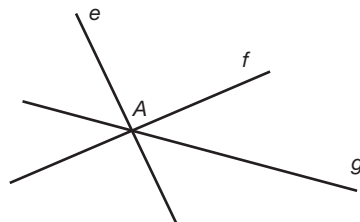
Les droites d et d' sont sécantes.
 A est leur point d'intersection.



Remarque Lorsque trois droites ou plus ont un point commun on dit qu'elles sont concourantes.

Exemple

Les droites e , f et g sont concourantes en A .



ETYM Sécante : du latin *secare*, couper.

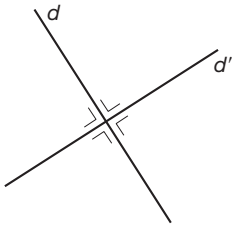
Droites perpendiculaires

Définition

Deux droites perpendiculaires sont deux droites qui se coupent à angles droits.

Exemple

Les droites d et d' sont perpendiculaires.
On note : $d \perp d'$.



Remarque

Pour vérifier que deux droites sont perpendiculaires, il suffit de vérifier qu'elles forment un angle droit.

Tracer la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné

Méthode 1

En utilisant une équerre et une règle.

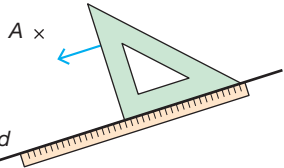
Exemple Tracer la droite perpendiculaire à d passant par A .

$A \times$



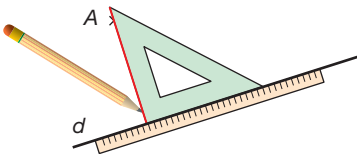
ÉTAPE 1

Placer la règle sur la droite d , puis faire glisser l'équerre sur cette règle.



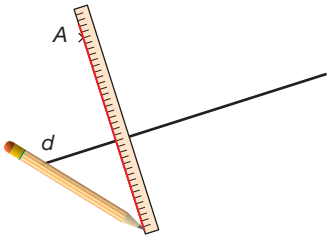
ÉTAPE 2

Arrivé au point A , tracer la perpendiculaire à d passant par A .



ÉTAPE 3

Prolonger la droite obtenue.



Méthode 2

En utilisant un compas et une règle.

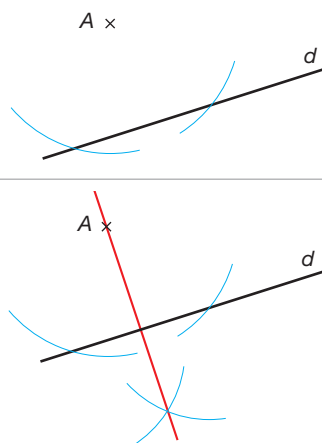
ÉTAPE 1

Tracer un arc de cercle de centre A qui coupe la droite en deux points.

ÉTAPE 2

Tracer deux arcs de cercle de même rayon et dont les centres sont les deux points ci-dessus. Ces deux arcs se coupent en un point.

La droite passant par A et ce point est la droite perpendiculaire à d passant par A .



→ Médiatrice d'un segment (p. 96)

Droites parallèles

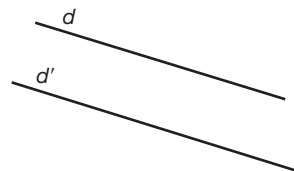
Définition

Deux droites parallèles sont deux droites qui n'ont aucun point commun ou tous les points en commun (droites confondues).

Exemple

Les droites d et d' sont parallèles.

On note: $d \parallel d'$.



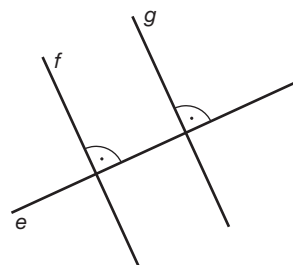
Propriétés des droites parallèles et perpendiculaires

Propriété 1

Si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles.

Exemple

Les droites f et g sont toutes les deux perpendiculaires à la droite e , donc f et g sont parallèles.

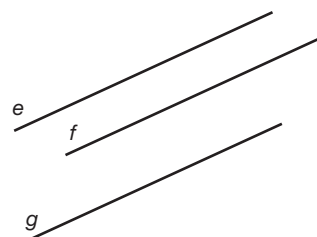


Propriété 2

Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Exemple

La droite e est parallèle à f , la droite g est parallèle à f , donc e et g sont parallèles.

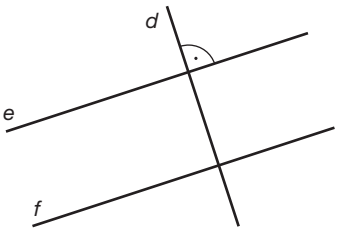


Propriété 3

Si deux droites sont parallèles et si une troisième droite est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.

Exemple

Les droites e et f sont parallèles et d est perpendiculaire à e . On peut donc affirmer que d est perpendiculaire à f .



Tracer la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné

Méthode

A l'aide d'une équerre et d'une règle.

Exemple Tracer la droite parallèle à d passant par A .

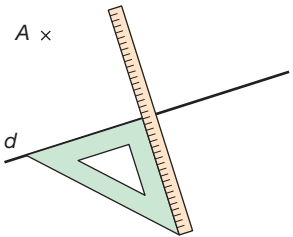
$A \times$



ÉTAPE 1

Placer un des côtés de l'angle droit de l'équerre sur la droite et la règle contre l'autre côté de l'angle droit.

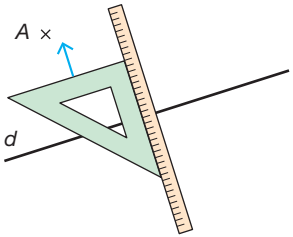
$A \times$



ÉTAPE 2

Faire glisser l'équerre le long de la règle jusqu'au point A .

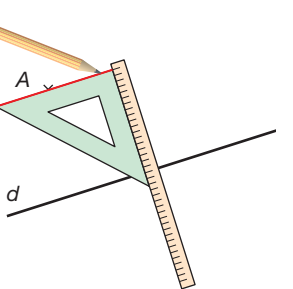
$A \times$



ÉTAPE 3

Tracer la droite parallèle à d passant par A .

$A \times$



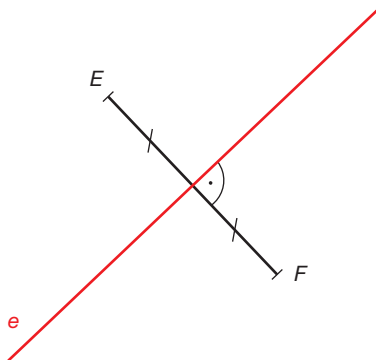
● Médiatrice d'un segment

Définition

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et qui le coupe en son milieu.

Exemple

La droite e est la médiatrice du segment EF .



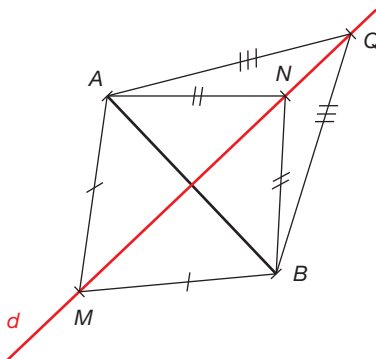
Propriétés

- La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points à égale distance des extrémités de ce segment.
- La médiatrice d'un segment est un axe de symétrie de ce segment.

Exemple

M , N et Q sont des points à égale distance de A et de B ($MA = MB$; $NA = NB$; $QA = QB$).

La droite d est la médiatrice du segment AB et donc un axe de symétrie de ce segment.



ETYM Médiatrice : du latin *media*, qui est au milieu.

→ Symétrie axiale (p. 130), Axe de symétrie (p. 132)

Construire la médiatrice d'un segment avec une règle non graduée et un compas

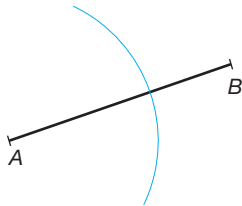
Méthode

Exemple Tracer la médiatrice d du segment AB .



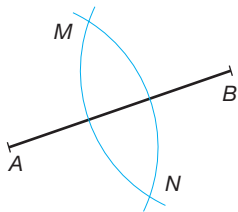
ÉTAPE 1

Tracer un arc de cercle dont le centre est une extrémité du segment et dont le rayon est plus grand que la moitié du segment.



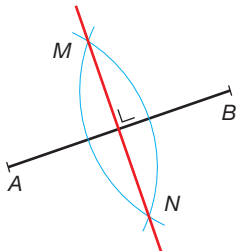
ÉTAPE 2

Tracer un arc de cercle de même rayon dont le centre est l'autre extrémité du segment.



ÉTAPE 3

Tracer la droite qui passe par les deux points d'intersection obtenus.
C'est la médiatrice du segment.



Remarque

Cette méthode permet de déterminer le milieu d'un segment ou de construire un angle droit sans règle graduée.

ES

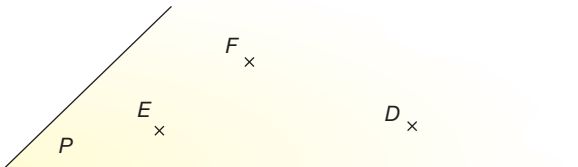
Plan

Définition

Un plan est déterminé par trois points de l'espace non alignés.
Il peut être visualisé comme une feuille d'épaisseur nulle qui s'étend à l'infini.

Exemple

Les trois points D , E et F appartiennent au plan P .



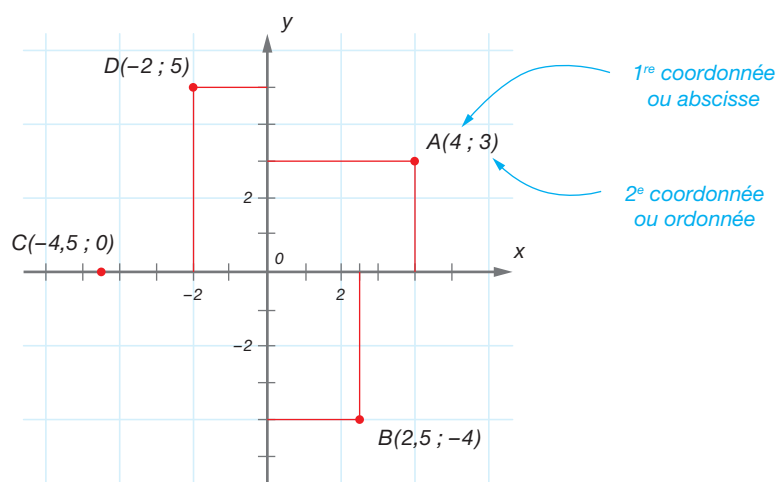
Repérage d'un point dans le plan

Définitions

Pour pouvoir repérer un point dans le plan, on peut utiliser deux axes gradués de même origine.

- Ces axes sont généralement perpendiculaires. Ils forment ce qu'on appelle un **repère**.
- Le point d'intersection des axes est appelé **origine du repère**.
- Un point est alors repéré par un couple $(x ; y)$ de nombres réels, appelé **coordonnées** du point.
- Le premier nombre du couple est appelé **abscisse**.
Il situe le point par rapport à l'axe horizontal (**axe des x**).
- Le deuxième nombre du couple est appelé **ordonnée**.
Il situe le point par rapport à l'axe vertical (**axe des y**).

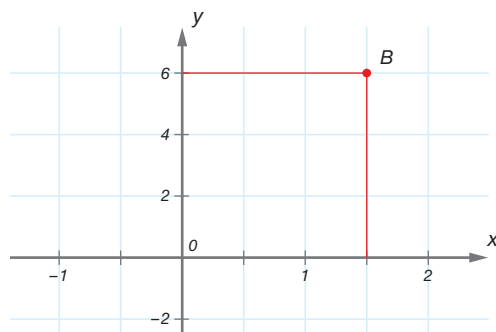
Exemple



⚠ Les graduations ne correspondent pas toujours à une unité. Les unités ne sont pas nécessairement de même longueur sur chacun des deux axes.

Exemple

Dans le repère ci-dessous, B a pour coordonnées $(1,5 ; 6)$.



Cercle et disque

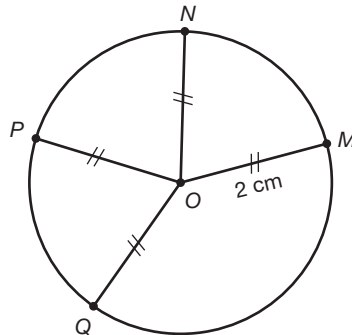
Définitions

- Un **cercle** est l'ensemble des points du plan situés à égale distance d'un point, appelé **centre**.
- Cette distance est appelée le **rayon** du cercle.

Exemple

On a tracé ci-contre le cercle de centre O et de rayon 2 cm .

$$OM = ON = OP = OQ = 2\text{ cm}$$



Remarque

Le rayon désigne aussi le segment qui joint le centre du cercle à un point du cercle.

Exemple

Le segment OM est un rayon du cercle ci-dessus.

Définitions

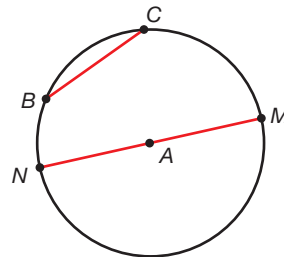
- Une **corde** d'un cercle est un segment dont les deux extrémités sont des points du cercle.
- Le **diamètre** d'un cercle est une corde qui passe par le centre du cercle. C'est la plus longue corde du cercle. Sa longueur est égale au double du rayon.

Exemple

On a tracé ci-contre un cercle de centre A .

Le segment NM est un diamètre.

Le segment BC est une corde.



Définition

Un **disque** est l'ensemble des points situés à l'intérieur et sur le cercle.

Exemple

La partie du plan colorée en jaune est le disque de centre O et de rayon r .

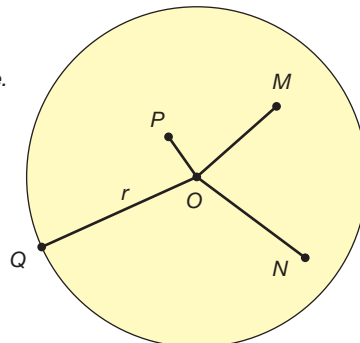
Les points M , N , P et Q sont des points du disque.

$$OM \leq r$$

$$ON \leq r$$

$$OP \leq r$$

$$OQ \leq r$$



Arc de cercle

Définition

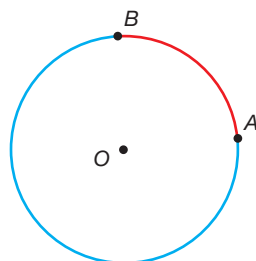
Un arc de cercle est une partie d'un cercle comprise entre deux points. Deux points d'un cercle déterminent deux arcs de cercle.

Notation

Soit A et B deux points d'un cercle. L'arc de cercle est noté $\widehat{AB}$.

Exemple

Les points A et B sur le cercle déterminent deux arcs de cercle $\widehat{AB}$: l'arc en bleu et l'arc en rouge.



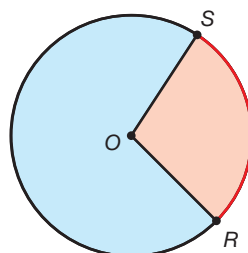
Secteur circulaire

Définition

Un secteur circulaire est une partie d'un disque limitée par deux rayons. Deux rayons d'un disque déterminent deux secteurs circulaires.

Exemple

Les rayons OR et OS déterminent deux secteurs circulaires SOR : le secteur circulaire bleu et le secteur circulaire rouge.



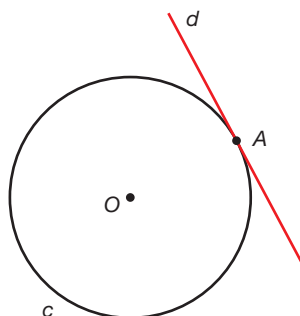
Tangente à un cercle

Définition

Une tangente à un cercle est une droite qui a un seul point commun avec ce cercle.

Exemple

La droite d est la tangente en A au cercle c .
On dit aussi que le cercle c est tangent à la droite d .



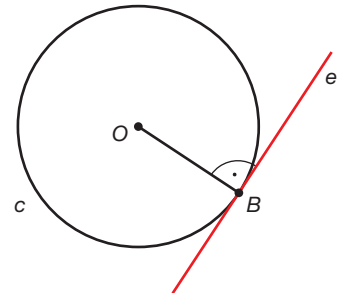
Propriété

La tangente en un point B d'un cercle de centre O est la droite perpendiculaire à la droite OB qui passe par le point B .

Cette propriété permet de tracer facilement une tangente à un cercle.

Exemple

La droite e est la tangente en B au cercle c .



ETYM Tangente: du latin *tangere*, toucher.

→ Droites perpendiculaires (p. 93)

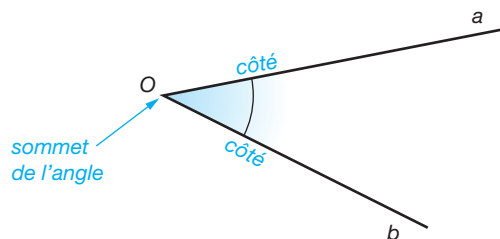
Angle

Définitions

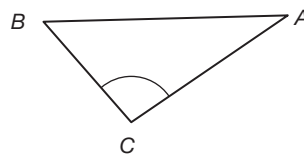
- Un angle est une portion du plan limitée par deux demi-droites de même origine.
- L'origine est appelée **sommet** de l'angle et les demi-droites sont les **côtés** de l'angle.

Notations

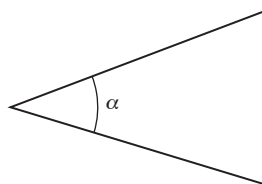
- L'angle ci-dessous est noté $\widehat{aOb}$ ou $\widehat{bOa}$.



- Dans ce triangle, l'angle de sommet C est noté $\widehat{BCA}$ ou $\widehat{ACB}$.



- Une lettre grecque peut aussi désigner un angle.

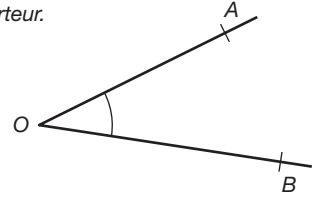
**Remarque**

L'unité usuelle de mesure des angles est le **degré**, noté par le symbole $^\circ$.

Mesurer un angle à l'aide d'un rapporteur

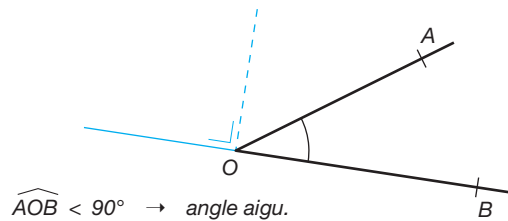
Méthode

Exemple Mesurer un angle $\widehat{AOB}$ à l'aide d'un rapporteur.



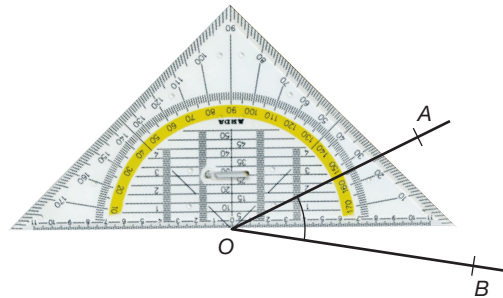
ÉTAPE 1

Déterminer à vue d'œil si l'angle à mesurer est aigu ou obtus.



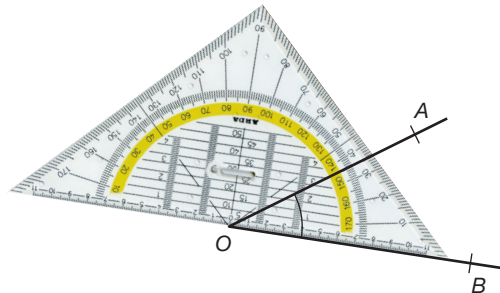
ÉTAPE 2

Faire coïncider le centre du rapporteur avec le sommet de l'angle.



ÉTAPE 3

Faire coïncider un des côtés de l'angle avec le 0° d'une des graduations.



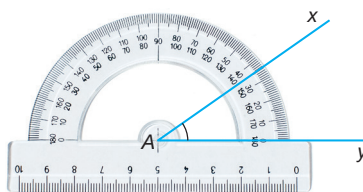
ÉTAPE 4

Lire la mesure de l'angle sur la graduation correspondante.
Vérifier si cette mesure est cohérente avec la détermination à vue d'œil.

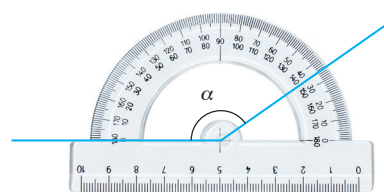
L'angle $\widehat{AOB}$ mesure 35° .
 $\widehat{AOB}$ est bien un angle aigu.



Il y a souvent deux graduations sur un rapporteur.
Il est donc important d'identifier d'abord si l'angle à mesurer est aigu ou obtus afin d'utiliser la bonne graduation.



$$\widehat{xAy} = 35^\circ$$



$$\alpha = 145^\circ$$

Classement des angles

Définitions

- Un **angle nul** est un angle dont la mesure est 0° .

Exemple

$$\alpha = 0^\circ$$

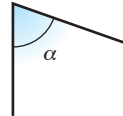


- Un **angle aigu** est un angle dont la mesure est comprise entre 0° et 90° .

Exemple

$$\alpha = 70^\circ$$

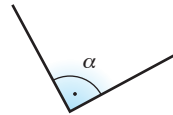
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



- Un **angle droit** est un angle dont la mesure est 90° .

Exemple

$$\alpha = 90^\circ$$



- Un **angle obtus** est un angle dont la mesure est comprise entre 90° et 180° .

Exemple

$$\alpha = 148^\circ$$

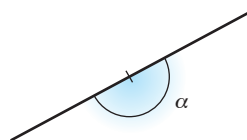
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$



- Un **angle plat** est un angle dont la mesure est 180° .

Exemple

$$\alpha = 180^\circ$$



- Un **angle rentrant** est un angle dont la mesure est comprise entre 180° et 360° .

Exemple

$$\alpha = 240^\circ$$

$$180^\circ < \alpha < 360^\circ$$



- Un **angle plein** est un angle dont la mesure est 360° .

Exemple

$$\alpha = 360^\circ$$



● Angles adjacents

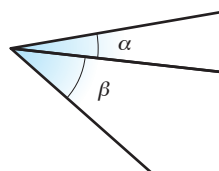
Définition

Deux angles adjacents sont deux angles qui :

- ont le même sommet ;
- ont un côté commun ;
- sont situés de part et d'autre de ce côté commun.

Exemple

Les angles α et β sont adjacents.



ÉTVM **Adjacent** : du latin *adjacere*, être situé auprès de.

● Angles complémentaires

Définition

Deux angles complémentaires sont deux angles dont la somme de leurs mesures est égale à 90° .

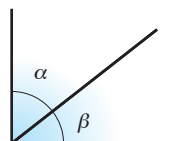
Exemple

$$\alpha = 52^\circ$$

$$\beta = 38^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Les angles α et β sont complémentaires.



ES

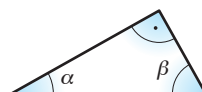
Remarque

Deux angles complémentaires ne sont pas forcément adjacents.

Exemple

Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



→ Angles adjacents (p. 104)

● Angles supplémentaires

Définition

Deux angles supplémentaires sont deux angles dont la somme de leurs mesures est égale à 180° .

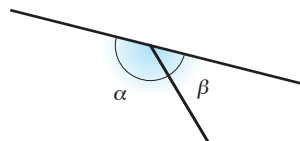
Exemple

$$\alpha = 135^\circ$$

$$\beta = 45^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Les angles α et β sont supplémentaires.



Remarque

Deux angles supplémentaires ne sont pas forcément adjacents.

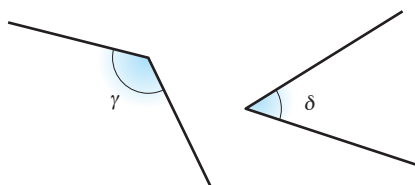
Exemple

$$\delta = 50^\circ$$

$$\gamma = 130^\circ$$

$$\delta + \gamma = 180^\circ$$

Les angles δ et γ sont supplémentaires mais pas adjacents.



→ Angles adjacents (p. 104)

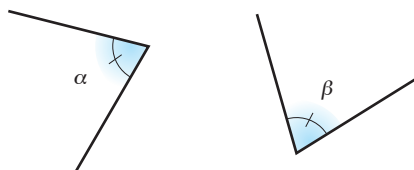
Angles isométriques

Définition

Deux angles isométriques sont deux angles qui ont la même mesure.

Exemple

Les angles α et β sont isométriques, ils mesurent tous les deux 74° .

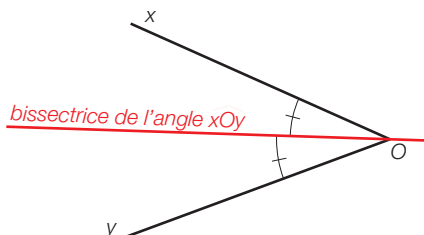


Bissectrice d'un angle

Définition

La bissectrice d'un angle est la droite qui le partage en deux angles isométriques.

Exemple



Propriétés

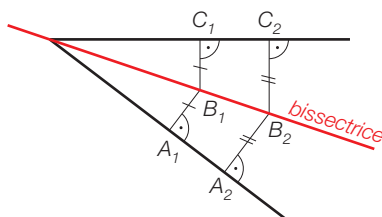
La bissectrice d'un angle est aussi :

- l'ensemble des points situés à égale distance des côtés de l'angle ;
- l'**axe de symétrie** de cet angle.

Exemple

$$B_1 A_1 = B_1 C_1$$

$$B_2 A_2 = B_2 C_2$$



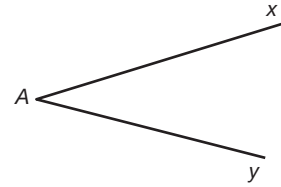
ÉTYM Bissectrice : du latin *bis*, deux fois et *secare*, couper.

➡ Distance d'un point à une droite (p. 91), Angles isométriques (p. 105), Symétrie axiale (p. 130), Axe de symétrie (p. 132)

Construire la bissectrice d'un angle avec une règle et un compas

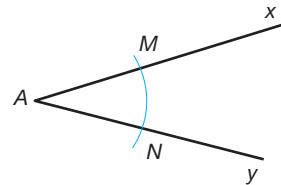
Méthode

Exemple Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$ à l'aide d'une règle et d'un compas.



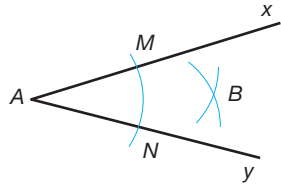
ÉTAPE 1

Tracer un arc de cercle de centre A ; il coupe les côtés de l'angle $\widehat{xAy}$ aux points M et N .



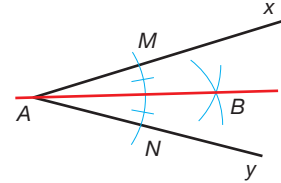
ÉTAPE 2

Tracer deux arcs de cercle de même rayon, l'un de centre M et l'autre de centre N . Ces deux arcs se coupent en B .



ÉTAPE 3

Tracer la droite qui passe par les points A et B . Cette droite est la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$.



Angles opposés par le sommet

Définition

Deux angles sont opposés par le sommet :

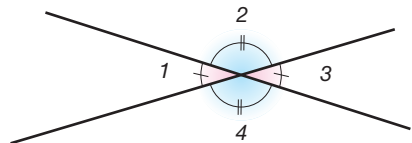
- s'ils ont le même sommet ;
- si les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

Propriété

Les angles opposés par le sommet sont isométriques.

Exemple

- Les angles 1 et 3 sont opposés par le sommet, ils sont isométriques.
- Les angles 2 et 4 sont opposés par le sommet, ils sont isométriques.



Remarque

Deux droites sécantes définissent deux paires d'angles opposés par le sommet.

↔ Droites sécantes (p. 92), Angles isométriques (p. 105)

Angles correspondants

Définition

Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, deux angles sont correspondants :

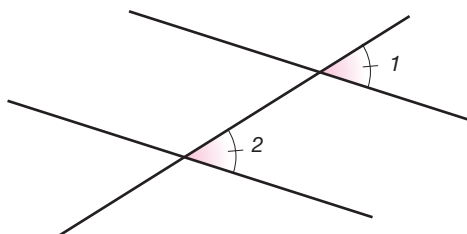
- s'ils sont situés du même « côté » de la droite sécante ;
- si l'un est à l'« intérieur » et l'autre à l'« extérieur » des droites parallèles et s'ils ne sont pas adjacents.

Propriété

Les angles correspondants sont isométriques.

Exemple

Les angles 1 et 2 sont correspondants, ils sont isométriques.



→ Droites sécantes (p. 92), Droites parallèles (p. 94), Angles adjacents (p. 104), Angles isométriques (p. 105)

Angles alternes-internes

Définition

Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, deux angles sont alternes-internes :

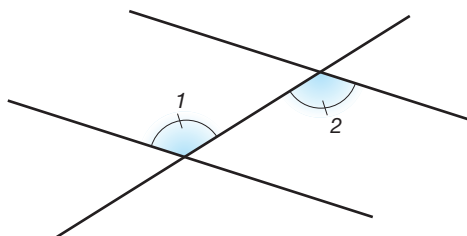
- s'ils sont non adjacents ;
- s'ils sont situés de chaque « côté » de la droite sécante et à l'« intérieur » des droites parallèles.

Propriété

Les angles alternes-internes sont isométriques.

Exemple

Les angles 1 et 2 sont alternes-internes, ils sont isométriques.



→ Droites sécantes (p. 92), Droites parallèles (p. 94), Angles adjacents (p. 104), Angles isométriques (p. 105)

Angles alternes-externes

Définition

Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, deux angles sont alternes-externes :

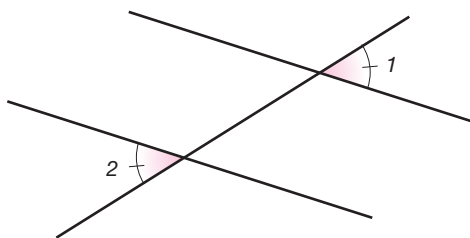
- s'ils sont non adjacents ;
- s'ils sont situés de chaque « côté » de la droite sécante et à l'« extérieur » des droites parallèles.

Propriété

Les angles alternes-externes sont isométriques.

Exemple

Les angles 1 et 2 sont alternes-externes, ils sont isométriques.



→ Droites sécantes (p. 92), Droites parallèles (p. 94) Angles adjacents (p. 104), Angles isométriques (p. 105)

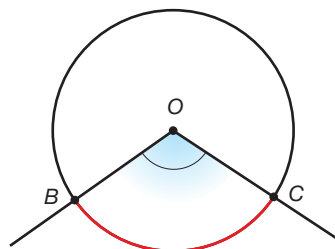
Angle au centre d'un cercle

Définition

Un angle au centre d'un cercle est un angle dont le sommet est le centre du cercle. Il intercepte un arc de cercle.

Exemple

$\widehat{BOC}$ est un angle au centre du cercle de centre O .
Il intercepte l'arc de cercle $\widehat{BC}$.



→ Arc de cercle (p. 100)

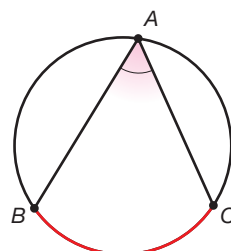
Angle inscrit dans un cercle

Définition

Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle. Il intercepte un arc de cercle.

Exemple

$\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans le cercle de centre O .
Il intercepte l'arc de cercle $\widehat{BC}$.



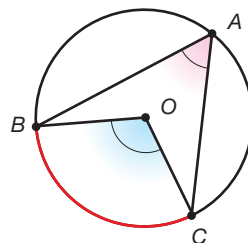
Propriété 1

Dans un cercle, si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit.

Exemple

L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ et l'angle au centre $\widehat{BOC}$ interceptent le même arc $\widehat{BC}$.

Donc $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAC}$.

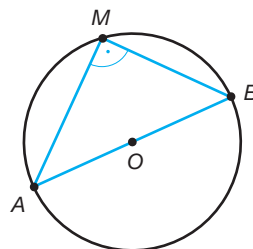
**Conséquence**

Si M appartient au cercle de diamètre AB , alors $\widehat{AMB}$ est un angle droit.

Exemple

L'angle au centre $\widehat{AOB}$ vaut 180° .

Donc l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ vaut 90° .

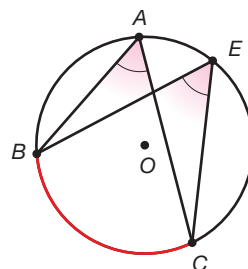
**Propriété 2**

Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils sont isométriques.

Exemple

Les angles inscrits $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BEC}$ interceptent le même arc $\widehat{BC}$.

Donc $\widehat{BAC} = \widehat{BEC}$.

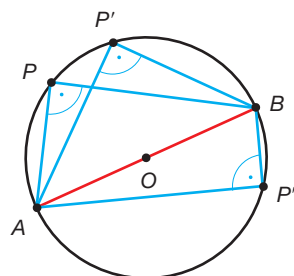
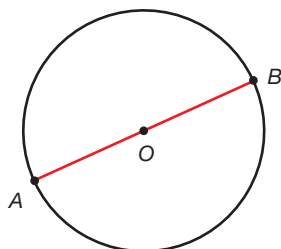


➡ Arc de cercle (p. 100), Angles isométriques (p. 105), Angle au centre d'un cercle (p. 108)

Cercle de Thalès d'un segment

Définition

Le cercle de Thalès d'un segment AB est l'ensemble des points P tel que APB est un triangle rectangle en P (ou $\widehat{APB}$ est un angle droit). C'est le cercle de diamètre AB .

Exemple

● Figure plane

Définition

Une **figure plane** est une partie du plan limitée par une ligne fermée.

Exemples

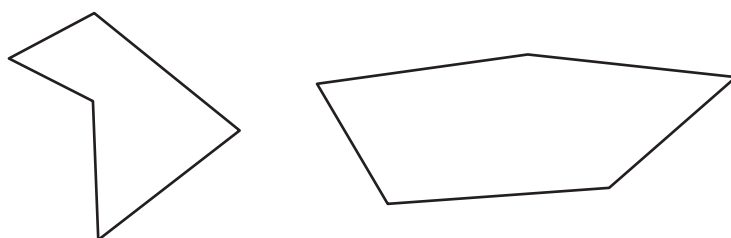


● Polygone

Définition

Un **polygone** est une figure plane limitée uniquement par des segments.

Exemples



ES

Notation

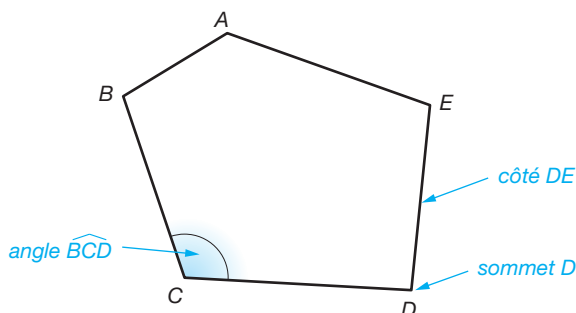
Il y a plusieurs façons de nommer un polygone, mais il convient de respecter l'ordre dans lequel les sommets se suivent.

Généralement, on note les sommets dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (sens positif) et par ordre alphabétique.

Exemple

Le polygone ci-dessous peut-être nommé *ABCDE* ou *DEABC*, etc.

Par contre, on ne peut pas le nommer *ADECB*.



Polygones particuliers

Le nom donné aux différents polygones est en lien direct avec le nombre de côtés et d'angles qui le constituent. Un **triangle** est un polygone à trois côtés et trois angles, un **quadrilatère** un polygone à quatre côtés et quatre angles, un **hexagone** possède six côtés et six angles, etc.

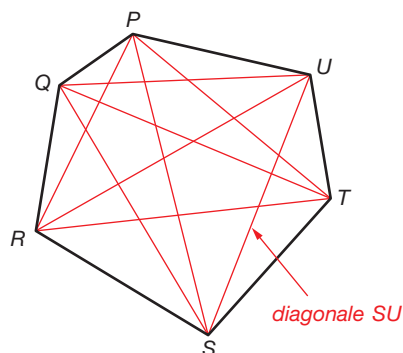
● Diagonale d'un polygone

Définition

Une diagonale d'un polygone est un segment qui joint deux sommets non consécutifs.

Exemple

Le polygone $PQRSTU$ possède neuf diagonales.



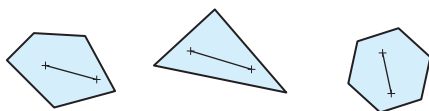
ÉTYM **Diagonale** : du grec *día*, à travers et *gônia*, angle ; qui traverse d'un angle à un autre.

● Polygone convexe ou non convexe

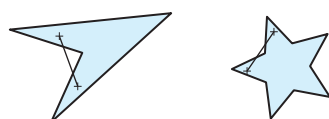
Définition

Un polygone convexe est un polygone qui contient chaque segment joignant deux de ses points.

Exemples



polygones convexes



polygones non convexes

ES

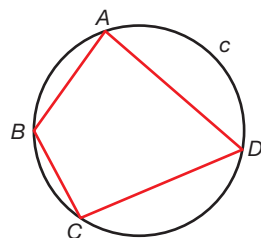
● Polygone inscrit dans un cercle

Définition

Un polygone inscrit dans un cercle est un polygone dont tous les sommets sont des points de ce cercle. Ce cercle est appelé cercle circonscrit.

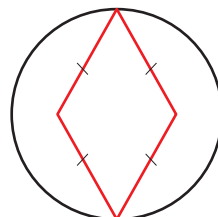
Exemple

Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans le cercle c .



Remarque

Tout polygone n'est pas inscriptible dans un cercle, par exemple les losanges (non carrés).



Polygone régulier

Définition

Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés et tous les angles sont isométriques.

Remarque

Si l'une des deux conditions manque, alors le polygone n'est pas régulier.

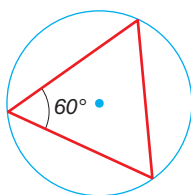
Exemple

Un losange qui n'est pas carré n'est pas un polygone régulier, car il possède quatre côtés isométriques, mais il ne possède pas quatre angles isométriques.

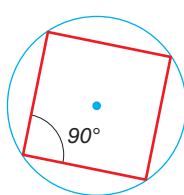
Propriété 1

Tout polygone régulier est inscritible dans un cercle.
Le centre de ce cercle est appelé **centre du polygone**.

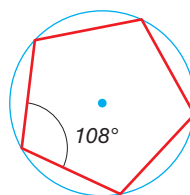
Exemples



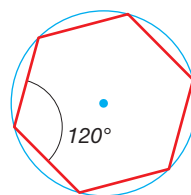
triangle équilatéral



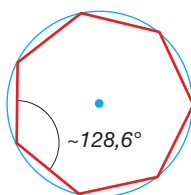
carré



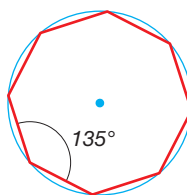
pentagone régulier



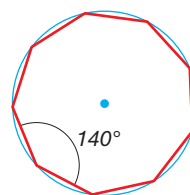
hexagone régulier



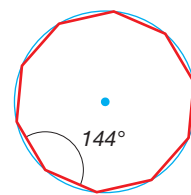
heptagone régulier



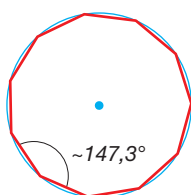
octogone régulier



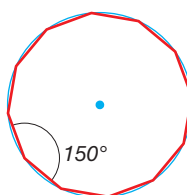
ennéagone régulier



décagone régulier



hendécagone régulier

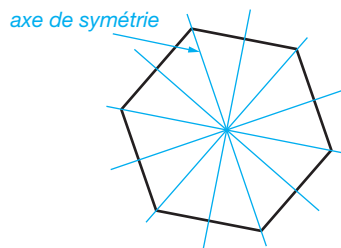


dodécagone régulier

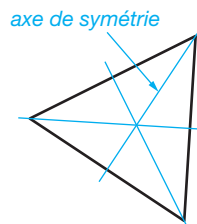
Propriété 2

Un polygone régulier possède autant d'**axes de symétrie** que de côtés.

Exemple



hexagone régulier



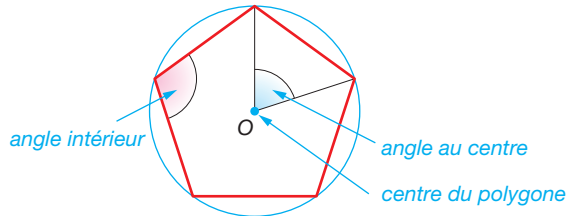
triangle équilatéral

● Angle au centre et angle intérieur d'un polygone régulier

Définitions

- L'**angle au centre** d'un polygone régulier est l'angle dont le sommet est le centre du polygone et dont les côtés passent par deux sommets consécutifs du polygone.
- Un **angle intérieur** d'un polygone régulier est l'angle limité par deux côtés consécutifs du polygone.

Exemple

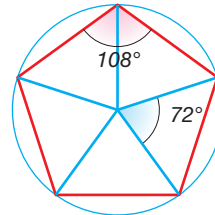


Propriétés

- La mesure, en degrés, de l'angle au centre d'un polygone régulier à n côtés est $\frac{360^\circ}{n}$.
- La mesure, en degrés, de l'angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés est $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

Exemple

Pour le pentagone régulier ci-contre,
l'angle au centre mesure
 $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.
et l'angle intérieur $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

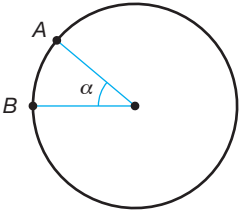


ES

Construire un polygone régulier avec une règle, un rapporteur et un compas

Méthode

Exemple Construire un enneagone régulier (9 côtés) inscrit dans un cercle de 1,5 cm de rayon.

ÉTAPE 1	Tracer un cercle à l'aide du compas.	Tracer un cercle de 1,5 cm de rayon.
ÉTAPE 2	Calculer la mesure de l'angle au centre α à l'aide de la formule $\frac{360^\circ}{n}$.	$\alpha = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$
ÉTAPE 3	Construire un angle au centre de mesure α qui coupe le cercle en deux points A et B.	 $\alpha = 40^\circ$

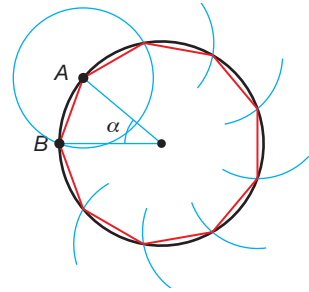
ÉTAPE 4

Reporter sur le cercle des arcs de cercle de rayon AB à partir de A .

ÉTAPE 5

Relier les points obtenus.

$$\alpha = 40^\circ$$



Remarque

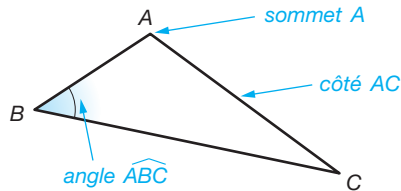
Il est aussi possible de reporter la mesure de l'angle au centre à l'aide du rapporteur.

Triangle

Définition

Un triangle est un polygone qui a trois côtés et, par conséquent, trois angles et trois sommets.

Exemple



ÉTYM Triangle: du latin *tri*, trois et *angulus*, angle.

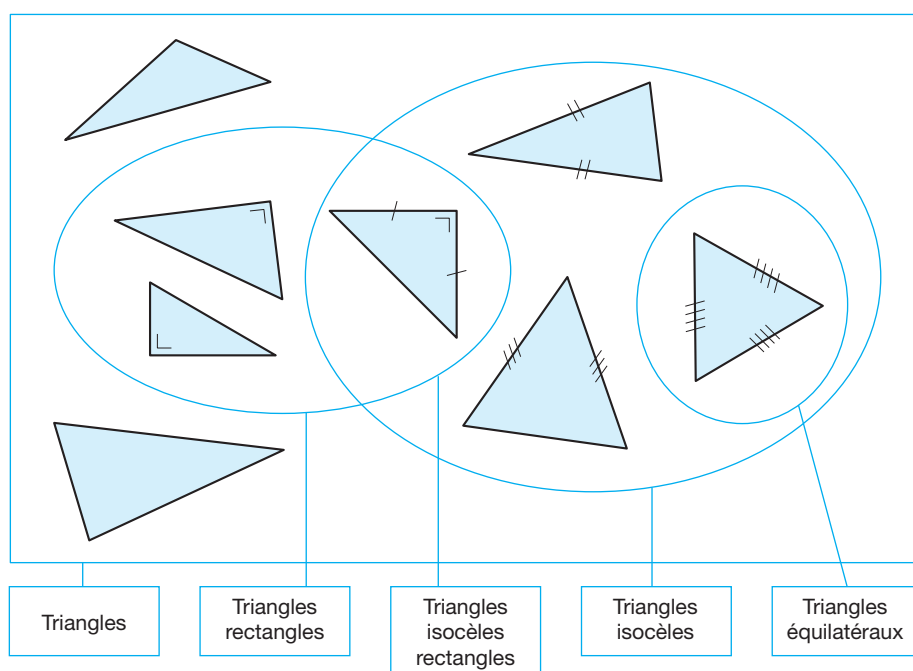
Triangles particuliers

Nom	Figure	Propriétés caractéristiques		
		Côtés	Angles	Symétries
■ Triangle équilatéral ÉTYM Équilatéral: du latin <i>aequus</i>, égal et <i>latus</i>, côté; aux côtés égaux.		Trois côtés isométriques	Trois angles isométriques	Trois axes de symétrie
■ Triangle isocèle ÉTYM Isocèle: du grec <i>isos</i>, même et <i>skelos</i>, jambe; aux jambes égales.		Au moins deux côtés isométriques	Au moins deux angles isométriques	Au moins un axe de symétrie
■ Triangle rectangle ÉTYM Hypoténuse: du grec <i>hypo</i>, sous et <i>teinein</i>, tendre; le côté opposé de l'angle droit.		Deux côtés perpendiculaires Le côté opposé à l'angle droit est l'hypoténuse	Un angle droit	

Remarque

Un triangle peut être à la fois isocèle et rectangle.

Classement des triangles



→ Segments isométriques (p. 92), Angles isométriques (p. 105), Axe de symétrie (p. 132)

Inégalité triangulaire

Propriété

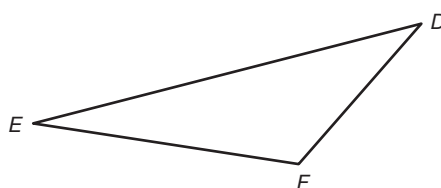
Quel que soit le triangle, la longueur de n'importe quel côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemple

$$DE < DF + FE$$

$$EF < ED + DF$$

$$DF < DE + EF$$

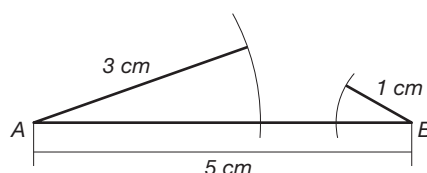


Remarque

Pour vérifier qu'un triangle existe, il n'est pas nécessaire d'essayer de le construire, il suffit de vérifier que la longueur du plus grand côté soit inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemples

- Le triangle dont les côtés mesurent 4 cm, 3 cm et 2,5 cm existe puisque $4 < 2,5 + 3$.
- Le triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 3 cm et 1 cm n'existe pas car $5 > 3 + 1$.



On peut donc déterminer l'existence d'un triangle sans devoir le construire.

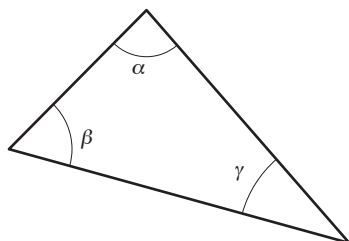
Somme des angles d'un triangle

Propriété

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .

Exemple

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



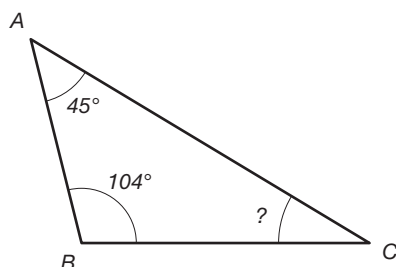
Remarque

A l'aide de cette propriété, on peut calculer la valeur du troisième angle d'un triangle si on connaît la valeur de deux autres.

Exemple

Dans le triangle ABC , la mesure de $\widehat{ACB}$ vaut 31° .

$$\text{En effet: } \widehat{ACB} = 180^\circ - (45^\circ + 104^\circ) = 31^\circ$$



Cercle circonscrit à un triangle et médiatrices

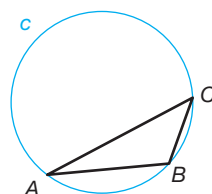
ES

Définition

Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle.

Exemple

c est le cercle circonscrit au triangle ABC .

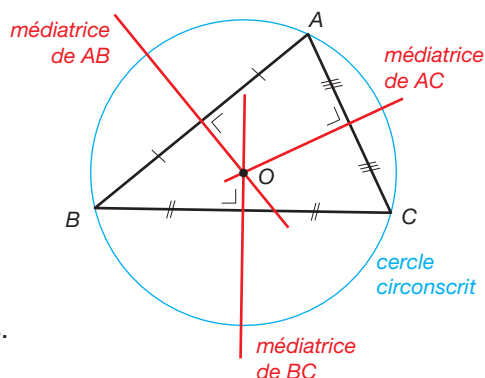


Propriété

Dans tout triangle, les **médiatrices** des côtés se coupent en un point. Ce point est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Exemple

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .



Remarque

Les médiatrices se coupent à l'extérieur du triangle lorsqu'un des angles est obtus.

ETYM Circonscrit: du latin *circum*, autour et *scribere*, écrire.

➡ Médiatrice d'un segment (p. 96), Angle obtus (p. 103)

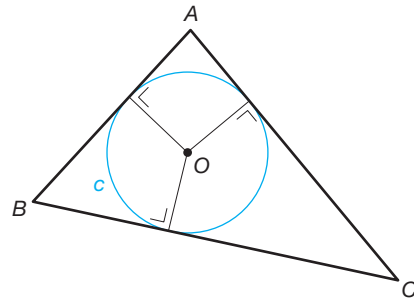
Cercle inscrit à un triangle et bissectrices

Définition

Le cercle inscrit à un triangle est le cercle tangent aux trois côtés de ce triangle.

Exemple

c est le cercle inscrit au triangle ABC .
Les trois côtés du triangle sont tangents à ce cercle.

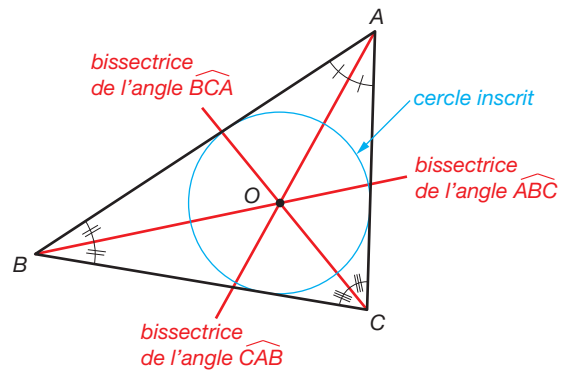


Propriété

Les **bissectrices** des angles d'un triangle se coupent en un point. Ce point est le centre du cercle inscrit à ce triangle.

Exemple

O est le centre du cercle inscrit au triangle ABC .



ETYM Inscrit : du latin *in*, à l'intérieur et *scribere*, écrire.

→ Tangente à un cercle (p. 100), Bissectrice d'un angle (p. 105)

Hauteurs d'un triangle et orthocentre

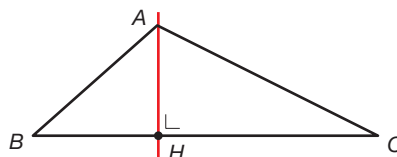
Définition

Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

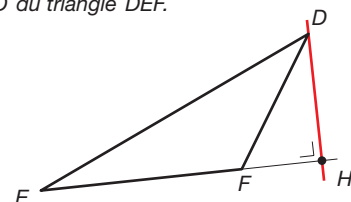
⚠ Les hauteurs peuvent être à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.

Exemples

○ La droite AH est la hauteur issue de A du triangle ABC .



○ La droite DH est la hauteur issue de D du triangle DEF .

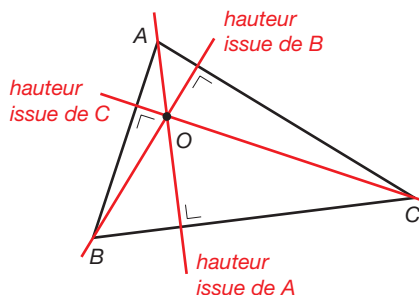


Propriété

Dans tout triangle, les hauteurs se coupent en un point appelé **orthocentre**.

Exemple

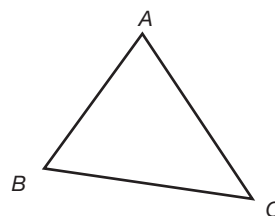
O est l'orthocentre triangle ABC .



Tracer une hauteur d'un triangle avec une équerre

Méthode

Exemple 1 Tracer la hauteur du triangle ABC issue de B .

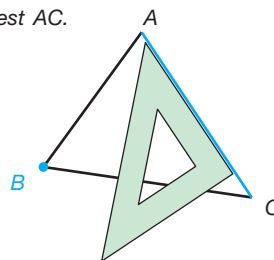


ES

ÉTAPE 1

Repérer le côté opposé au sommet donné, puis placer l'équerre sur ce côté en le prolongeant si nécessaire.

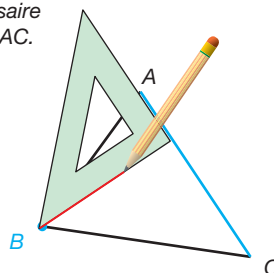
Le côté opposé à B est AC .



ÉTAPE 2

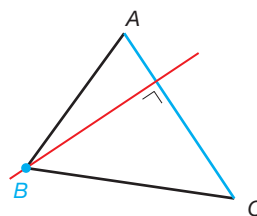
Faire glisser l'équerre sur le côté opposé pour amener l'équerre sur le sommet donné.

Ici, il n'est pas nécessaire de prolonger le côté AC .



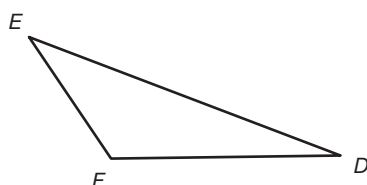
ÉTAPE 3

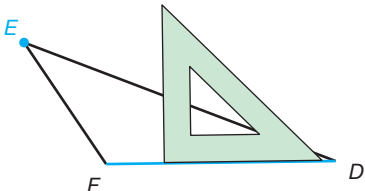
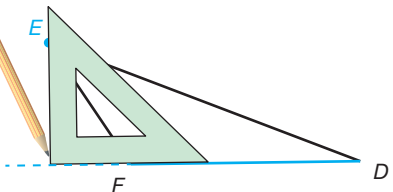
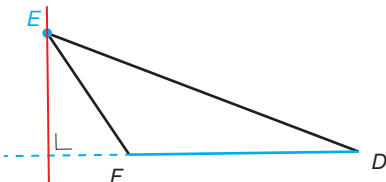
Tracer la droite perpendiculaire au côté passant par le sommet.



Méthode

Exemple 2 Tracer la hauteur du triangle DEF issue de E.



ÉTAPE 1 Repérer le côté opposé au sommet donné, puis placer l'équerre sur ce côté en le prolongeant si nécessaire.	Le côté opposé à E est DF. 
ÉTAPE 2 Faire glisser l'équerre sur le côté opposé pour amener l'équerre sur le sommet donné.	Dans ce cas, il est nécessaire de prolonger le côté DF. 
ÉTAPE 3 Tracer la droite perpendiculaire au côté DF.	

ES

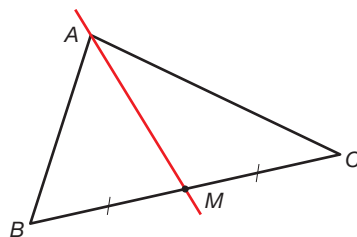
Médianes et centre de gravité

Définition

Une médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet.

Exemple

La droite AM est la médiane du triangle ABC issue de A.

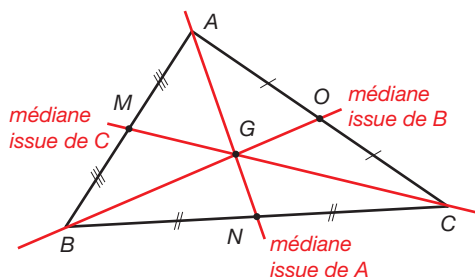


Propriété 1

Dans tout triangle, ses médianes se coupent en un même point appelé **centre de gravité** du triangle.

Exemple

G est le centre de gravité du triangle ABC.
M, N et O sont respectivement les milieux des côtés du triangle.



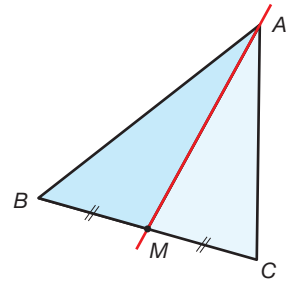
Propriété 2 Une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

Exemple

La droite AM est la médiane issue de A du triangle ABC , donc $\text{Aire}_{ABM} = \text{Aire}_{ACM}$

$$\text{Aire}_{ABM} = 2,25 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire}_{ACM} = 2,25 \text{ cm}^2$$



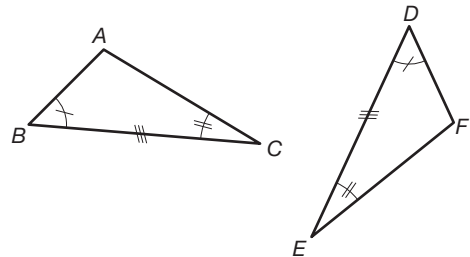
Triangles isométriques

Définition Deux triangles sont isométriques si l'un est l'image de l'autre par une isométrie. Cela signifie qu'ils sont **superposables**.

Propriété 1 Deux triangles sont isométriques s'ils ont un côté isométrique compris entre deux angles respectivement isométriques.

Exemple

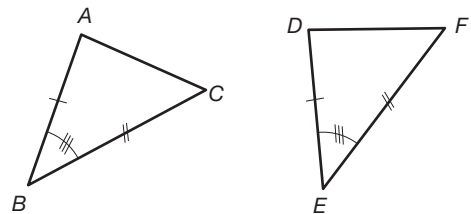
$BC = DE$, $\widehat{ABC} = \widehat{FDE}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{DEF}$, donc les triangles ABC et DEF sont isométriques.



Propriété 2 Deux triangles sont isométriques s'ils ont deux côtés respectivement isométriques adjacents à un angle isométrique.

Exemple

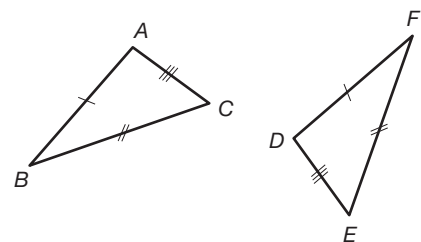
$AB = DE$, $BC = EF$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, donc les triangles ABC et DEF sont isométriques.



Propriété 3 Deux triangles sont isométriques s'ils ont trois côtés respectivement isométriques.

Exemple

$AB = DF$, $BC = EF$ et $AC = DE$, donc les triangles ABC et DEF sont isométriques.



Triangles semblables

Définition

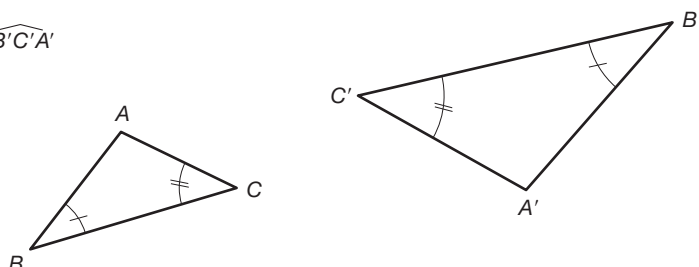
Deux triangles sont semblables si l'un est l'image de l'autre par une **similitude**. Cela signifie que l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre.

Propriété 1

Deux triangles sont semblables s'ils ont deux angles respectivement isométriques (le troisième angle l'est donc aussi).

Exemple

$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$
donc les triangles ABC
et $A'B'C'$ sont semblables.

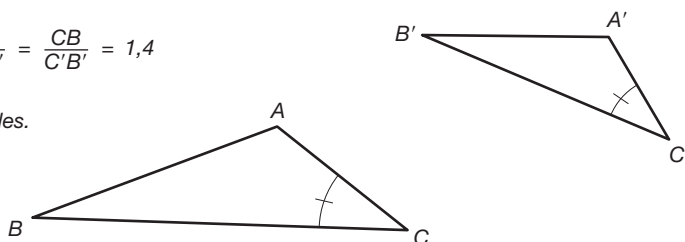


Propriété 2

Deux triangles sont semblables s'ils ont un angle isométrique compris entre deux côtés respectivement proportionnels.

Exemple

$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\frac{CA}{C'A'} = \frac{CB}{C'B'} = 1,4$
donc les triangles ABC
et $A'B'C'$ sont semblables.

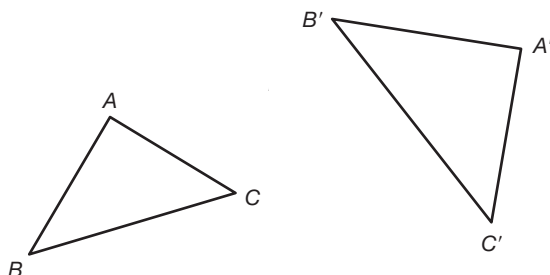


Propriété 3

Deux triangles sont semblables s'ils ont leurs côtés respectivement proportionnels.

Exemple

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = 1,2$
donc les triangles ABC
et $A'B'C'$ sont semblables.



Figures semblables

Définition

Deux figures sont semblables si l'on obtient les dimensions de l'une en multipliant celles de l'autre par un même nombre positif non nul et si leurs angles sont respectivement isométriques.

Exemple

$$\widehat{D'A'B'} = \widehat{DAB}$$

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$$

$$\widehat{B'C'D'} = \widehat{BCD}$$

$$\widehat{C'D'A'} = \widehat{CDA}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{4,5}{3} = 1,5$$

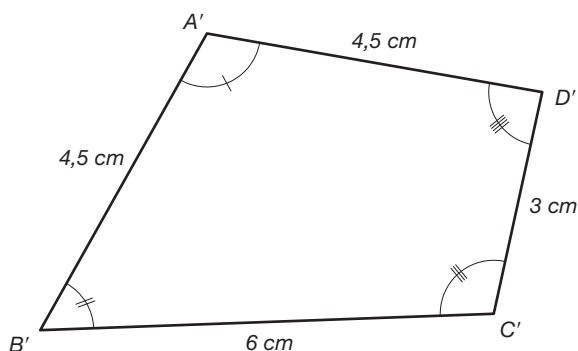
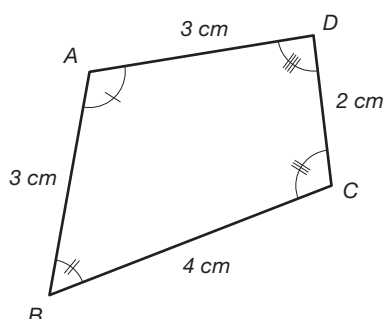
On vérifie ensuite que :

$$B'C' = 1,5 \cdot BC$$

$$C'D' = 1,5 \cdot CD$$

$$A'D' = 1,5 \cdot AD$$

Donc les quadrilatères ABCD et A'B'C'D' sont semblables.



Conséquence Les dimensions de deux figures semblables sont respectivement proportionnelles.

Définitions

- **Agrandir** une figure, c'est multiplier chaque dimension de celle-ci par un même nombre positif plus grand que 1 et conserver la valeur de ses angles.
- **Réduire** une figure, c'est multiplier chaque dimension de celle-ci par un même nombre positif non nul plus petit que 1 et conserver la valeur de ses angles.

Conséquence Une figure et son image par un agrandissement ou une réduction sont des figures semblables.

→ Proportionnalité (p. 55), Angles isométriques (p. 105), Homothétie (p. 138), Similitude (p. 141)

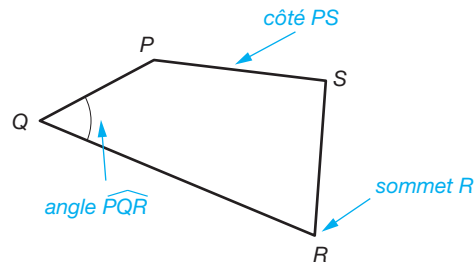
● Quadrilatère

Définition

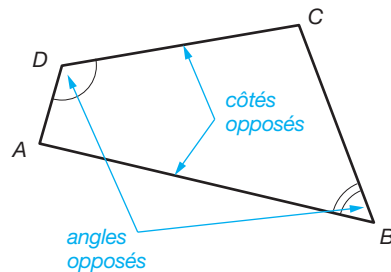
Un quadrilatère est un polygone qui a quatre côtés.

Exemple

$PQRS$ est un quadrilatère.



- Les côtés DC et AB ; AD et BC sont appelés côtés opposés.
- Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$; $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont appelés angles opposés.



Propriété

La somme des mesures des angles d'un quadrilatère est égale à 360° .

ÉTYM Quadrilatère : du latin *quattuor*, quatre et *latus*, côté.

➡ Angle (p. 101), Polygone (p. 110), Somme des angles d'un triangle (p. 116)

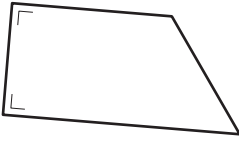
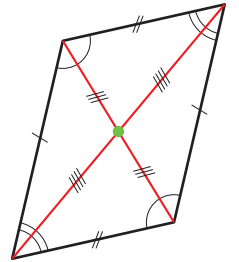
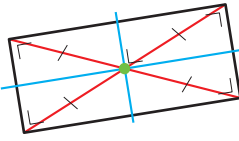
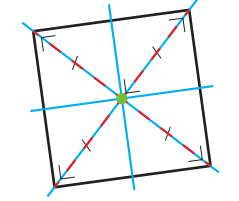
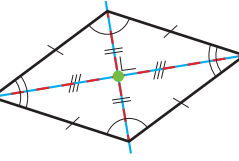
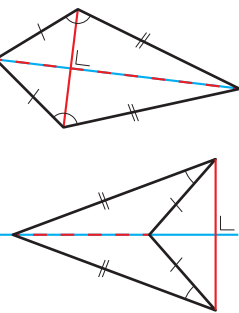
ES

● Quadrilatères particuliers

Remarque

Dans le tableau qui suit, les propriétés caractéristiques permettent de construire, reconnaître ou prouver la nature du quadrilatère correspondant.

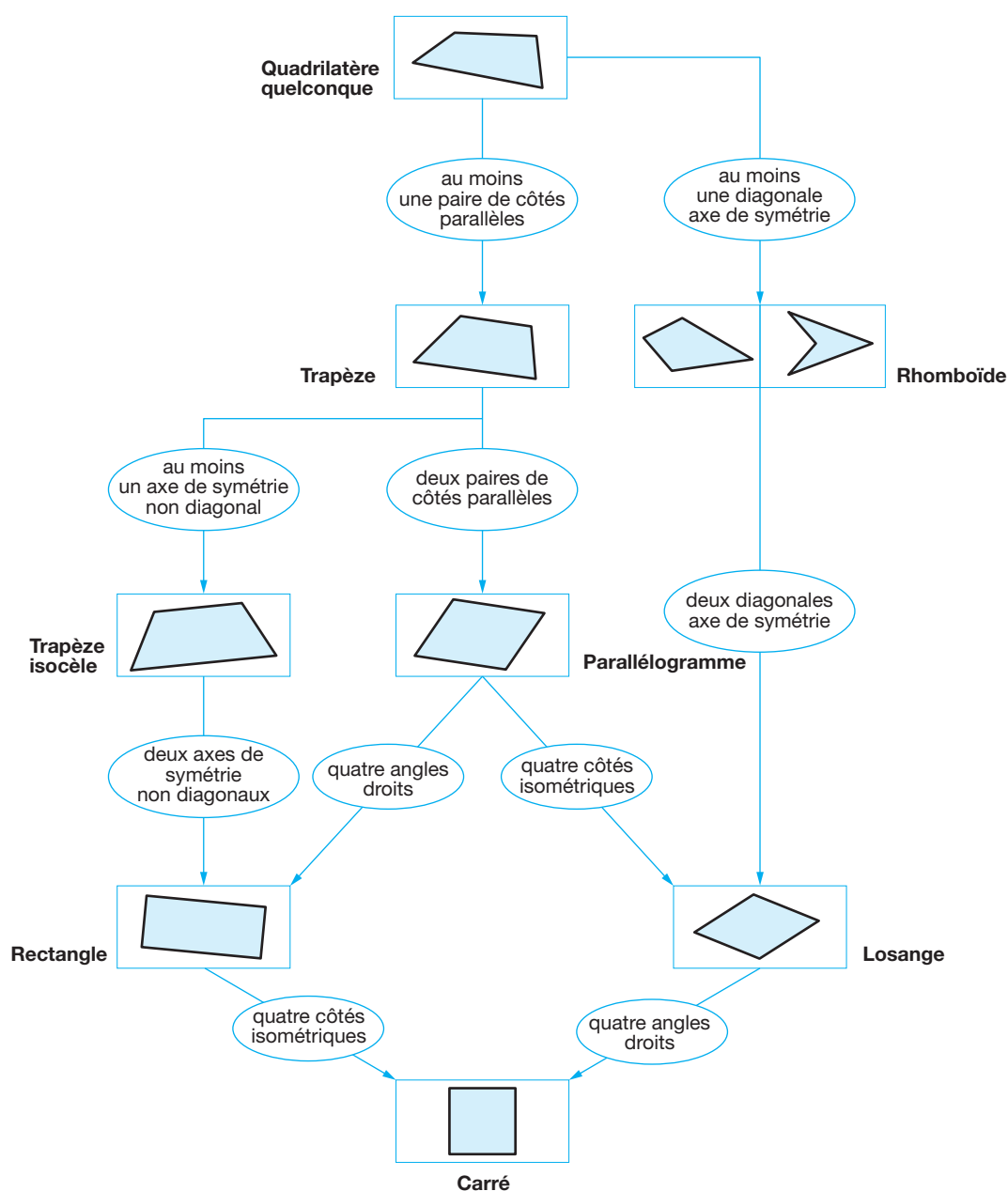
Nom	Figure	Propriétés caractéristiques	Autres propriétés
■ Trapèze ÉTYM Trapèze : du grec <i>trapeza</i> , table.		Au moins une paire de côtés parallèles.	
■ Trapèze isocèle		Au moins une paire de côtés parallèles et les deux autres côtés isométriques. Deux paires d'angles isométriques.	Des diagonales isométriques. Au moins un axe de symétrie.

Nom	Figure	Propriétés caractéristiques	Autres propriétés
■ Trapèze rectangle 		Au moins une paire de côtés opposés parallèles et au moins deux angles droits.	
■ Parallélogramme 		Deux paires de côtés parallèles. Deux paires de côtés opposés isométriques. Des diagonales qui se coupent en leur milieu. Des angles opposés isométriques. Un centre de symétrie.	
■ Rectangle ÉTYM Rectangle: du latin <i>rectus</i> , droit et <i>angulus</i> , angle.		Quatre angles droits. Des diagonales isométriques qui se coupent en leur milieu. Deux axes de symétrie, les médiatrices des côtés.	Un centre de symétrie. Deux paires de côtés parallèles et isométriques.
■ Carré ÉTYM Carré: du latin <i>quadratus</i> ; participe passé de <i>quadrare</i> , carrer, rendre carré.		Quatre angles droits et quatre côtés isométriques. Des diagonales isométriques, perpendiculaires qui se coupent en leur milieu. Quatre axes de symétrie, ses diagonales ¹ et les médiatrices des côtés.	Un centre de symétrie.
■ Losange		Quatre côtés isométriques. Des diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu. Deux axes de symétrie, ses diagonales ¹ .	Un centre de symétrie. Deux paires de côtés parallèles. Angles opposés isométriques.
■ Rhomboïde: cerf-volant Fer de lance		Deux paires de côtés consécutifs isométriques. Une diagonale aussi axe de symétrie ¹ . Des diagonales perpendiculaires, l'une coupe l'autre en son milieu.	Au moins deux angles opposés isométriques.

➤ Médiatrice d'un segment (p. 96), Angles isométriques (p. 105),
 Diagonale d'un polygone (p. 111)

¹ Bien que conscients que les axes de symétrie sont des droites et les diagonales des segments, les rédacteurs assument l'abus qui consiste à lier, dans ces formulations, axe de symétrie et diagonale.

Classement des quadrilatères



Remarque

Ce tableau, comme les propriétés caractéristiques des quadrilatères, permet de constater que :

- un carré est un rectangle, un losange, un parallélogramme, un rhomboïde, un trapèze ;
- un rectangle est un parallélogramme, un trapèze ;
- un losange est un parallélogramme, un rhomboïde, un trapèze ;
- un parallélogramme est un trapèze.

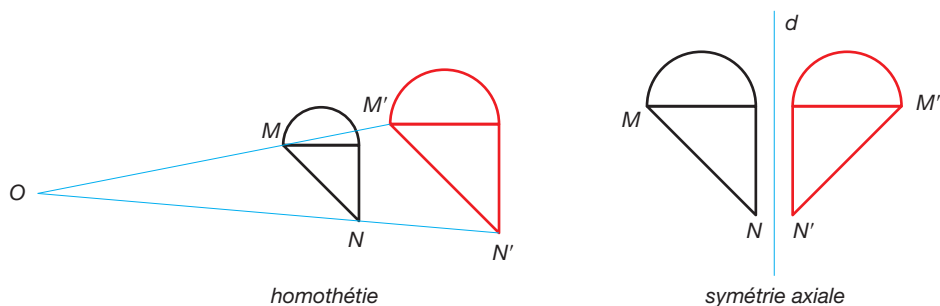
Transformations géométriques

Transformations du plan

Définition

On appelle transformation du plan dans lui-même tout procédé (déplacement, agrandissement, déformation, etc.) qui, à partir de n'importe quel point M du plan, permet de construire un point M' du plan. On dit que M' est l'image de M par cette transformation. M' est unique.

Exemples



Quelques propriétés des transformations du plan

ES

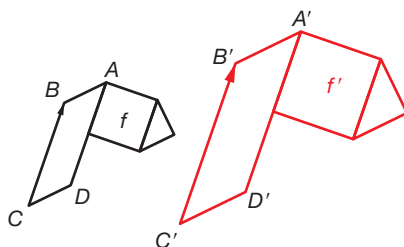
Propriété 1

Une transformation conserve les **longueurs**, si chaque segment a pour image un segment de même longueur.

Contre-exemple

Un agrandissement ne conserve pas les longueurs :

$$AB \neq A'B' ; BC \neq B'C' ; \dots$$



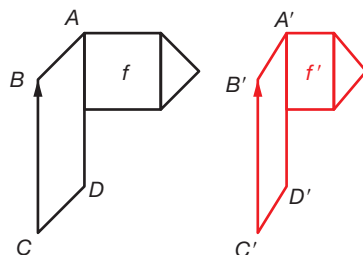
Propriété 2

Une transformation conserve les **mesures des angles**, si chaque angle a pour image un angle de même mesure.

Contre-exemple

La transformation ci-contre ne conserve pas les mesures des angles :

$$\widehat{ABC} \neq \widehat{A'B'C'} ; \widehat{BCD} \neq \widehat{B'C'D'} ; \dots$$



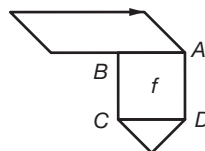
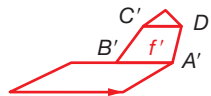
Propriété 3

Une transformation conserve le **parallélisme**, si chaque paire de droites ou de segments parallèles a pour image une paire de droites ou de segments parallèles.

Contre-exemple

La transformation ci-contre ne conserve pas le parallélisme :

$AD \parallel BC$, mais $A'D'$ n'est pas parallèle pas à $B'C'$.

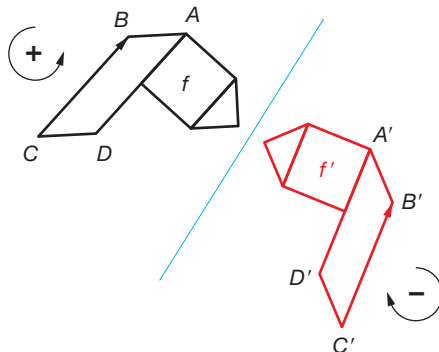
**Propriété 4**

Une transformation conserve l'**orientation**, si, en suivant les sommets consécutifs de la figure et de son image, on tourne dans le même sens.

Contre-exemple

Une symétrie axiale ne conserve pas l'orientation :

on lit les lettres ABCD et $A'B'C'D'$ en tournant dans des sens différents.

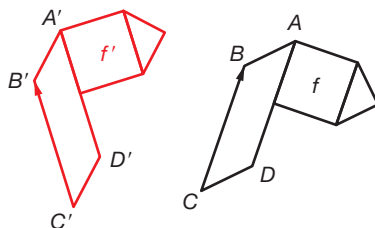
**Propriété 5**

Une transformation conserve les **directions**, si chaque droite a pour image une droite qui lui est parallèle.

Contre-exemple

Une rotation d'angle différent de 180° ou 360° ne conserve pas les directions :

les droites AB et $A'B'$ ne sont pas parallèles.

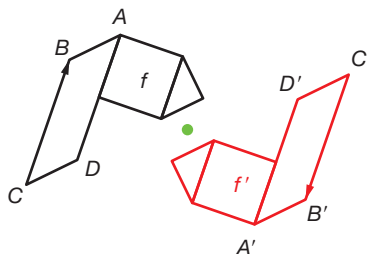
**Propriété 6**

Une transformation conserve le **sens des vecteurs**, si chaque vecteur a la même direction et le même sens que son image.

Contre-exemple

Une symétrie centrale ne conserve pas le sens des vecteurs :

les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{C'B'}$ n'ont pas le même sens.



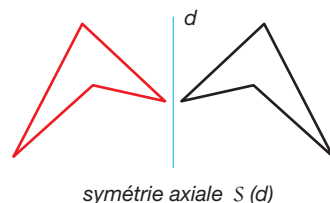
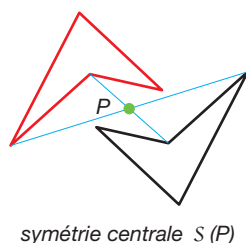
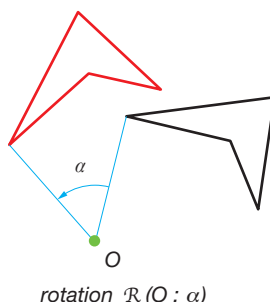
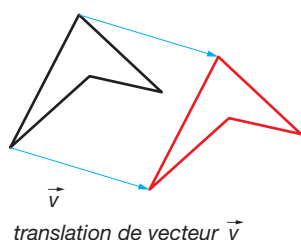
Isométrie

Définition Une isométrie est une transformation du plan qui conserve les longueurs.

- Conséquences**
- Une isométrie conserve la mesure des angles.
 - Une figure et son image par une isométrie ont la même forme et les mêmes dimensions, elles sont donc superposables.

Remarque La translation, la rotation, la symétrie centrale et la symétrie axiale sont des isométries.

Exemples



ÉTYM **Isométrie**: du grec *isos*, même et *metron*, mesure.

→ Translation (p. 129), Symétrie axiale (p. 130), Symétrie centrale (p. 132), Rotation (p. 134)

Vecteur

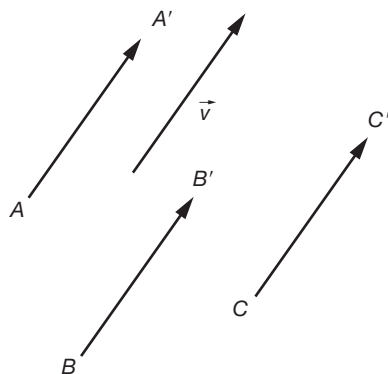
- Définitions**
- Un vecteur est un segment de droite orienté (flèche), noté, par exemple, $\vec{v}$.
 - Un vecteur possède une longueur, une direction et un sens.

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même longueur, la même direction et le même sens.

Exemple

Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ et $\vec{v}$ sont égaux, car ils ont la même direction (ils sont parallèles), même sens et même longueur.

On peut donc écrire $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{v}$.



Remarque Un vecteur peut être représenté par une infinité de segments orientés (flèches).

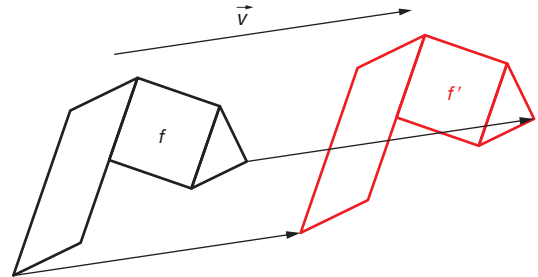
ÉTYM **Vecteur**: du latin *vector*, celui qui transporte.

Translation

- Définitions 1**
- Une translation est une isométrie qui consiste à faire glisser une figure sans la faire tourner.
 - Une translation est caractérisée par un **vecteur de translation** ($\vec{v}$) qui indique : la direction, le sens et la longueur du déplacement.

Exemple

La transformation qui amène f en f' est une translation de vecteur $\vec{v}$.



Notation

Du français...

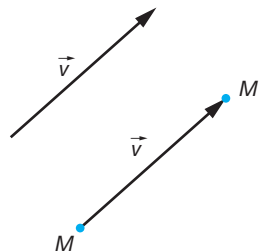
« La figure f a pour image la figure f' par la translation de vecteur $\vec{v}$. »

... à l'écriture mathématique

$$f \xrightarrow{T(\vec{v})} f'$$

- Définition 2** L'image d'un point M par une translation de vecteur $\vec{v}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Exemple



$\overrightarrow{MM'}$ a la même longueur, la même direction et le même sens que le vecteur $\vec{v}$.

Propriétés

La translation est une transformation qui conserve :

- les longueurs (isométrie) et la mesure des angles ;
- le parallélisme ;
- l'orientation ;
- les directions et le sens des vecteurs.

ÉTYM Translation : du latin *translatio*, transfert.

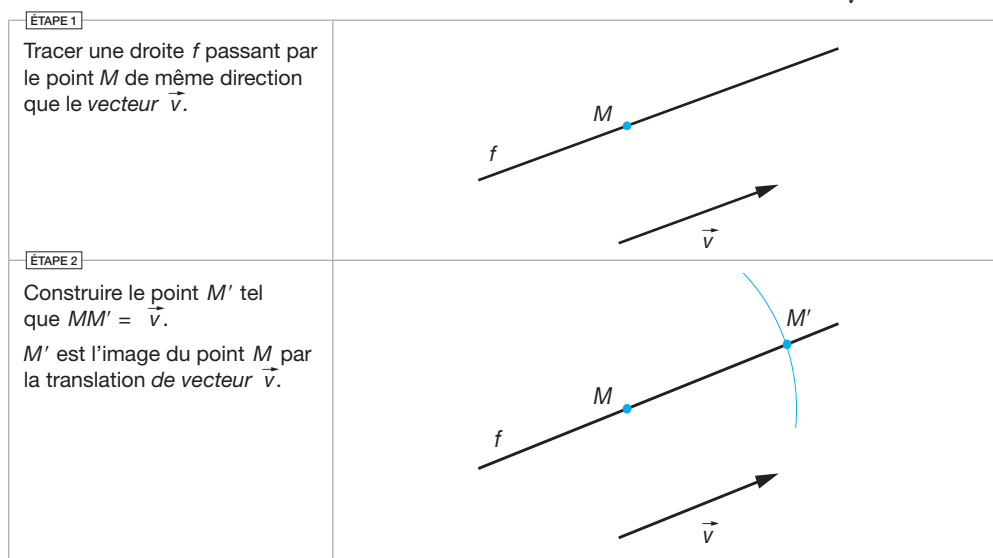
➡ Quelques propriétés des transformations du plan (p. 126), Isométrie (p. 128), Vecteur (p. 128),

Construire l'image d'un point par une translation

Méthode

Exemple Construire l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{v}$.

M



Remarque

Pour construire l'image d'un polygone par une translation, on peut :

- construire l'image de chacun de ses sommets et les relier ;
- construire l'image d'un sommet, puis utiliser les propriétés de la translation.

ES

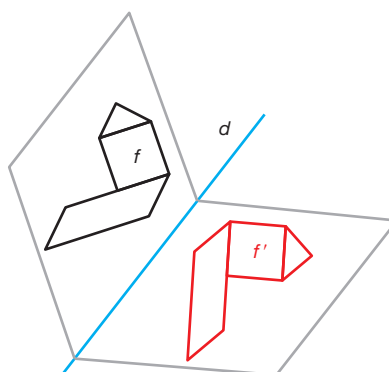
Symétrie axiale

Définitions 1

- Une symétrie axiale par rapport à une droite d est une isométrie telle qu'en pliant la feuille suivant la droite d , une figure et son image se superposent.
- d est appelé **axe de symétrie**.

Exemple

La transformation qui amène f en f' est une symétrie axiale.



Notation

Du français...

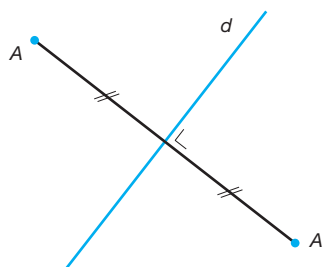
« La figure f a pour image la figure f' par la symétrie d'axe d . »

... à l'écriture mathématique

$$f \xrightarrow{S(d)} f'$$

Définition 2 L'image d'un point A par une symétrie d'axe d est le point A' tel que d est la médiatrice du segment AA' . On dit que A' est le symétrique de A par rapport à la droite d .

Exemple



Propriété La symétrie axiale est une transformation qui conserve les longueurs, la mesure des angles et le parallélisme mais ne conserve pas l'orientation, les directions et le sens des vecteurs.

Remarques

- Une droite (non parallèle à l'axe de symétrie) et son image se coupent sur l'axe de symétrie.
- Tous les points de l'axe de symétrie sont images d'eux-mêmes : ce sont des points fixes.

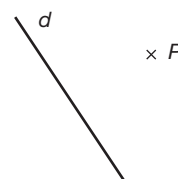
➡ Quelques propriétés des transformations du plan (p. 126), Isométrie (p. 128),
Axe de symétrie (p. 132)

ES

Construire l'image d'un point par une symétrie axiale

Méthode

Exemple Construire l'image du point P par la symétrie axiale d'axe d .



ÉTAPE 1 Tracer la demi-droite d'origine P perpendiculaire à l'axe de symétrie. Elle coupe la droite d en M.	
ÉTAPE 2 Placer le point P' sur cette demi-droite tel que $MP = MP'$. P' est l'image du point P par la symétrie d'axe d.	

Remarque

Pour construire l'image d'un polygone par une symétrie axiale, on peut :

- construire l'image de chacun de ses sommets et les relier ;
- construire l'image de deux sommets, puis utiliser les propriétés des symétries axiales.

Axe de symétrie

Définition

Une droite d est un axe de symétrie d'une figure si, après pliage le long de cette droite, les deux moitiés de la figure se superposent.

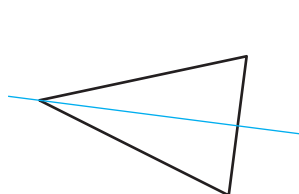
Exemple

Une figure peut...

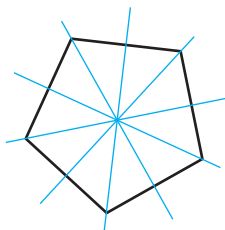
... avoir un axe de symétrie

... avoir plusieurs axes de symétrie

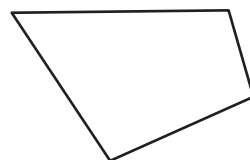
... ne pas avoir d'axe de symétrie



triangle isocèle



pentagone régulier



quadrilatère quelconque

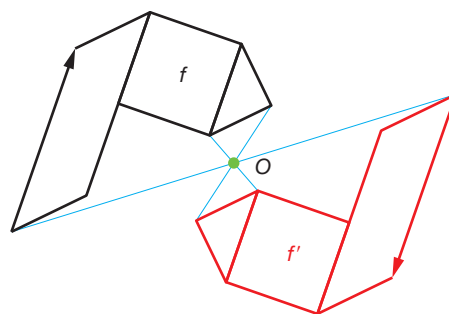
Symétrie centrale

Définition 1

Une symétrie centrale est une isométrie qui consiste à faire tourner une figure d'un demi-tour autour d'un point appelé **centre de symétrie**.

Exemple

La transformation qui amène f en f' est une symétrie centrale.



ES

Notation

Du français...

« La figure f a pour image la figure f' par la symétrie de centre O . »

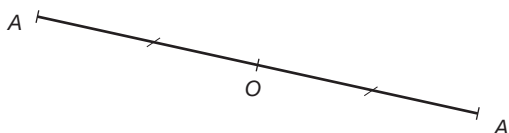
... à l'écriture mathématique

$$f \xrightarrow{S(O)} f'$$

Définition 2

L'image d'un point A par une symétrie de centre O est le point A' tel que O est le milieu du segment AA' . On dit que A' est le symétrique de A par rapport à O .

Exemple



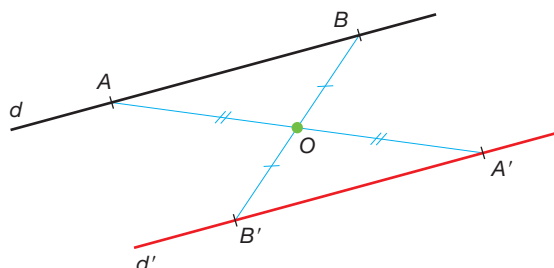
Propriété

La symétrie centrale est une transformation qui conserve les longueurs (isométrie), la mesure des angles, le parallélisme, l'orientation et les directions mais ne conserve pas le sens des vecteurs.

Par une symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite parallèle.

Exemple

$d \parallel d'$



✚ Quelques propriétés des transformations du plan (p. 126), Isométrie (p. 128), Centre de symétrie (p. 134), Rotation (p. 134)

Construire l'image d'un point par une symétrie centrale

Méthode

Exemple Construire l'image du point A par la symétrie de centre O .



ÉTAPE 1 Tracer la demi-droite d'origine A passant par le centre de symétrie O.	
ÉTAPE 2 Placer le point A' sur cette demi-droite tel que $OA = OA'$. A' est l'image du point A par la symétrie de centre O.	

Remarque

Pour construire l'image d'un polygone par une symétrie centrale, on peut :

- construire l'image de chacun de ses sommets et les relier ;
- construire l'image d'un sommet, puis utiliser les propriétés des symétries centrales.

Centre de symétrie

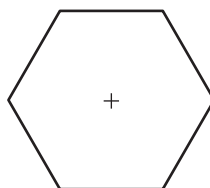
Définitions

- Une figure a un **centre de symétrie** si, lorsqu'on la fait tourner d'un demi-tour autour de ce point, elle se superpose à elle-même.
- Le centre de symétrie d'une figure est un point tel que tous les points de la figure sont deux à deux symétriques par rapport à lui.

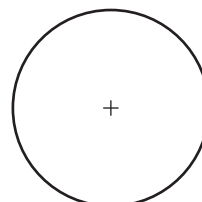
Exemples

Une figure peut...

... avoir un centre de symétrie

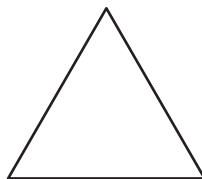


hexagone régulier

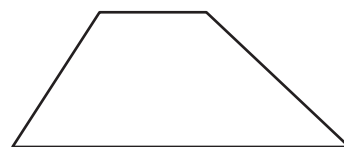


cercle

... ne pas avoir de centre de symétrie



triangle équilatéral



trapèze

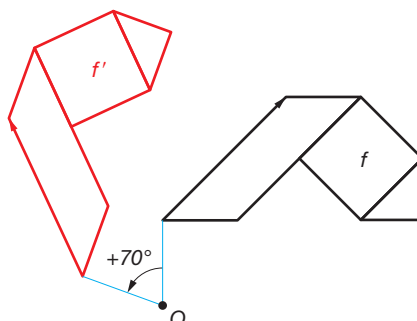
Rotation

Définitions 1

- Une **rotation** est une isométrie qui consiste à faire tourner une figure autour d'un point appelé **centre de rotation**, suivant un angle donné appelé **angle de rotation**.
- Cet angle est précédé d'un signe qui indique le **sens de la rotation** :
 - si c'est le signe +, on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
 - si c'est le signe -, on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exemple

La transformation qui amène f en f' est une rotation.



Notation

Du français...

« La figure f a pour image la figure f' par la rotation de centre O et d'angle $+70^\circ$. »

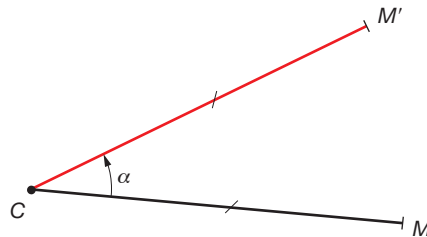
... à l'écriture mathématique

$$f \xrightarrow{\mathcal{R}(O; +70^\circ)} f'$$

Définition 2 Etant donné une mesure α d'un angle et un point C , on appelle **rotation de centre C et d'angle α** la transformation qui, à tout point M (différent de C), associe le point M' tel que :

- $CM = CM'$;
- $\widehat{MCM'} = \alpha$ (en respectant le sens de rotation) ;
- C est un point fixe (invariant).

Exemple



Notation On note cette rotation $\mathcal{R}(C ; \alpha)$.

- Remarques**
- L'image de C par la rotation de centre C est C lui-même.
 - Cas particulier : $\mathcal{R}(C ; 180^\circ)$ est la symétrie de centre C .

Propriété Une rotation est une transformation qui conserve les longueurs (isométries), la mesure des angles, le parallélisme et l'orientation mais ne conserve pas les directions sauf si l'angle mesure 180° ou 360° .

ETYM **Rotation** : du latin *rota*, roue ; *rotare*, tourner comme une roue.

➡ Quelques propriétés des transformations du plan (p. 126), Isométrie (p. 128)

Construire l'image d'un point par une rotation

Méthode

Exemple Construire l'image M' du point M par la rotation $\mathcal{R}(C; -50^\circ)$.



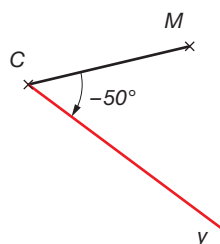
ÉTAPE 1

Tracer le segment CM .



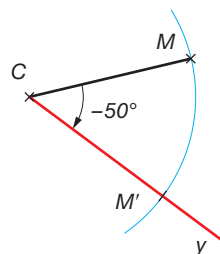
ÉTAPE 2

Tracer la demi-droite Cy tel que $\widehat{MCy}$ soit égal à l'angle de la rotation (attention au sens de rotation).



ÉTAPE 3

Placer le point M' sur la demi-droite Cy tel que $CM' = CM$ avec le compas ou la règle graduée.



Remarque

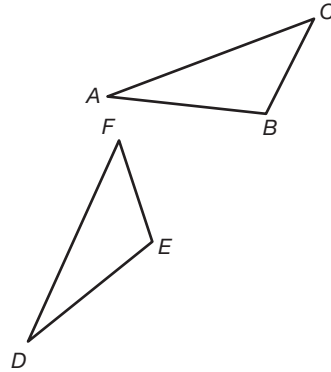
Pour construire l'image d'un polygone par une rotation, on peut :

- construire l'image de chacun de ses sommets et les relier ;
- construire l'image de deux sommets, puis utiliser les propriétés des rotations.

Retrouver le centre et l'angle d'une rotation

Méthode

Exemple Le triangle ABC a pour image le triangle DEF par une rotation. Retrouver les caractéristiques de cette rotation.



ÉTAPE 1

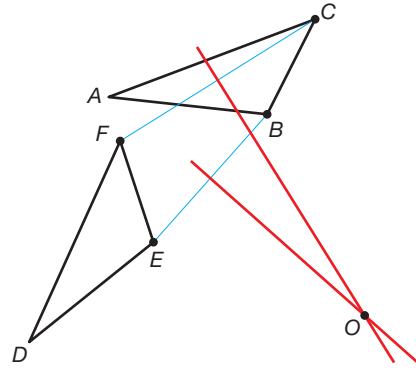
Repérer deux couples de points et leur image par la rotation.
Pour cela, on peut identifier des sommets d'angles isométriques.

$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ donc l'image de B est E .
 $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$ donc l'image de C est F .

ÉTAPE 2

Tracer la médiatrice des segments dont les extrémités sont un point et son image.
Leur point d'intersection est le centre de la rotation.

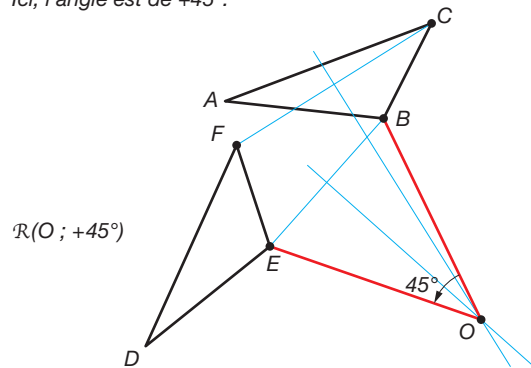
On trace les médiatrices des segments BE et CF .
Le point O intersection de ces deux médiatrices est le centre de la rotation.



ÉTAPE 3

Mesurer l'angle de la rotation (attention au sens de rotation).

L'angle de la rotation est la mesure de l'angle $\widehat{BOE}$.
Ici, l'angle est de $+45^\circ$.



Homothétie

Définition 1 Une homothétie est une transformation qui consiste à agrandir ou réduire une figure tout en conservant les directions.

Définition 2 Etant donné un point O et un nombre k non nul, on appelle **homothétie de centre O** et de rapport k la transformation qui, à tout point M , associe un point M' tel que :

- le point O est un point fixe ;
- les points O , M et M' sont alignés.
- Si $k > 0$, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ont le même sens et $OM' = k \cdot OM$;
- si $k < 0$, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont de sens contraire et $OM' = -k \cdot OM$.

Notation

Du français...

« La figure f a pour image la figure f' par homothétie de centre O et de rapport k . »

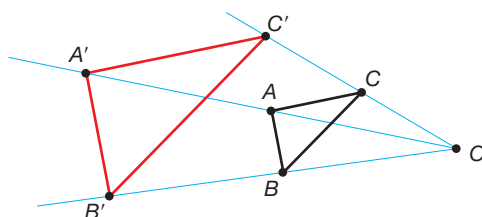
... à l'écriture mathématique

$$f \xrightarrow{\mathcal{H}(O; k)} f'$$

Exemples

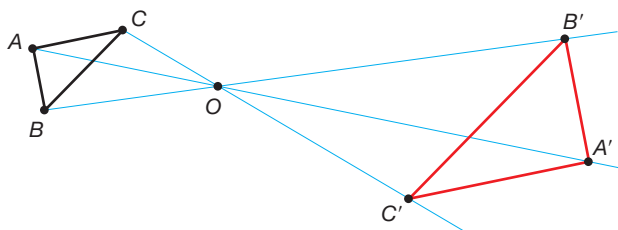
○ $\mathcal{H}(O; 2)$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont de même sens et $OA' = 2 \cdot OA$.



○ $\mathcal{H}(O; -2)$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont de sens contraire et $OA' = -2 \cdot OA$.



Propriété

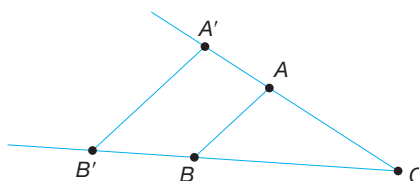
Si un segment AB a pour image un segment $A'B'$ par une homothétie de centre C et de rapport k , alors $\frac{A'B'}{AB} = k$ si $k > 0$ ou $\frac{A'B'}{AB} = -k$ si $k < 0$.

Exemple

$A'B'$ est l'image de AB par une homothétie de centre C et de rapport 1,5.

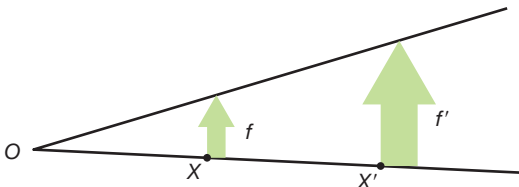
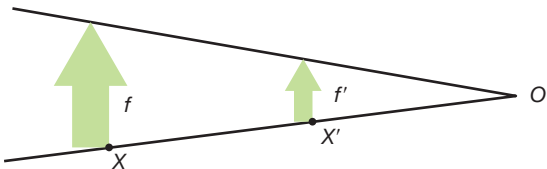
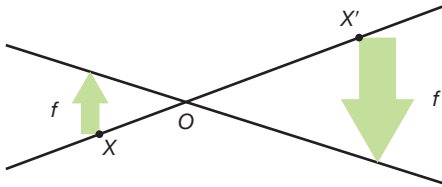
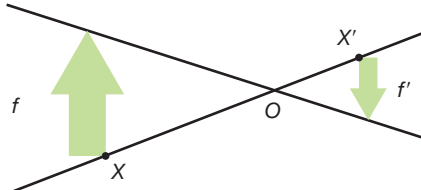
$$\begin{array}{ll} CA = 3 & CB = 4 \\ CA' = 4,5 & CB' = 6 \end{array}$$

$$\text{Donc : } \frac{A'B'}{AB} = 1,5.$$



Conséquence Pour retrouver le rapport d'une homothétie sans connaître son centre, on peut calculer le rapport des longueurs des segments image l'un de l'autre par l'homothétie.

On distingue quatre types d'homothéties.

Nom	Propriétés	Caractéristiques
■ L'agrandissement direct	Il conserve : - le rapport des longueurs, la mesure des angles, le parallélisme ; - l'orientation ; - la direction et le sens des vecteurs.	- La figure image est plus grande que celle de départ ; $k > 1$; - la figure et son image sont du même côté du centre d'homothétie.
Exemple <i>Ici, $k = 2$.</i>		
		
■ La réduction directe	Il conserve : - le rapport des longueurs, la mesure des angles, le parallélisme ; - l'orientation ; - la direction et le sens des vecteurs.	- La figure image est plus petite que celle de départ ; $0 < k < 1$; - la figure et son image sont du même côté du centre d'homothétie.
Exemple <i>Ici, $k = \frac{1}{2} = 0,5$.</i>		
		
■ L'agrandissement indirect	Il conserve : - le rapport des longueurs, la mesure des angles, le parallélisme ; - l'orientation ; - la direction mais inverse le sens des vecteurs.	- La figure image est plus grande que celle de départ ; $k < -1$; - la figure image est de l'autre côté du centre d'homothétie.
Exemple <i>Ici, $k = -2$.</i>		
		
■ La réduction indirecte	Il conserve : - le rapport des longueurs, la mesure des angles, le parallélisme ; - l'orientation ; - la direction mais inverse le sens des vecteurs.	- La figure image est plus petite que celle de départ ; $-1 < k < 0$; - la figure image est de l'autre côté du centre d'homothétie.
Exemple <i>Ici, $k = -\frac{1}{2} = -0,5$.</i>		
		

ÉTYM Homothétie : du grec *homos*, semblable et *thetos*, position.

Figures semblables (p. 122), Vecteur (p. 128)

Construire l'image d'un point par une homothétie

Méthode

Construire l'image d'un point par une homothétie de rapport positif.

Exemple 1 Construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 3$.

ÉTAPE 1 Tracer la droite OA.	
--	--

Méthode

Construire l'image d'un point par une homothétie de rapport négatif.

Exemple 2 Construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport $k = -3$.

ÉTAPE 1 Tracer la droite OA.	
--	--

Remarque

Pour construire l'image d'un polygone par une homothétie, on peut :

- construire l'image de chacun de ses sommets et les joindre ;
- construire l'image d'un sommet et compléter la figure en utilisant les propriétés des homothéties.

Propriétés des isométries et des homothéties du plan

Transformation \ Conservation	Longueurs	Mesure des angles	Parallélisme	Orientation	Directions	Sens des vecteurs
Translation	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Rotation	oui	oui	oui	oui	non ¹	non ²
Symétrie centrale	oui	oui	oui	oui	oui	non
Symétrie axiale	oui	oui	oui	non	non	non
Homothétie de rapport positif	non ³	oui	oui	oui	oui	oui
Homothétie de rapport négatif	non ⁴	oui	oui	oui	oui	non

¹ sauf si l'angle mesure 180° ou 360°

² sauf si l'angle mesure 360°

³ sauf si le rapport est 1

⁴ sauf si le rapport est -1

Similitude

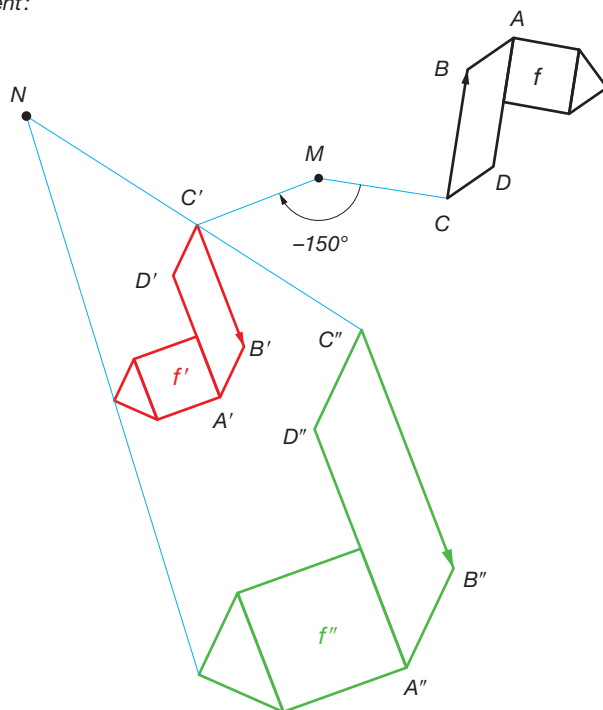
Définition

Une similitude est la composition d'isométries et d'homothéties. Elle consiste à appliquer successivement une isométrie, puis une homothétie ou inversement.

Exemple

La figure f'' est l'image de f par une similitude.
On effectue en effet successivement :

- Pour passer de f à f' :
la rotation : $\mathcal{R}(M ; -150^\circ)$
- Pour passer de f' à f'' :
l'homothétie : $\mathcal{H}(N ; 2)$



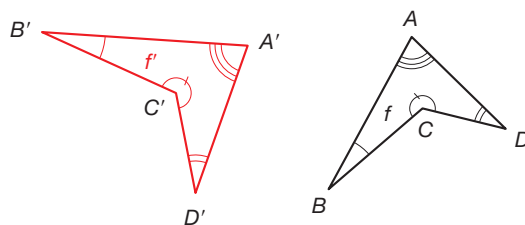
Propriété

Une similitude (qui n'est pas une isométrie) est une transformation qui agrandit ou réduit une figure. Elle conserve la mesure des angles et le rapport des longueurs.

Exemple

Les figures f et f' sont images l'une de l'autre par une similitude.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$$



Remarque

Par une similitude, une figure et son image ont la même forme, mais pas nécessairement les mêmes dimensions.

ÉTYM Similitude : du latin *similis*, semblable.

➡ Isométrie (p. 128), Homothétie (p. 138)

Géométrie dans l'espace

Représentation d'un objet dans l'espace

Il y a plusieurs manières de représenter un polyèdre sur une feuille de papier. En voici quelques-unes.

La perspective cavalière

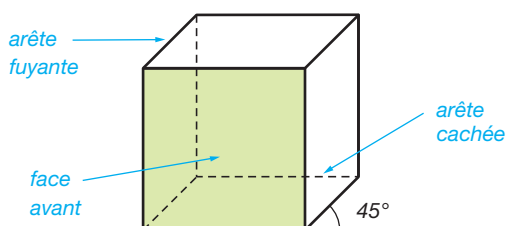
Définition

La perspective cavalière possède les caractéristiques suivantes :

- elle privilégie une face de l'objet, appelée face avant, représentée sans déformation ;
- les arêtes perpendiculaires à la face avant fuient vers la droite ou vers la gauche, généralement avec une inclinaison de 30° ou de 45° ;
- les longueurs des arêtes fuyantes sont généralement réduites de moitié ou d'un tiers.

Exemple

Cube en perspective cavalière.



La perspective artistique

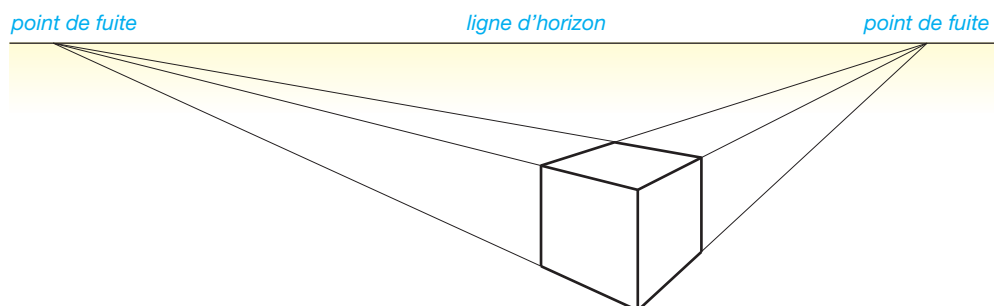
Définition

La perspective artistique possède les caractéristiques suivantes :

- elle est construite à partir de **points de fuite** situés sur une ligne d'horizon ;
- l'objet est représenté tel que l'œil le perçoit.

Exemple

Cube en perspective à deux points de fuite.



La perspective isométrique

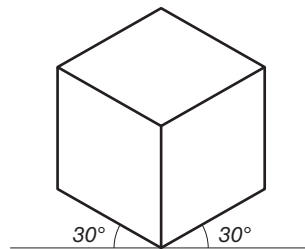
Définition

La perspective isométrique possède les caractéristiques suivantes :

- les arêtes verticales de l'objet restent verticales sur le dessin ;
- les arêtes horizontales fuient à gauche et à droite avec une inclinaison de 30° ;
- l'échelle est la même pour les trois dimensions.

Exemple

Cube en perspective isométrique.



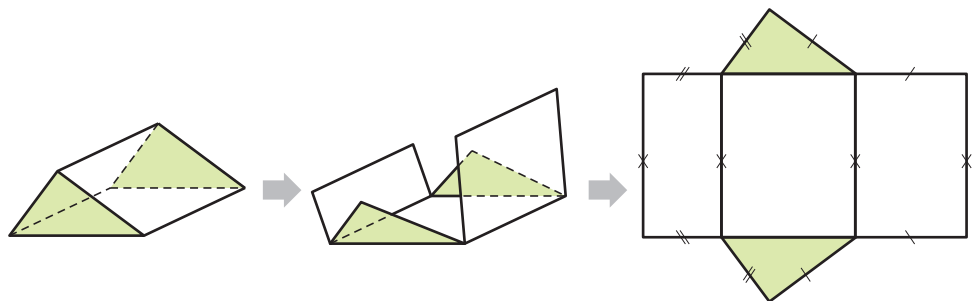
Le développement

Définition

Le **développement d'un solide**, aussi appelé **patron**, est une figure plane qui permet de construire ce solide après découpage et pliage. Le nombre de faces du développement est exactement celui du solide.

Exemple

Développement d'un prisme droit dont la base est un triangle rectangle.



Remarque

Pour reconnaître si le développement d'un solide est correct, on peut le plier mentalement (c'est-à-dire imaginer qu'on le découpe et qu'on reconstitue le solide), puis s'assurer :

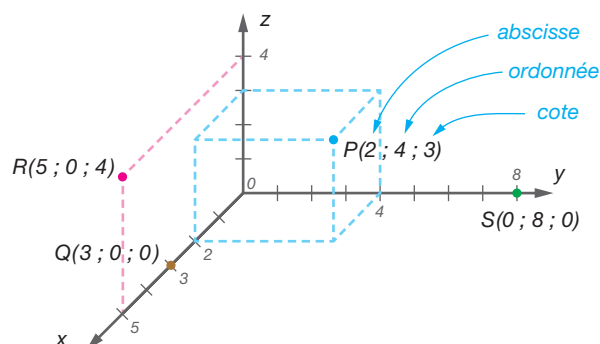
- que le nombre et la forme des faces soient corrects ;
- que les arêtes amenées à se superposer lors du pliage soient de la même longueur ;
- que deux faces ne se superposent pas.

Repérage d'un point dans l'espace

Définitions

- Pour pouvoir repérer un point dans l'espace, on peut utiliser trois axes gradués de même origine. Ces axes sont généralement perpendiculaires les uns aux autres. Ils forment ce qu'on appelle un **repère**.
- Le point d'intersection des axes est appelé **origine** du repère.
- Un point est alors repéré par un triplet $(x ; y ; z)$ de nombres réels, appelé **coordonnées** du point.
- Le 1^{er} nombre x du triplet est appelé **abscisse**. Il situe le point par rapport à l'axe des x .
- Le 2^e nombre y du triplet est appelé **ordonnée**. Il situe le point par rapport à l'axe des y .
- Le 3^e nombre z du triplet est appelé **cote**. Il situe le point par rapport à l'axe des z .

Exemple

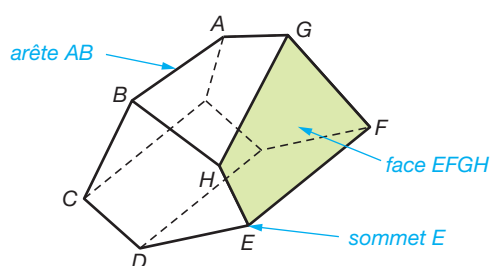


Polyèdre

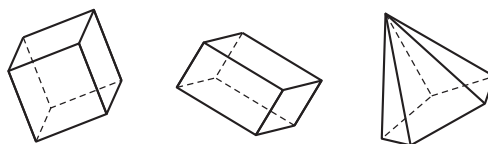
Définition

Un polyèdre est un **solide** dont toutes les faces sont des polygones.

Exemples

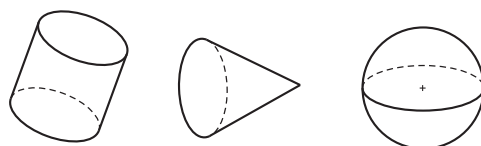


Le cube, le parallélépipède rectangle, la pyramide, etc. sont des polyèdres.



Contre-exemples

Le cylindre, le cône, la boule, etc. ne sont pas des polyèdres.

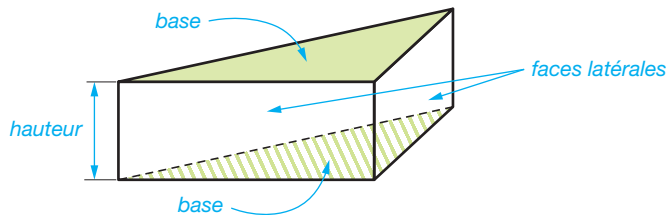


Prisme droit

Définitions

- Un prisme droit est un polyèdre qui possède :
 - deux faces polygonales, parallèles et superposables, appelées les bases du prisme droit ;
 - des faces latérales rectangulaires.
- La distance entre les deux bases est appelée hauteur du prisme droit.

Exemple



Conséquence Toutes les faces latérales d'un prisme droit sont perpendiculaires aux deux bases.

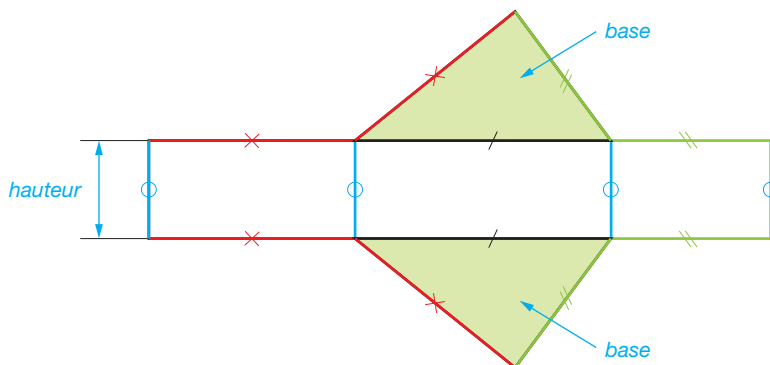
Développement d'un prisme droit

Le développement (ou patron) d'un prisme droit est formé :

- de deux polygones qui sont les bases du prisme droit ;
 - de rectangles dont une des dimensions est la hauteur du prisme droit.
- L'autre dimension est égale au côté correspondant de la base.

Exemple

Développement possible d'un prisme droit à base triangulaire.

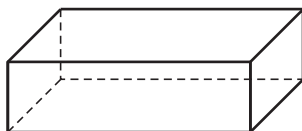


● Parallélépipède rectangle ou pavé droit

Définition

Un parallélépipède rectangle est un polyèdre dont les six faces sont des rectangles. On l'appelle aussi pavé droit. Les faces opposées sont des rectangles superposables.

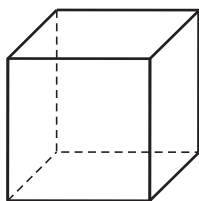
Exemple



Définition

Un **cube** est un polyèdre dont les six faces sont des carrés identiques. C'est un parallélépipède rectangle particulier.

Exemple



ES

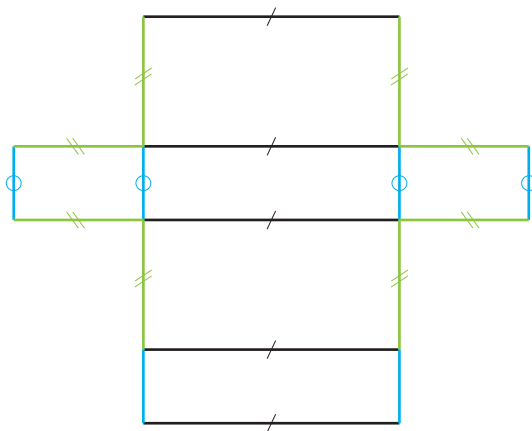
Conséquence Un parallélépipède rectangle est un prisme droit particulier.

Développement d'un parallélépipède rectangle ou pavé droit

Le développement (ou patron) d'un parallélépipède rectangle est formé de six rectangles.

Exemple

Développement possible d'un parallélépipède rectangle.



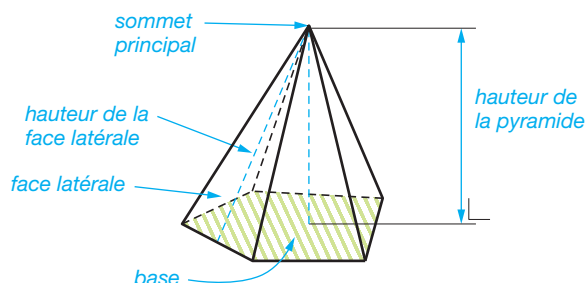
Pyramide

Définitions

- Une pyramide est un polyèdre dont la base est un polygone et dont les faces latérales sont des triangles qui ont un sommet commun appelé sommet principal de la pyramide.
- La distance entre ce sommet et la base est appelée hauteur de la pyramide.

Exemple

Cette pyramide possède six sommets, cinq appartenant à la base et le sommet principal.

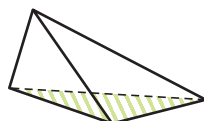


⚠ Ne pas confondre la hauteur de la pyramide avec la hauteur d'une des faces latérales.

Définition

Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

Exemple

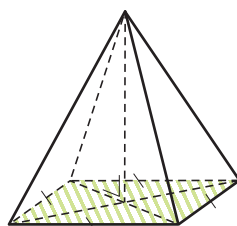


Définitions

Une **pyramide** est **régulière** si sa base est un polygone régulier et si ses faces latérales sont des triangles isocèles. Son sommet principal se projette perpendiculairement au centre de la base.

Exemple

Pyramide régulière à base carrée.

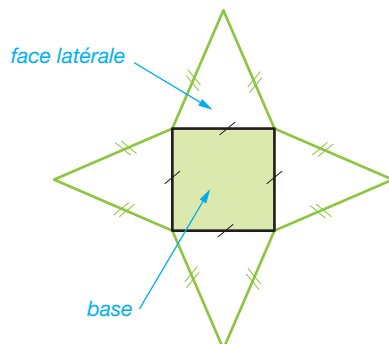


Développement de la pyramide

Le développement (ou patron) d'une pyramide est formé d'un polygone qui est la base de la pyramide et de triangles.

Exemple

Développement possible d'une pyramide dont la base est un quadrilatère.

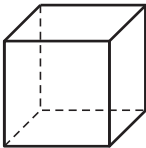
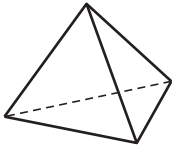
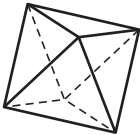
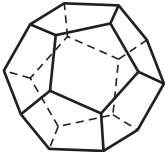
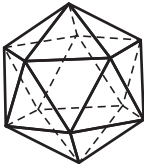


● Polyèdre régulier

Définitions Un polyèdre régulier est un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers isométriques et dont chacun des sommets est l'intersection d'un même nombre d'arêtes.

- Remarques**
- Si les faces du polyèdre sont convexes, on parle de polyèdre régulier convexe.
 - Il y a neuf polyèdres réguliers dont cinq sont convexes. Ils sont appelés polyèdres de Platon.

Les cinq polyèdres réguliers convexe

Nom	Figure	Définition
■ Cube		Polyèdre dont les six faces sont des carrés.
■ Tétraèdre régulier		Polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux. C'est une pyramide particulière.
■ Octaèdre régulier		Polyèdre dont les huit faces sont des triangles équilatéraux.
■ Dodécaèdre régulier		Polyèdre dont les douze faces sont des pentagones réguliers.
■ Icosaèdre régulier		Polyèdre dont les vingt faces sont des triangles équilatéraux.

ÉTYM Polyèdre: du grec *polis*, beaucoup et *hedra*, face: plusieurs faces.

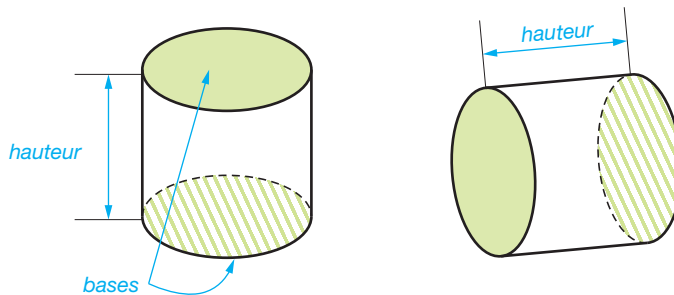
→ Polygone convexe ou non convexe (p. 111), Polygone régulier (p. 112)

Cylindre droit

Définitions

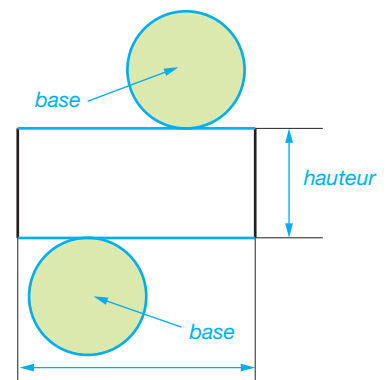
- Un cylindre a deux faces superposables et parallèles qui sont des disques. Ces faces sont appelées bases du cylindre.
- La distance entre ces deux faces est appelée hauteur du cylindre.

Exemples



Développement du cylindre droit

Le développement (ou patron) d'un cylindre droit est formé de deux disques qui sont les bases du cylindre et (généralement) d'un rectangle qui est la surface latérale du cylindre. Une dimension de ce rectangle est la hauteur du cylindre et l'autre dimension est le périmètre d'un des disques de base.



Remarque

Les deux cercles sont tangents aux côtés du rectangle qui ne correspondent pas à la hauteur.

ÉTYM Cylindre: du grec *kulindros*, rouleau.

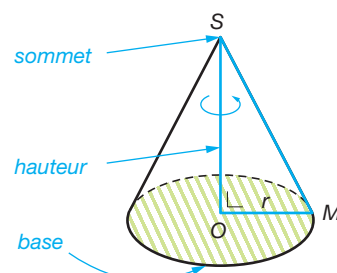
Cône de révolution

Définitions

- Un cône de révolution est le solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour d'un côté de l'angle droit. Sa base est un disque.
- La distance entre le sommet du cône et le centre du disque de base est la hauteur du cône.

Exemple

En faisant tourner le triangle rectangle SOM autour du côté SO on obtient le cône représenté ci-contre.



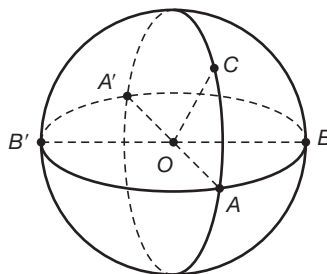
Sphère ou boule

Définitions

- Une sphère est l'ensemble des points de l'espace qui sont à égale distance d'un point, appelé centre.
- Cette distance est appelée le rayon de la sphère.

Exemple

Les segments OA , OB , OC sont des rayons de la sphère, donc $OA = OB = OC$.
On a représenté ci-contre une sphère de centre O .
Les segments AA' et BB' sont des diamètres de la sphère, donc $AA' = BB'$.



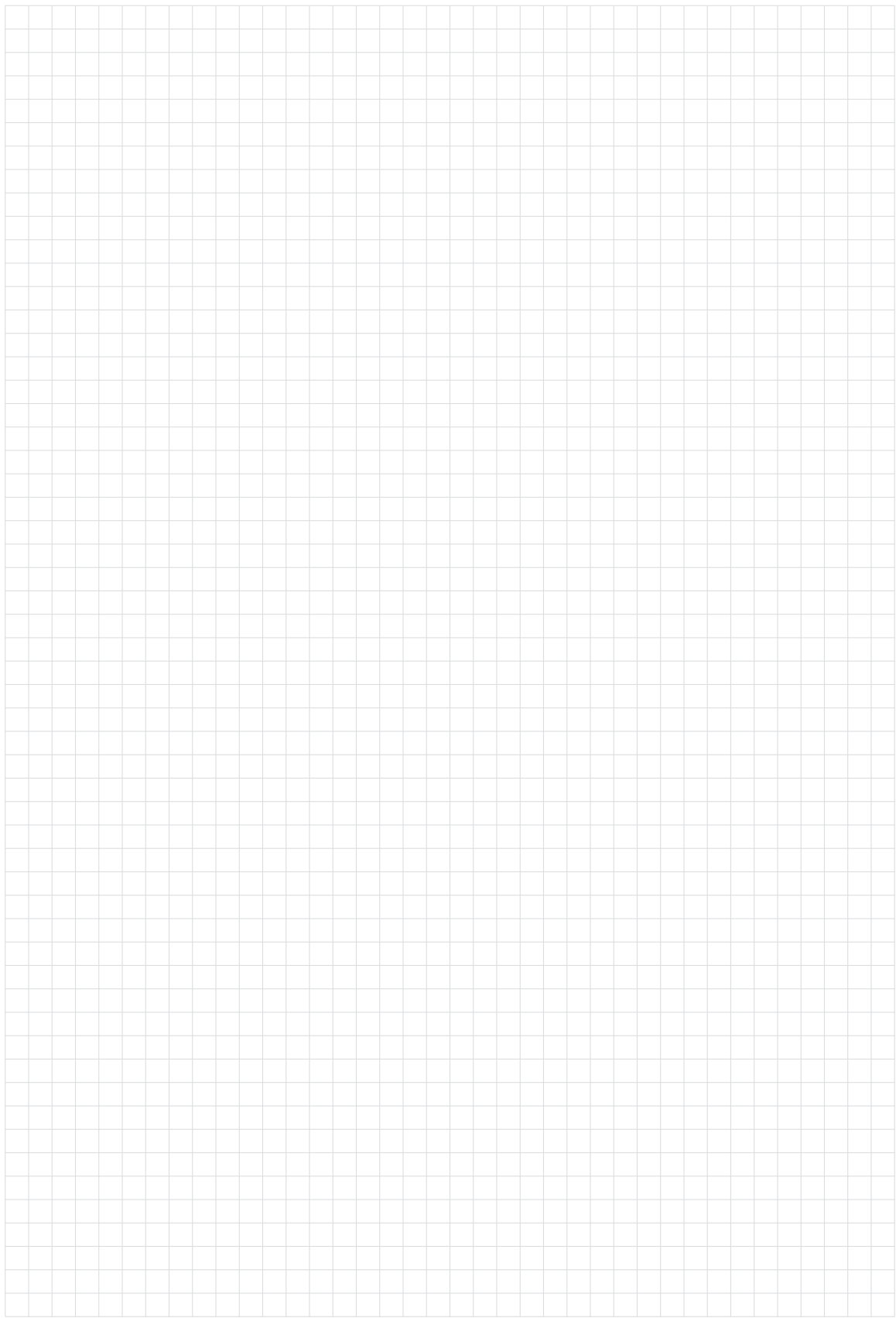
Définitions

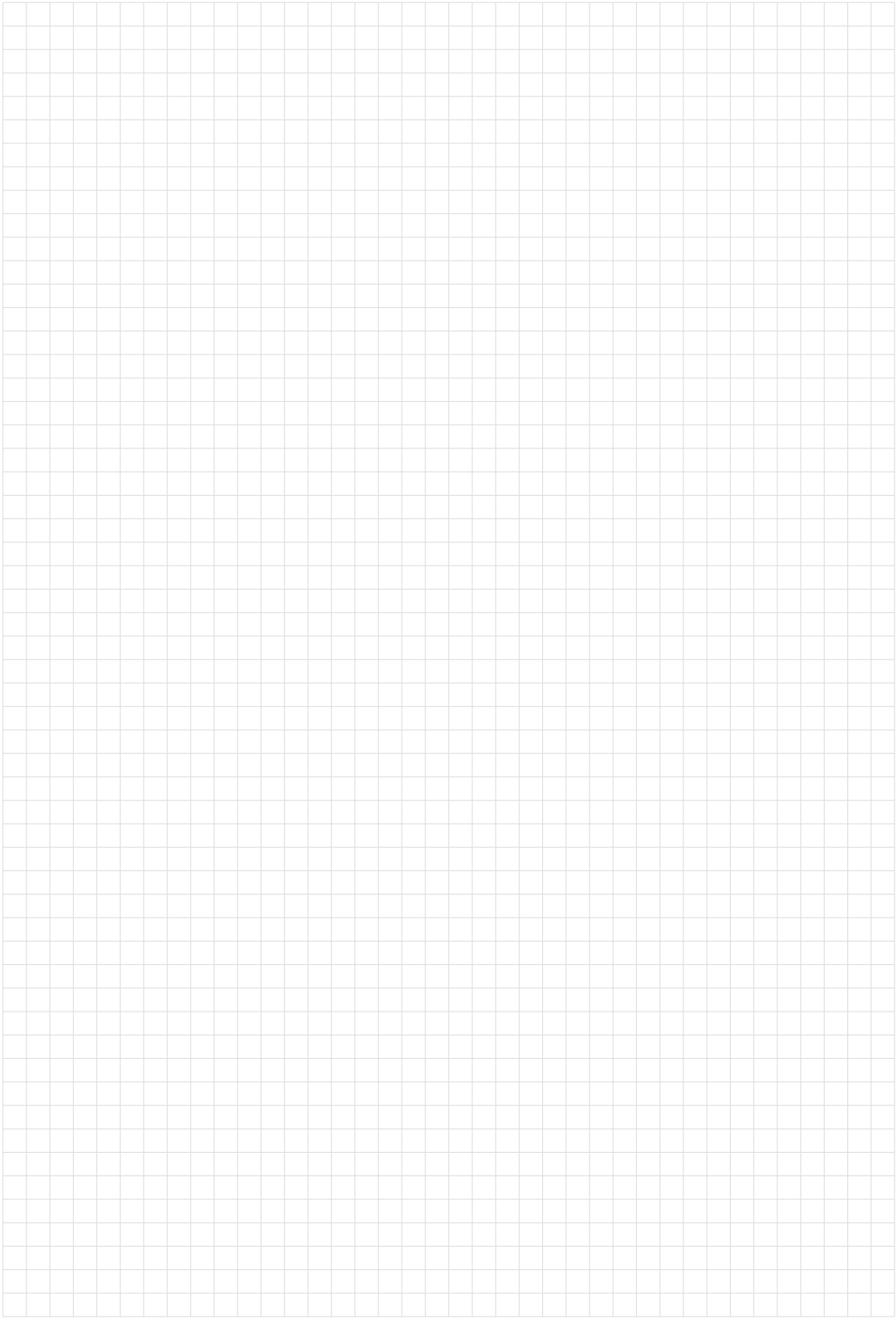
- Une boule est l'ensemble des points de l'espace délimités par une sphère.
- Le **centre de la boule** est le centre de la sphère.
- Le **rayon de la boule** est le rayon de la sphère.

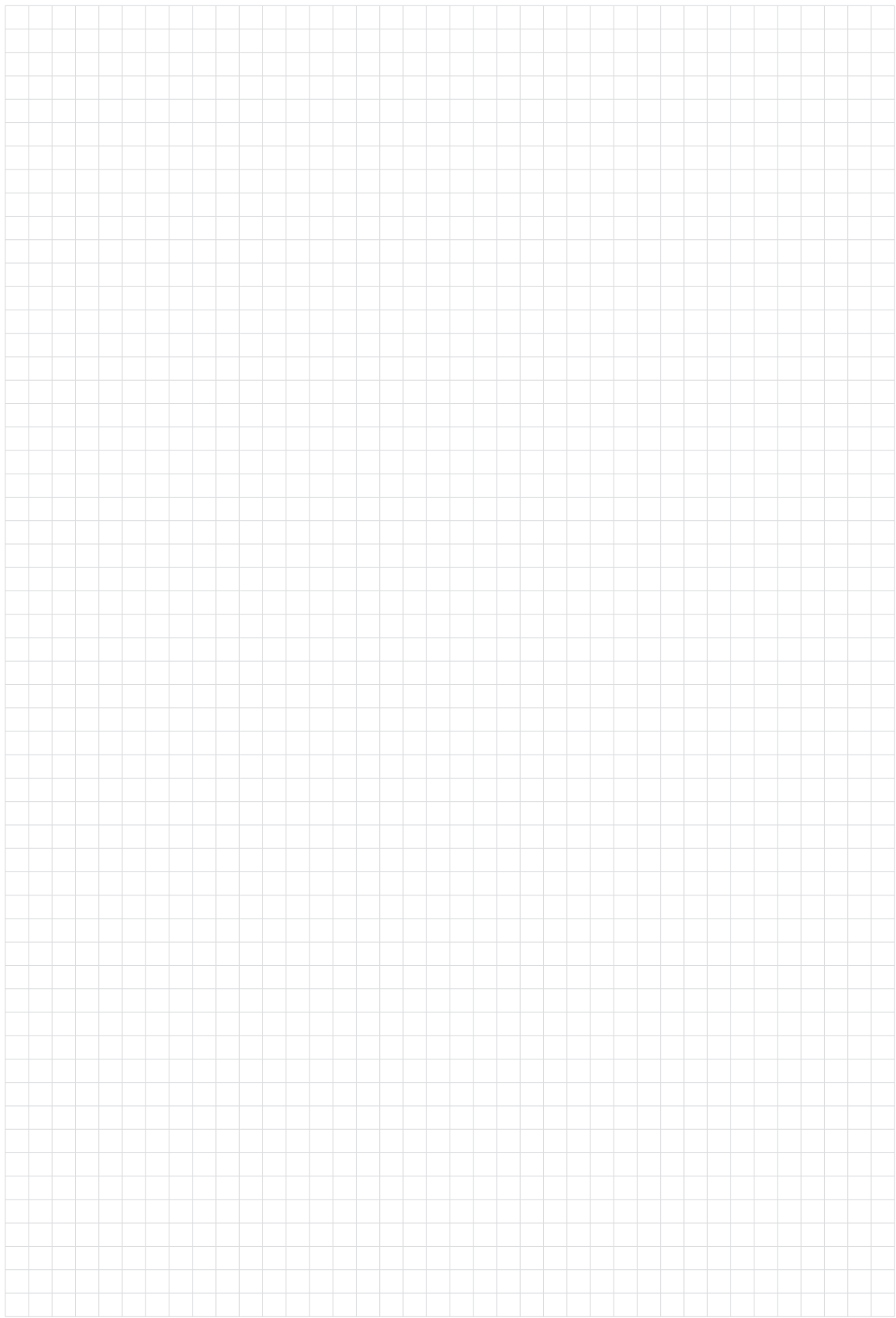
Remarque

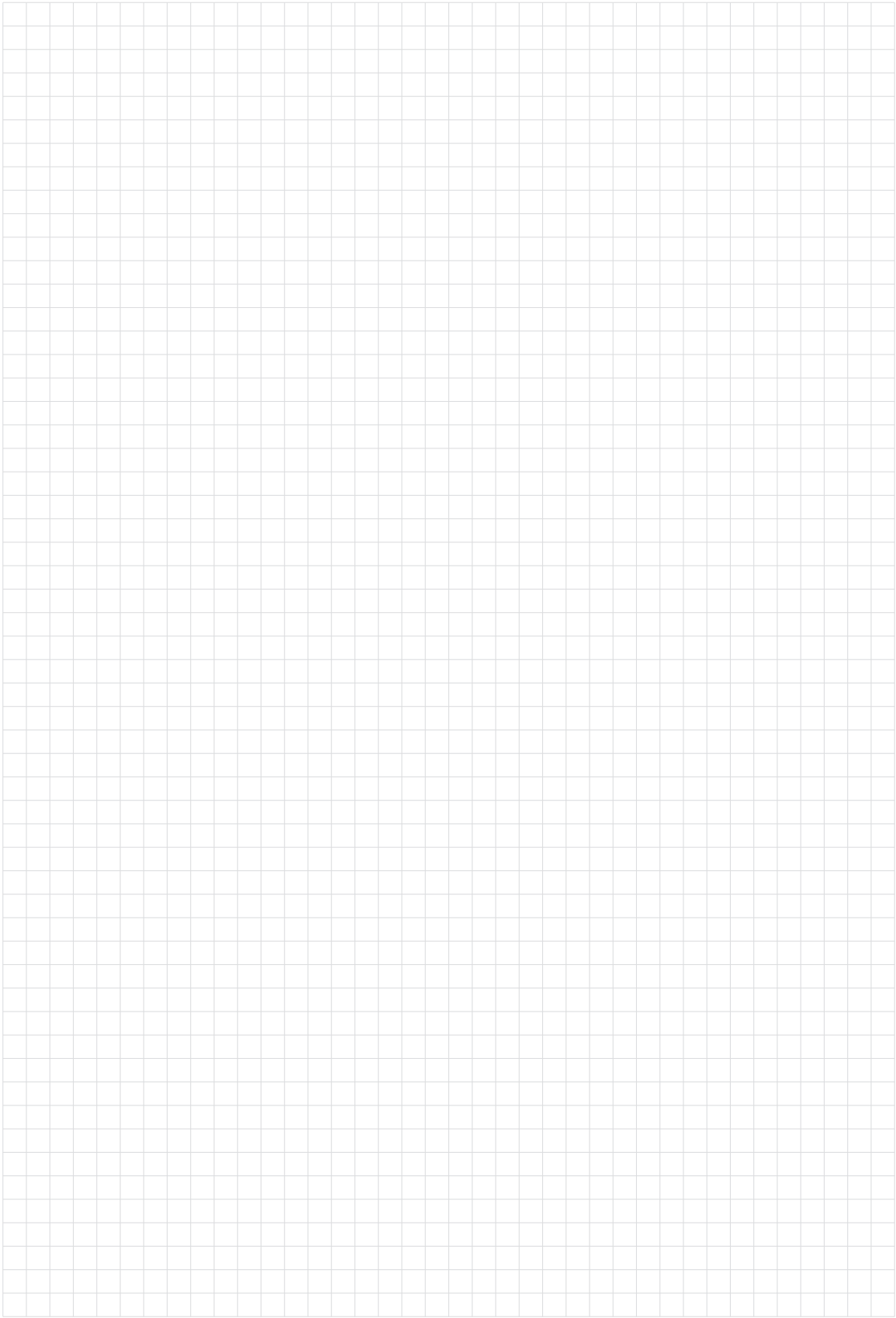
Une **boule** est donc un **solide**. La **sphère** est la **surface** qui délimite une boule.

ÉTYM Sphère : du grec *sphaira*, balle, sphère.









Grandeurs et mesures

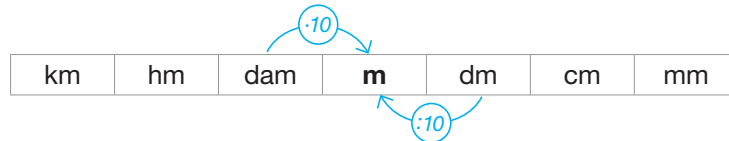
- Unités de mesure
- Périmètre d'une surface
- Aire d'une surface
- Volume d'un solide
- Théorèmes

Unités de mesure

Unités de longueur

Définitions

- Dans le système métrique, le **mètre (m)** est l'unité principale de mesure des longueurs.
- On utilise aussi des multiples du mètre : décamètre (dam), hectomètre (hm), kilomètre (km) ainsi que des sous-multiples : décimètre (dm), centimètre (cm), millimètre (mm).



Exemples

- $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$



- $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$; $100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$; $0,1 \text{ m} = 1 \text{ dm}$

Remarque

Il existe d'autres unités de longueur que celles du système métrique.

Exemples

Le pouce : $2,54 \text{ cm}$; le pied : $0,3048 \text{ m}$; le mille marin : 1852 m ; l'année-lumière : $\sim 10^{13} \text{ km}$

→ Puissance de dix (p. 33)

Convertir les unités de longueur

Méthode 1

En utilisant les relations entre les différentes unités.

Exemple Exprimer $1528,9 \text{ m}$ en km .

ÉTAPE

Il y a trois unités pour passer des mètres aux kilomètres (dam, hm, km). On déplace donc la virgule de trois rangs vers la gauche.

Ou

$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$; on divise donc $1528,9$ par 1000 .

$$1,528,9 \text{ m} = 1,5289 \text{ km}$$

Méthode 2

En utilisant un tableau de conversion.

Exemples Exprimer $1528,9 \text{ m}$ en km , 12 mm en m et $2,5 \text{ hm}$ en m .

ÉTAPE

Pour écrire le nombre dans le tableau, on repère la case dans laquelle on doit placer son **chiffre des unités**.

On place ensuite la virgule dans la case correspondant à l'unité demandée et on complète éventuellement les cases vides par des **0**.

$1528,9 \text{ m}$ en km :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1,	5	2	8	9		

$$1528,9 \text{ m} = 1,5289 \text{ km}$$

12 mm en m :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
			0,	0	1	2

$$12 \text{ mm} = 0,012 \text{ m}$$

$2,5 \text{ hm}$ en m :

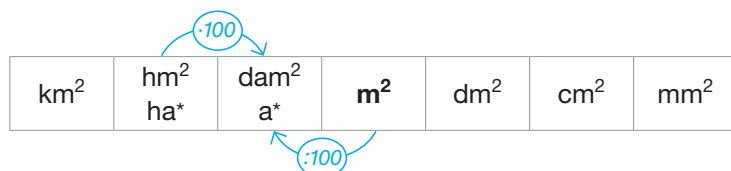
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	2,	5	0			

$$2,5 \text{ hm} = 250 \text{ m}$$

Unités d'aire

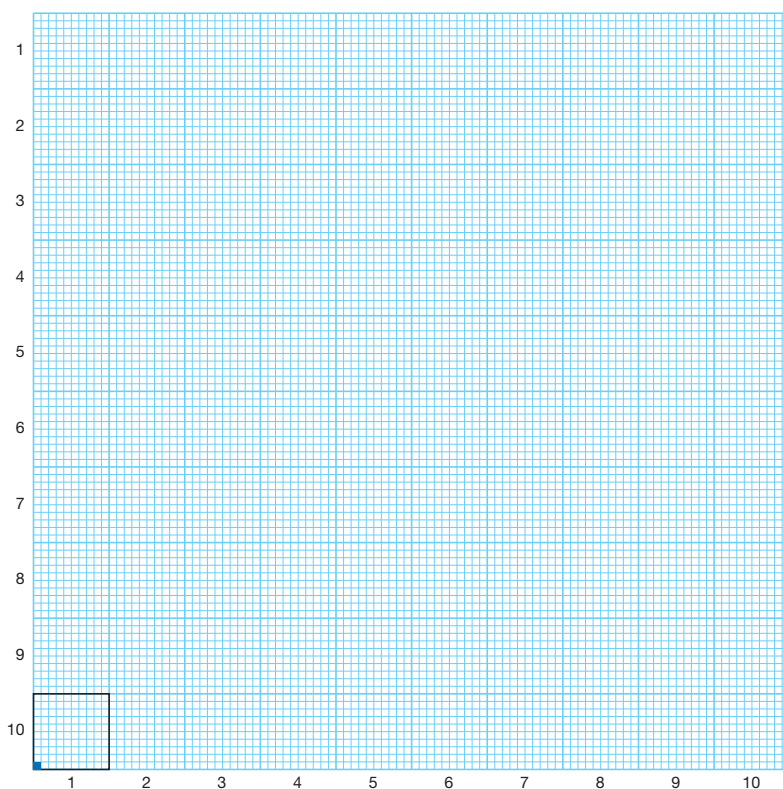
Définitions

- Dans le système métrique, le **mètre carré (m^2)** est l'unité principale de mesure des aires. C'est l'aire d'un carré dont le côté mesure 1 m.
- On utilise aussi des multiples du mètre carré : décamètre carré (dam^2), hectomètre carré (hm^2), kilomètre carré (km^2) ainsi que des sous-multiples : décimètre carré (dm^2), centimètre carré (cm^2), millimètre carré (mm^2).



Exemples

- Cette feuille de papier millimétré représente $1 dm^2$.
On remarque que : $1 dm^2 = 100 cm^2 = 10\,000 mm^2$.



- $1 hm^2 = 1 ha = 10\,000 m^2$; $1 cm^2 = 100 mm^2$; $0,01 m^2 = 1 dm^2$

* Les **ares (a)** et les **hectares (ha)** sont utilisés pour mesurer, par exemple, l'aire d'un terrain, d'une forêt, d'un champ, d'un vignoble, etc.

Convertir les unités d'aire

Méthode 1

En utilisant les relations entre les différentes unités.

Exemple Exprimer 457 cm^2 en m^2 .

ÉTAPE

Il y a deux unités pour passer des centimètres carrés aux mètres carrés (dm^2 , m^2) et deux rangs par unité. On déplace donc la virgule de quatre rangs vers la gauche.

Ou

$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$; on divise donc 457 par 10 000.

$$457 \text{ cm}^2 = 0,0457,0 \text{ cm}^2 = 0,0457 \text{ m}^2$$

Méthode 2

En utilisant un tableau de conversion.

Exemples Exprimer $5,28 \text{ hm}^2$ et 457 cm^2 en m^2 .

ÉTAPE

Pour écrire le nombre dans le tableau, on repère la case dans laquelle on doit placer son **chiffre des unités** (colonne de droite).

On place ensuite la virgule dans la case correspondant à l'unité (colonne de droite) demandée et on complète éventuellement les cases vides par des 0.

$5,28 \text{ hm}^2$ en m^2 :

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
	5	2	8	0	0	

$$5,28 \text{ hm}^2 = 52\,800 \text{ m}^2$$

457 cm^2 en m^2 :

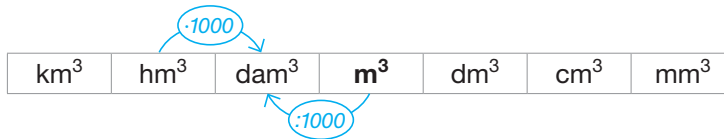
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
			0	0	4	5

$$457 \text{ cm}^2 = 0,0457 \text{ m}^2$$

Unités de volume et de capacité

Définitions

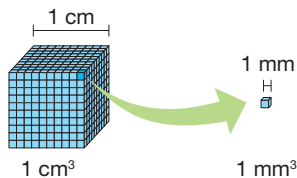
- Dans le système métrique, le **mètre cube (m^3)** est l'unité principale de mesure des volumes. C'est le volume d'un cube dont l'arête mesure 1 m.
- On utilise aussi des multiples du mètre cube : décamètre cube (dam^3), hectomètre cube (hm^3), kilomètre cube (km^3) ainsi que des sous-multiples : décimètre cube (dm^3), centimètre cube (cm^3), millimètre cube (mm^3).



Exemple

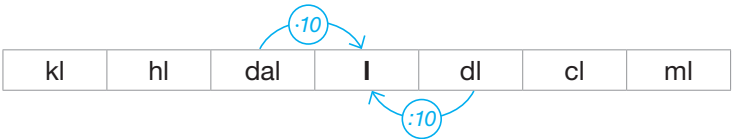
Ce cube représente 1 cm^3 .

On remarque que $1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$



Définitions

- Le **litre (l)** est l'unité principale de mesure des capacités. Un litre remplit exactement un cube de 1 dm d'arête soit 1 dm^3 donc $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$.
- On utilise aussi des multiples du litre : décalitre (dal), hectolitre (hl), kilolitre (kl) ainsi que des sous-multiples : décilitre (dl), centilitre (cl), millilitre (ml).



Exemples

$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$; $100 \text{ cl} = 1 \text{ l}$; $0,1 \text{ l} = 1 \text{ dl}$

Remarque

On mesure aussi le volume d'un liquide, d'un gaz, de la cylindrée d'un moteur, etc. à l'aide des unités de capacité.

Pour passer des unités de capacité aux unités de volume et vice-versa, on utilise l'égalité $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$.

Exemples

$3 \text{ m}^3 = 3000 \text{ dm}^3 = 3000 \text{ l}$; $1876,5 \text{ cl} = 18,765 \text{ l} = 18,765 \text{ dm}^3$

ÉTYM **Capacité** : du latin *capax*, qui peut contenir, avoir une contenance.

→ Puissance de dix (p. 33)

Convertir les unités de volume

Méthode 1

En utilisant les relations entre les différentes unités.

Exemple Exprimer $0,1234 \text{ m}^3$ en dm^3 .

ÉTAPE

Il y a une unité pour passer du mètre cube aux décimètres cubes et trois rangs par unité. On déplace donc la virgule de trois rangs vers la droite.

Ou

$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$; on multiplie donc $0,1234$ par 1000 .

$0,1234 \text{ m}^3 = 123,4 \text{ dm}^3$

Méthode 2

En utilisant un tableau de conversion.

Exemples Exprimer $0,1234 \text{ m}^3$ en dm^3 et 76 mm^3 en cm^3 .

ÉTAPE

Pour écrire le nombre dans le tableau, on repère la case dans laquelle on doit placer son **chiffre des unités** (colonne de droite).

On place ensuite la virgule dans la case correspondant à l'unité (colonne de droite) demandée et on complète éventuellement les cases vides par des **0**.

$0,1234 \text{ m}^3$ en dm^3 :

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
			0	1	2	3

$0,1234 \text{ m}^3 = 123,4 \text{ dm}^3$

76 mm^3 en cm^3 :

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
					0	7

$76 \text{ mm}^3 = 0,076 \text{ cm}^3$

Convertir les unités de volume en unités de capacité et inversement

Méthode

Exemple 1 Exprimer 98 cm^3 en cl.

ÉTAPE 1	
Exprimer le volume en décimètres cubes.	$98 \text{ cm}^3 = 0,098 \text{ dm}^3$
ÉTAPE 2	
Appliquer l'égalité: $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$.	$0,098 \text{ dm}^3 = 0,098 \text{ l}$
ÉTAPE 3	
Exprimer la capacité à l'aide de l'unité demandée.	$0,098 \text{ l} = 9,8 \text{ cl}$ $98 \text{ cm}^3 = 9,8 \text{ cl}$

Méthode

Exemple 2 Exprimer $1876,5 \text{ hl}$ en m^3 .

ÉTAPE 1	
Exprimer la capacité en litres.	$1876,5 \text{ hl} = 187650 \text{ l}$
ÉTAPE 2	
Appliquer l'égalité: $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$.	$187650 \text{ l} = 187650 \text{ dm}^3$
ÉTAPE 3	
Exprimer le volume à l'aide de l'unité demandée.	$187650 \text{ dm}^3 = 187,65 \text{ m}^3$ $1876,5 \text{ hl} = 187,65 \text{ m}^3$

Unités de masse

Définitions

- Le **gramme (g)** est l'unité principale de mesure des masses.
- On utilise aussi des multiples du gramme: décagramme (dag), hectogramme (hg), kilogramme (kg) ainsi des sous-multiples: décigramme (dg), centigramme (cg), milligramme (mg).
- On utilise aussi le quintal (q) et la tonne (t).
 $1 \text{ q} = 100 \text{ kg}$; $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$.



Exemples

$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$; $1000 \text{ mg} = 1 \text{ g}$; $0,01 \text{ g} = 1 \text{ cg}$

Unités de temps

Définitions

- La **seconde (s)** est l'unité principale de la mesure du temps.
- Les principaux sous-multiples sont : le dixième de seconde, le centième de seconde, le millième de seconde.
- On utilise aussi les unités suivantes : la minute (min), l'heure (h), le jour, le mois, l'année, le siècle, le millénaire.

1 minute = 60 secondes ; 1 heure = 60 minutes ; 1 jour = 24 heures ;
1 année = 12 mois = 365 jours ou 366 jours (année bissextile).

Remarques

- Les heures, minutes et secondes sont des unités qui correspondent au système sexagésimal (système de numération en base soixante):
1 heure = 60 minutes = 3600 secondes.
- Les dixièmes de seconde, centièmes de seconde et millièmes de seconde sont des sous-multiples qui correspondent au système décimal (système de numération en base dix):
1 seconde = 10 dixièmes de seconde = 100 centièmes de seconde = 1000 millièmes de seconde.
- Dans les calculs commerciaux, en Suisse : 1 année = 12 mois = 360 jours ;
1 mois = 30 jours.

Convertir les unités de temps

Méthode

Convertir un nombre décimal d'heures en heures, minutes et secondes.

Exemple Convertir 5,84 h en h min s.

ÉTAPE 1 Décomposer le nombre d'heures en la somme de sa partie entière et de sa partie décimale.	$5,84\text{ h} = 5\text{ h} + 0,84\text{ h}$
ÉTAPE 2 Exprimer en minutes la partie décimale en la multipliant par 60.	$0,84\text{ h} = 0,84 \cdot 60\text{ min} = 50,4\text{ min}$
ÉTAPE 3 Décomposer le nombre de minutes en la somme de sa partie entière et de sa partie décimale.	$50,4\text{ min} = 50\text{ min} + 0,4\text{ min}$
ÉTAPE 4 Exprimer en secondes la partie décimale en la multipliant par 60.	$0,4\text{ min} = 0,4 \cdot 60\text{ s} = 24\text{ s}$
ÉTAPE 5 Conclure.	$5,84\text{ h} = 5\text{ h } 50\text{ min } 24\text{ s}$

Méthode 1

Convertir un nombre en secondes en heures, minutes et secondes.

Exemple Convertir 6023 s en h min s.

ÉTAPE 1	Convertir les secondes en minutes à l'aide d'une division euclidienne par 60.	$6023 : 60 = 100 \text{ r } 23$ donc $6023 \text{ s} = 100 \text{ min } 23 \text{ s}$
ÉTAPE 2	Convertir 100 minutes en heures à l'aide d'une division euclidienne par 60.	$100 : 60 = 1 \text{ r } 40$ donc $100 \text{ min} = 1 \text{ h } 40 \text{ min}$
ÉTAPE 3	Compléter l'égalité à l'aide des résultats trouvés.	$6023 \text{ s} = 1 \text{ h } 40 \text{ min } 23 \text{ s}$

Méthode 2

Convertir un nombre en secondes en heures, minutes et secondes.

Exemple Convertir 24327 s en h min s.

ÉTAPE 1	Exprimer la durée en heures en le divisant par 3600.	$24327 : 3600 = 6,7575$ donc $24327 \text{ s} = 6,7575 \text{ h}$
ÉTAPE 2	Exprimer 0,7575 h en minutes et secondes selon l'exemple précédent.	$0,7575 \text{ h} = 45 \text{ min } 27 \text{ s}$
ÉTAPE 3	Noter l'égalité obtenue.	$24327 \text{ s} = 6 \text{ h } 45 \text{ min } 27 \text{ s}$

Méthode 1

Convertir des heures, minutes et secondes en heures décimales en utilisant des fractions.

Exemple Exprimer 4 h 12 min en heure décimale.

ÉTAPE 1	Exprimer les minutes en fraction d'heure.	$12 \text{ min} = \frac{12}{60} \text{ h}$
ÉTAPE 2	Passer de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale.	$\frac{12}{60} \text{ h} = 0,2 \text{ h}$
ÉTAPE 3	Additionner les heures.	$4 \text{ h} + 0,2 \text{ h} = 4,2 \text{ h}$
ÉTAPE 4	Noter l'égalité obtenue.	$4 \text{ h } 12 \text{ min} = 4,2 \text{ h}$

Méthode 2

Convertir des heures, minutes et secondes en heures décimales en utilisant un tableau de proportionnalité.

Exemple Exprimer 4 h 12 min en heure décimale.

ÉTAPE 1	Poser un tableau de proportionnalité.	<table><tr><td>Minutes</td><td>60</td><td>12</td></tr><tr><td>Heures</td><td>1</td><td>x</td></tr></table>	Minutes	60	12	Heures	1	x
Minutes	60	12						
Heures	1	x						
ÉTAPE 2	Calculer la valeur manquante.	$x = 0,2$						
ÉTAPE 3	Additionner les heures.	$4 \text{ h} + 0,2 \text{ h} = 4,2 \text{ h}$						
ÉTAPE 4	Noter l'égalité obtenue.	$4 \text{ h } 12 \text{ min} = 4,2 \text{ h}$						

Périmètre d'une surface

Généralités

Définition

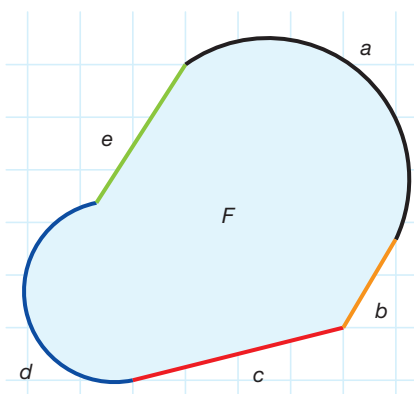
Le périmètre d'une figure géométrique fermée est la longueur de la ligne qui entoure cette figure.

Exemple

Le périmètre p de la figure F est égal à la longueur de la ligne qui entoure la surface bleue.

Il peut s'obtenir en additionnant les longueurs des différentes parties qui le constituent.

$$p = a + b + c + d + e$$



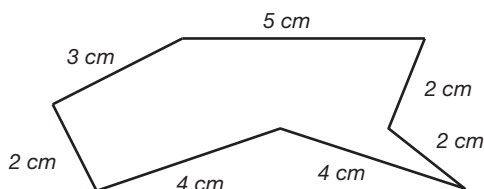
Conséquence Le périmètre d'un polygone est la somme des longueurs des côtés du polygone.

Exemple

Le périmètre du polygone ci-dessous est, en centimètres :

$$5 + 2 + 2 + 4 + 4 + 2 + 3 = 22$$

$$p = 22 \text{ cm}$$

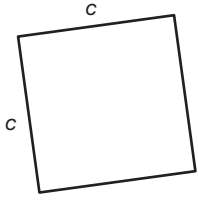
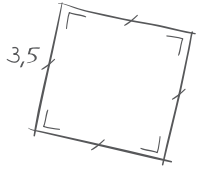
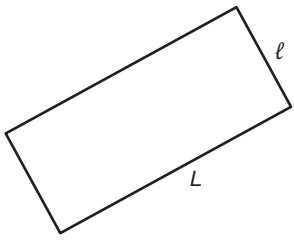
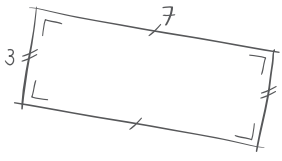
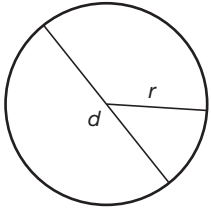
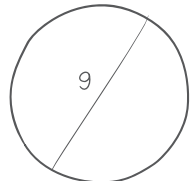
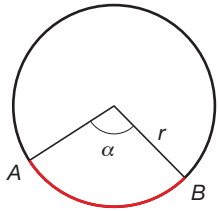
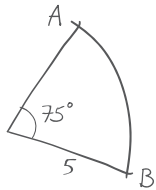


Remarque Ces longueurs doivent être exprimées dans la même unité.

ETYM **Périmètre** : du grec *perimetros* : *peri*, autour et *metros*, mesure.

➡ Polygone (p. 110)

Périmètre des surfaces usuelles

Figure	Formule de périmètre ¹	Exemple
■ Carré  c : mesure du côté	$p = c + c + c + c$ $p = 4c$ Remarque Cette formule est aussi valable pour calculer le périmètre du losange.	 $p = 4 \cdot 3,5 = 14$
Rectangle  L : mesure de la longueur l : mesure de la largeur	$p = L + l + L + l$ $p = 2(L + l)$	 $p = 2 \cdot (7 + 3) = 20$
■ Cercle  d : diamètre du cercle r : rayon du cercle	$p = \pi \cdot d$ ou $p = 2 \cdot \pi \cdot r$ $\pi = 3,141592... \approx 3,14$ Remarque On parle aussi de la longueur ou de la circonférence d'un cercle.	 $p = 9 \cdot \pi \approx 28,27$
■ Arc de cercle  $\widehat{AB}$: arc de cercle r : rayon du cercle α : angle au centre mesuré en degrés	$\widehat{AB} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360}$	 $\widehat{AB} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot \frac{75}{360} \approx 6,54$

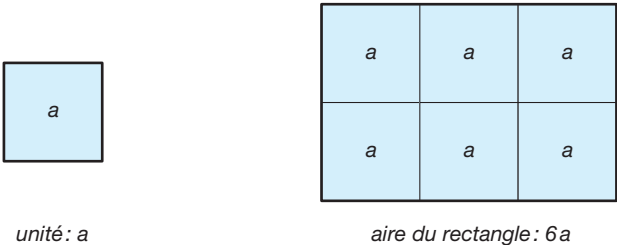
¹ Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Aire d'une surface

Généralités

Définition Pour mesurer une aire, on utilise une surface unité. La mesure de l'aire d'une surface est le nombre de surfaces unité nécessaire pour la recouvrir.

Exemple
Si le carré a représente l'unité de mesure, l'aire de la surface rectangulaire vaut $6a$.

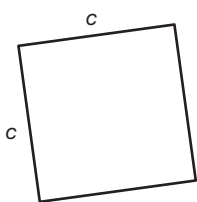
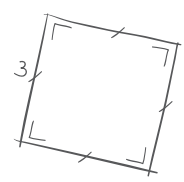
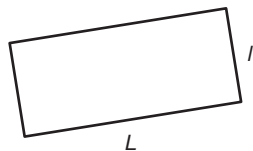
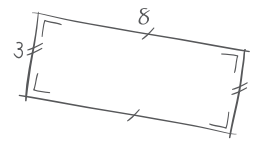
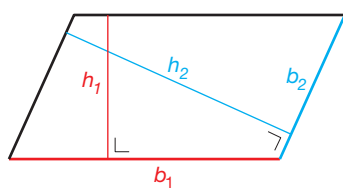
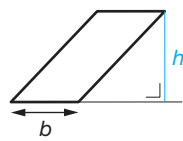
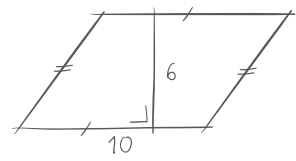
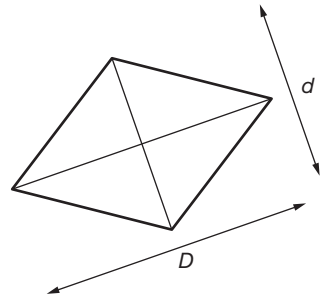
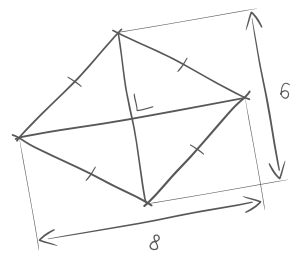


Remarque L'unité d'aire principale du système métrique est le mètre carré, noté m^2 . C'est l'aire d'un carré d'un mètre de côté.

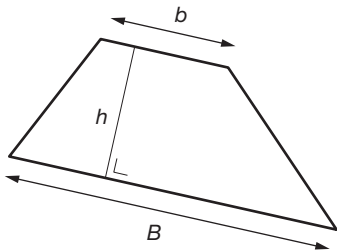
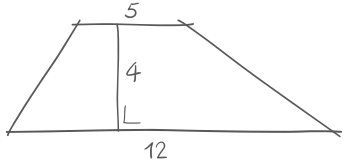
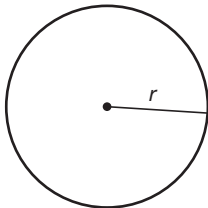
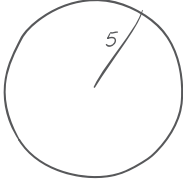
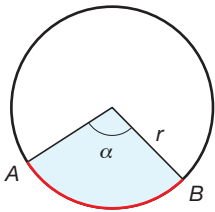
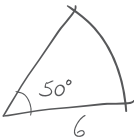
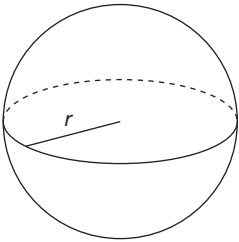
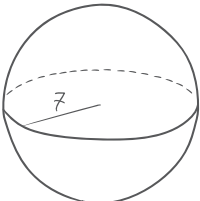
Aire des surfaces usuelles

Surface	Formule d'aire ¹	Exemple
■ Triangle b_1, b_2, b_3: mesure des bases h_1, h_2, h_3: mesure des hauteurs correspondantes	$A = \frac{b \cdot h}{2}$ b: mesure d'un côté h: mesure de la hauteur correspondante Remarques - On peut calculer l'aire d'un triangle de trois manières différentes: $A = \frac{b_1 \cdot h_1}{2} = \frac{b_2 \cdot h_2}{2} = \frac{b_3 \cdot h_3}{2}$ - La hauteur peut être à l'extérieur du triangle. - Dans un triangle rectangle, deux des bases et des hauteurs sont confondues avec les côtés de l'angle droit.	$A = \frac{12 \cdot 7}{2} = 42$ $A = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7,5$

¹ Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Surface	Formule d'aire ¹	Exemple
■ Carré  c: mesure du côté	$A = c \cdot c$ $A = c^2$ Remarque Comme le carré est un losange, on peut aussi calculer son aire à l'aide de la formule du losange.	 $A = 3^2 = 9$
■ Rectangle  L: mesure de la longueur ℓ: mesure de la largeur	$A = L \cdot \ell$	 $A = 8 \cdot 3 = 24$
■ Parallélogramme  b_1, b_2: mesure des bases h_1, h_2: mesure des hauteurs correspondantes	$A = b \cdot h$ b: mesure d'un côté h: mesure de la hauteur correspondante Remarque On peut calculer l'aire d'un parallélogramme de deux manières : $A = b_1 \cdot h_1 = b_2 \cdot h_2$ ⚠ La hauteur peut être à l'extérieur du parallélogramme. 	 $A = 10 \cdot 6 = 60$
■ Losange  D: mesure de la grande diagonale d: mesure de la petite diagonale	$A = \frac{D \cdot d}{2}$ Remarque Comme le losange est un parallélogramme, on peut aussi calculer son aire à l'aide de la formule du parallélogramme.	 $A = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$

¹ Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Surface	Formule d'aire ¹	Exemple
■ Trapèze  $A = \frac{B + b}{2} \cdot h$ <i>B</i>: mesure de la grande base <i>b</i>: mesure de la petite base <i>h</i>: mesure de la hauteur		 $A = \frac{12 + 5}{2} \cdot 4 = 8,5 \cdot 4 = 34$
■ Disque  <i>r</i>: rayon du disque $\pi = 3,14159\dots$	$A = \pi \cdot r^2$	 $A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \approx 78,54$
■ Secteur circulaire  <i>r</i>: rayon du disque <i>α</i>: angle du secteur $\pi = 3,14159\dots$	$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360}$	 $A = \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{50}{360} = 5\pi \approx 15,71$
■ Sphère  <i>r</i>: rayon de la sphère	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	 $A = 4 \cdot \pi \cdot 7^2 = 196\pi \approx 615,75$

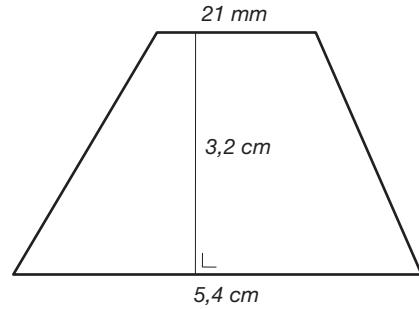
¹ Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Calculer l'aire d'une figure

Méthode 1

A l'aide d'une formule lorsqu'il s'agit d'une figure usuelle.

Exemple Calculer l'aire de ce trapèze.



ÉTAPE

$$A_{\text{trapèze}} = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

$$\begin{aligned} B &= 5,4 \text{ cm} \\ b &= 21 \text{ mm} = 2,1 \text{ cm} \\ h &= 3,2 \text{ cm} \end{aligned}$$

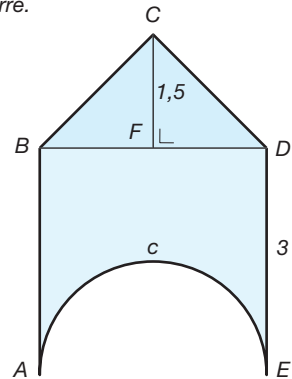
$$A_{\text{trapèze}} \text{ en cm}^2 = \frac{5,4 + 2,1}{2} \cdot 3,2 = 12$$

Méthode 2

Par décomposition puis addition et/ou soustraction d'aires de figures usuelles.

Exemple Calculer l'aire de la figure bleue ci-dessous.

Unité: mètre
c est un demi-cercle.
ABDE est un carré.



ÉTAPE

On décompose la figure bleue en sous-figures dont on peut calculer l'aire, puis on additionne et/ou soustrait l'aire de ces sous-figures.

$$A_{\text{bleue}} = A_{\text{carré}} - A_{\text{demi-disque}} + A_{\text{triangle}}$$

$$\text{Côté du carré: } AB = 3 \text{ m}$$

$$\text{Rayon du demi-disque: } \frac{AB}{2} = 1,5 \text{ m}$$

$$\text{Base du triangle: } BD = 3 \text{ m}$$

$$\text{Hauteur du triangle: } CF = 1,5 \text{ m}$$

$$A_{\text{carré}} \text{ en m}^2 = 3^2$$

$$A_{\text{demi-disque}} \text{ en m}^2 = \frac{\pi \cdot 1,5^2}{2}$$

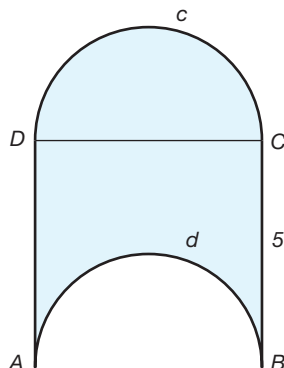
$$A_{\text{triangle}} \text{ en m}^2 = \frac{3 \cdot 1,5^2}{2}$$

$$A_{\text{bleue}} \text{ en m}^2 = 3^2 - \frac{\pi \cdot 1,5^2}{2} + \frac{3 \cdot 1,5^2}{2} \approx 39,76 \text{ m}^2$$

Méthode 3

Par décomposition et déplacement.

Exemple Calculer l'aire de la figure bleue ci-dessous.
 ABCD est un carré de 5 dm de côté.
 c et d sont des demi-disques.



ÉTAPE

On déplace une partie de la figure de façon à obtenir une figure dont on peut calculer l'aire.

Les demi-disques c et d ont le même diamètre donc la même aire.
 Je peux déplacer mentalement le demi-disque c pour le mettre dans le « trou » que représente le demi-disque d.
 L'aire de la figure est donc égale à celle du carré ABCD.

Côté du carré: $AB = 5 \text{ dm}$

$$A_{\text{bleue}} \text{ en } \text{dm}^2 = 5^2 = 25$$

Volume d'un solide

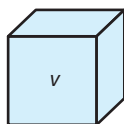
Généralités

Définition

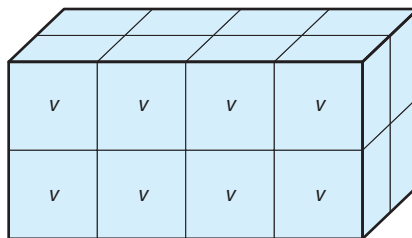
Pour mesurer le volume d'un solide, on utilise un solide unité.
 La mesure du volume de ce solide est le nombre de solides unités nécessaires pour le remplir.

Exemple

Si le cube v représente l'unité de mesure, le volume du parallélépipède rectangle vaut $16v$.



unité: v

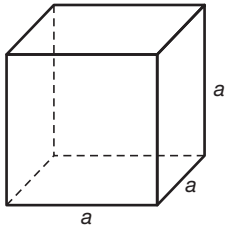
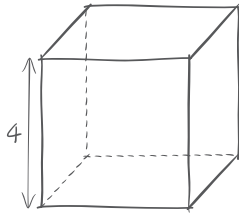
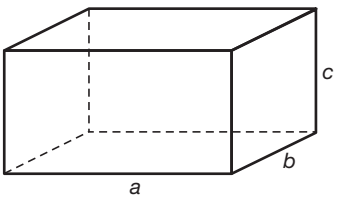
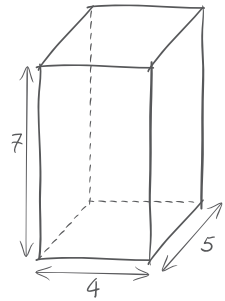
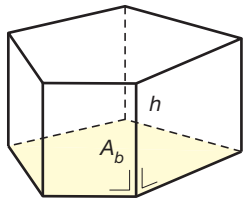
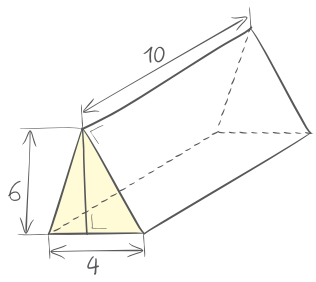
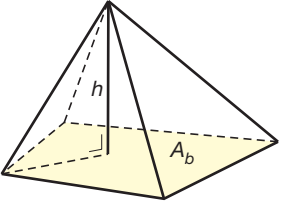
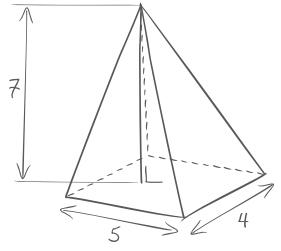


volume du parallélépipède rectangle: $16v$

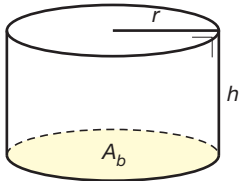
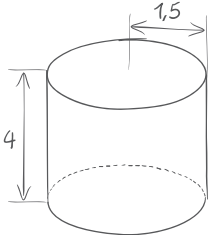
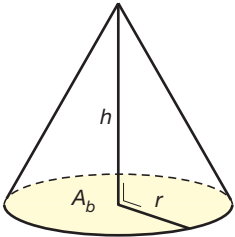
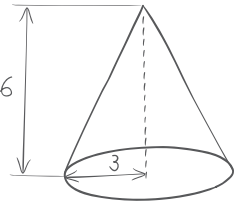
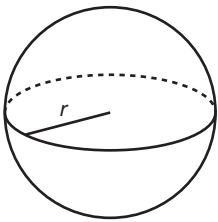
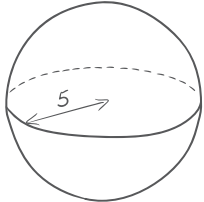
Remarque

L'unité principale de volume du système métrique est le mètre cube, noté m^3 .
 C'est le volume d'un cube de 1 m d'arête.

Volume des solides usuels

Solide	Formule de volume ¹	Exemple
■ Cube  a : mesure de l'arête	$V = a \cdot a \cdot a$ $V = a^3$	 Cube $V = 4^3 = 64$
■ Parallélépipède rectangle ou pavé droit  a, b et c : mesure des différentes arêtes	$V = a \cdot b \cdot c$	 Pavé droit $V = 4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$
■ Prisme droit  A_b : aire de la base h : mesure de la hauteur	$V = A_b \cdot h$ Remarque Cette formule est valable pour le cube et le pavé droit qui sont eux aussi des prismes droits.	 Prisme droit $V = \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot 10 = 120$
■ Pyramide  A_b : aire de la base h : mesure de la hauteur	$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$	 Pyramide à base rectangulaire $V = \frac{(5 \cdot 4) \cdot 7}{3} = 46,\bar{6}$

¹ Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Solide	Formule de volume ¹	Exemple
■ Cylindre  r: rayon de la base A_b: aire de la base h: mesure de la hauteur	$V = A_b \cdot h$ $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$	 Cylindre $V = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 4 \approx 28,27$
■ Cône  r: rayon de la base A_b: aire de la base h: mesure de la hauteur	$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$	 Cône $V = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 6}{3} \approx 56,55$
■ Boule  r: rayon de la boule	$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$	 Boule $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3} \approx 523,6$

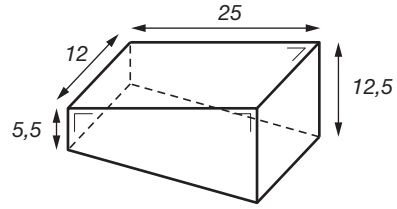
¹ Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Calculer le volume d'un solide

Méthode 1

A l'aide d'une formule lorsqu'il s'agit d'un solide usuel.

Exemple Calculer le volume de ce prisme droit. unité: dm



ÉTAPE

On reconnaît le solide usuel et on applique la formule qui permet de calculer son volume.

Il s'agit d'un prisme droit dont la base est un trapèze rectangle.

$$V = A_b \cdot h$$

h = hauteur du prisme

$$A_b = \frac{B+b}{2} \cdot h_t$$

h_t = hauteur du trapèze

$$B = 12,5 \text{ dm}$$

$$b = 5,5 \text{ dm}$$

$$h_t = 12 \text{ dm}$$

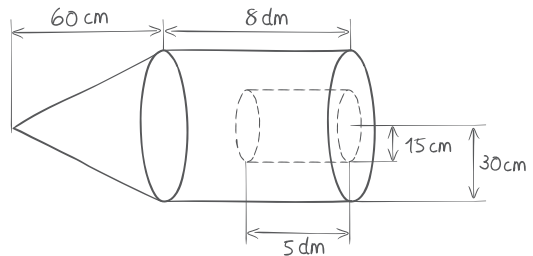
$$h = 12,5 \text{ dm}$$

$$V_{\text{prisme droit}} \text{ en dm}^3 = \frac{12,5 + 5,5}{2} \cdot 12 \cdot 25 = 2700$$

Méthode 2

Par décomposition puis addition et/ou soustraction.

Exemple Calculer le volume de ce solide.



ÉTAPE

On décompose le solide en sous-solides dont on peut calculer le volume, puis on additionne et/ou soustrait le volume de ces figures.

$$V_{\text{solide}} = V_{\text{grand cylindre}} - V_{\text{petit cylindre}} + V_{\text{cône}}$$

$$r_{\text{grand cylindre}} = 30 \text{ cm} = 3 \text{ dm}$$

$$r_{\text{petit cylindre}} = 15 \text{ cm} = 1,5 \text{ dm}$$

$$h_{\text{grand cylindre}} = 8 \text{ dm}$$

$$h_{\text{petit cylindre}} = 5 \text{ dm}$$

$$h_{\text{cône}} = 60 \text{ cm} = 6 \text{ dm}$$

$$V_{\text{grand cylindre}} \text{ en dm}^3 = \pi \cdot 3^2 \cdot 8$$

$$V_{\text{petit cylindre}} \text{ en dm}^3 = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 5$$

$$V_{\text{cône}} \text{ en dm}^3 = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 6}{3}$$

$$V_{\text{solide}} \text{ en dm}^3 = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 - \pi \cdot 1,5^2 \cdot 5 + \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 6}{3} \approx 247,4$$

Théorèmes

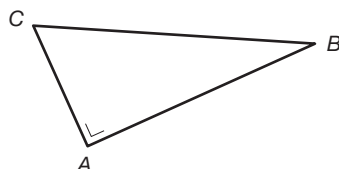
Triangle rectangle et vocabulaire

Définition

On dit qu'un triangle est rectangle en A si l'angle droit de ce triangle se trouve au sommet A .

Exemple

ABC est un triangle rectangle en A .



Notation

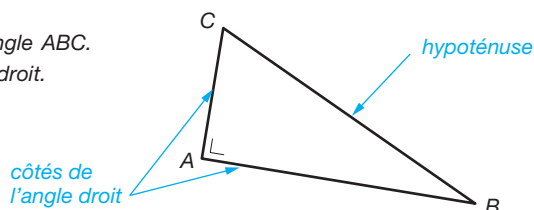
Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté opposé à l'angle droit. C'est le plus grand côté de ce triangle.

Les deux autres côtés sont appelés les **côtés de l'angle droit** (ou **cathètes**).

Exemple

Le côté BC est l'hypoténuse du triangle rectangle ABC .

Les côtés AC et AB sont les côtés de l'angle droit.



Théorème de Pythagore

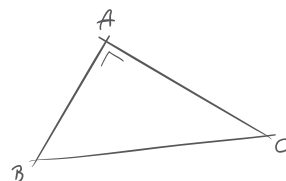
Théorème

Si un triangle est rectangle, alors la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

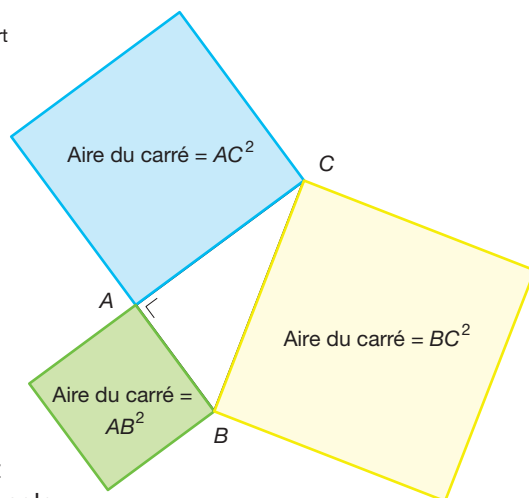
Exemple

Le triangle ABC est rectangle en A , donc :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$



Conséquence Aire_{carré jaune} = Aire_{carré bleu} + Aire_{carré vert}



⚠ Le théorème de Pythagore ne peut s'utiliser que dans un triangle rectangle.

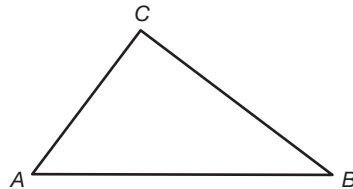
La réciproque du théorème de Pythagore

Théorème

Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Exemple

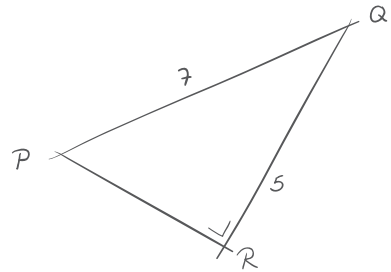
Si $AC^2 + BC^2 = AB^2$, alors le triangle ABC est rectangle en C .



Calculer la longueur d'un segment en utilisant le théorème de Pythagore

Méthode

Exemple Calculer la longueur exacte de PR .
Les mesures sont exprimées dans la même unité.



ÉTAPE 1

S'assurer qu'on a bien les conditions d'utilisation du théorème de Pythagore :

- Le triangle est rectangle.
- On connaît les longueurs de deux côtés de ce triangle.

Le triangle PQR est rectangle en R .
On connaît la longueur des côtés PQ et QR .

ÉTAPE 2

Ecrire la relation de Pythagore.

D'après le théorème de Pythagore, on a :
 $PR^2 + QR^2 = PQ^2$

ÉTAPE 3

Remplacer les longueurs connues par leurs valeurs et calculer la longueur cherchée.

$$\begin{aligned} PR^2 + 5^2 &= 7^2 \\ PR^2 + 25 &= 49 \\ PR^2 &= 49 - 25 \\ PR^2 &= 24, \text{ donc } PR = \sqrt{24} \approx 4,9 \end{aligned}$$

Remarque

On peut vérifier le résultat en s'assurant que l'hypoténuse est bien le plus grand côté du triangle rectangle. Dans le cas ci-dessus, 7 est effectivement plus grand que 5 et 4,9.

Prouver qu'un triangle est rectangle en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore

Méthode

Exemple Soit EFG un triangle tel que $EF = 12\text{ cm}$, $EG = 13\text{ cm}$ et $FG = 5\text{ cm}$. Ce triangle est-il rectangle ?

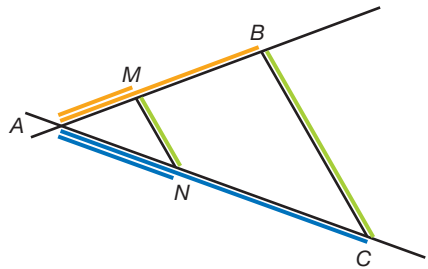
ÉTAPE 1 Identifier le plus grand côté.	EG est le plus grand côté.
ÉTAPE 2 Calculer le carré du plus grand côté. Calculer la somme des carrés des deux autres côtés.	$EG^2 = 13^2 = 169$ $EF^2 + FG^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$
ÉTAPE 3 Regarder si l'égalité est vérifiée. Si c'est le cas, le triangle est rectangle ; sinon, il ne l'est pas.	$EG^2 = EF^2 + FG^2$ Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en F .

Théorème de Thalès

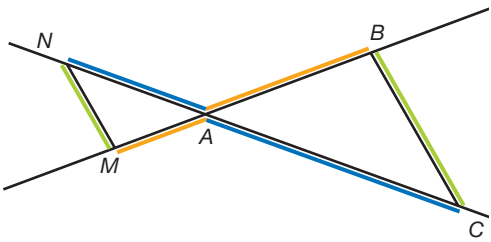
Théorème

Soit deux droites AB et AC sécantes et deux points M et N qui appartiennent respectivement à la droite AB et à la droite AC .
Si les droites MN et BC sont parallèles, alors les triangles ABC et AMN ont des côtés respectivement proportionnels. Ils sont semblables.

Il y a deux configurations correspondant à ce théorème.



$MN \parallel BC$



$MN \parallel BC$

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ donc les triangles ABC et AMN sont semblables.

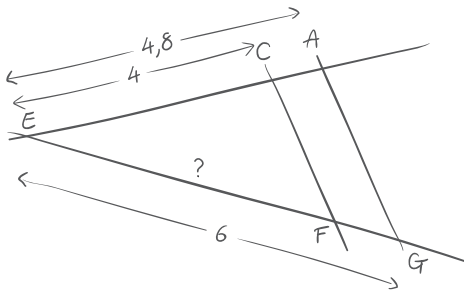
Remarque

Les triangles ABC et AMN sont images l'un de l'autre par une homothétie de centre A et de rapport $\frac{AM}{AB}$ ou $\frac{AN}{AC}$.

→ Homothétie (p. 138)

Calculer la longueur d'un segment en utilisant le théorème de Thalès

Méthode



Exemple 1 Calculer la longueur EF sachant que CF est parallèle à AG.

Les longueurs sont exprimées dans la même unité.

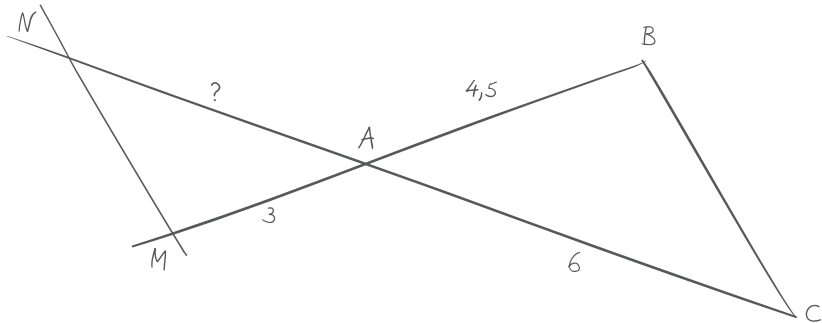
ÉTAPE 1 S'assurer qu'on a bien les conditions d'utilisation du théorème de Thalès.	Les droites CF et AG sont parallèles et elles coupent les sécantes EA et EG.
ÉTAPE 2 Ecrire les rapports égaux en utilisant le théorème de Thalès.	$\frac{EC}{EA} = \frac{EF}{EG}$
ÉTAPE 3 Remplacer les longueurs connues par leurs valeurs et calculer la longueur cherchée.	$\frac{4,8}{4,8 + 4} = \frac{EF}{EF + 6}$ $4,8 \cdot EF = 4 \cdot 6$ $4,8 \cdot EF = 24$ $\text{Donc } EF = \frac{24}{4,8} = 5.$

Méthode

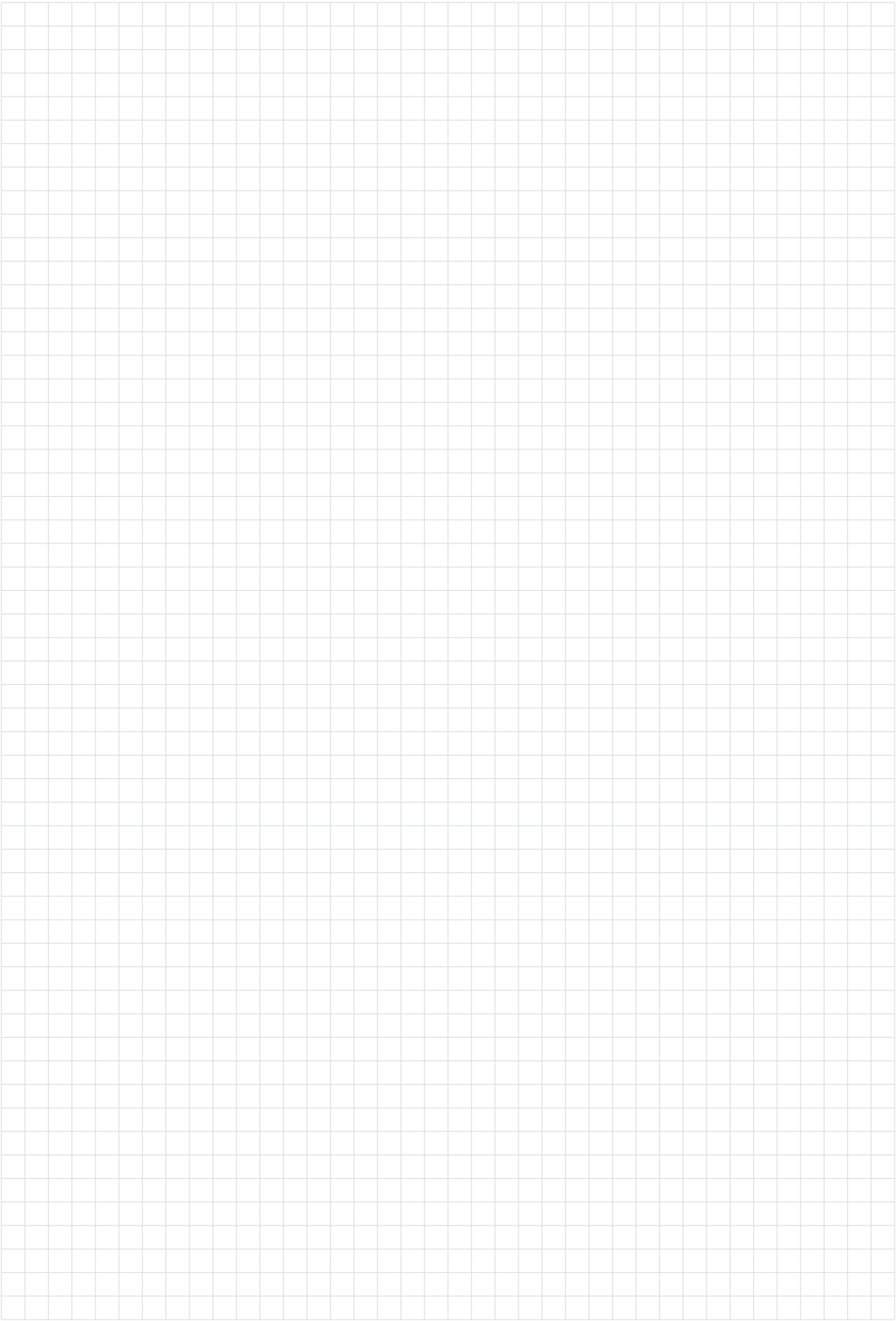
Exemple 2 Calculer la longueur AN.

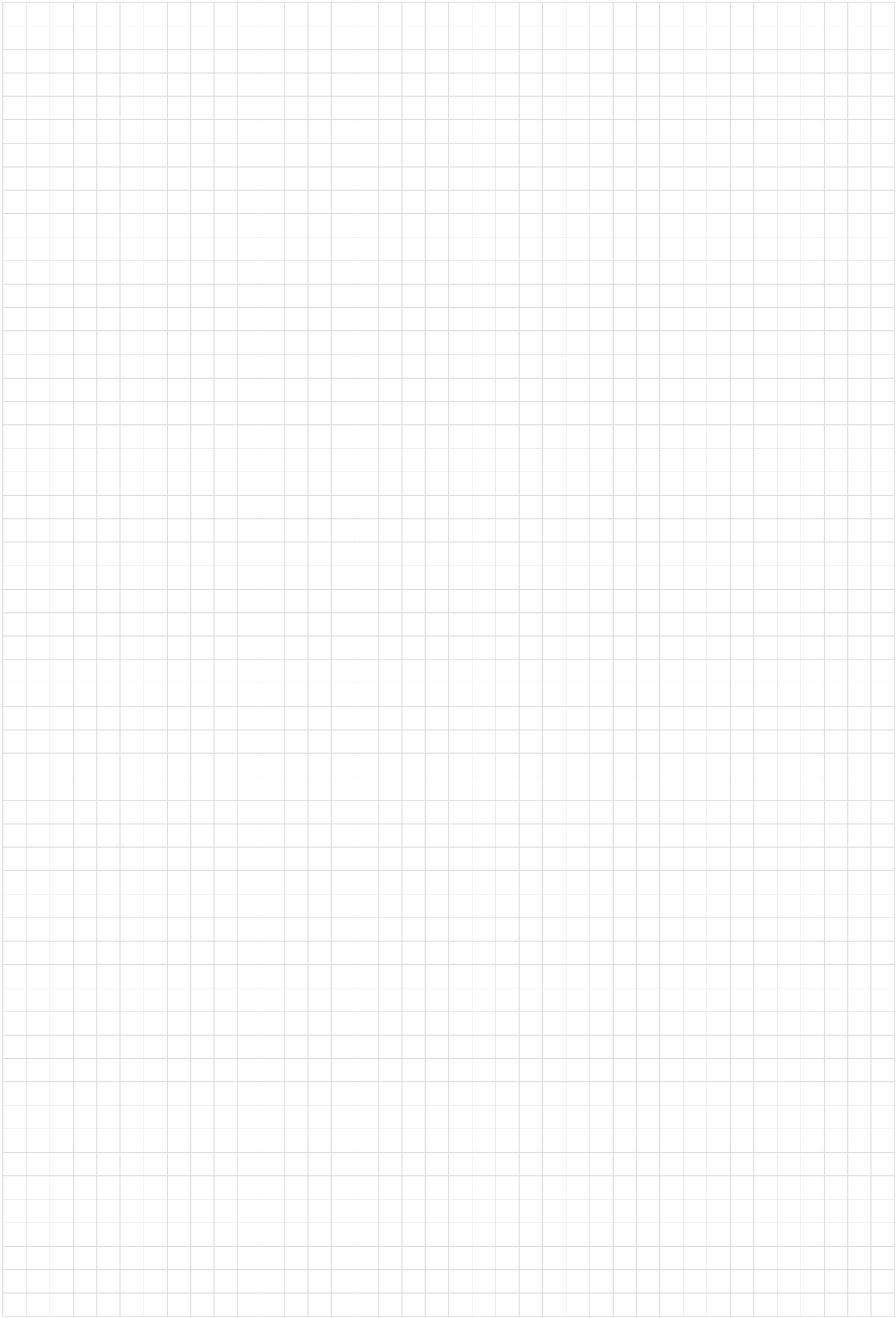
BC // MN

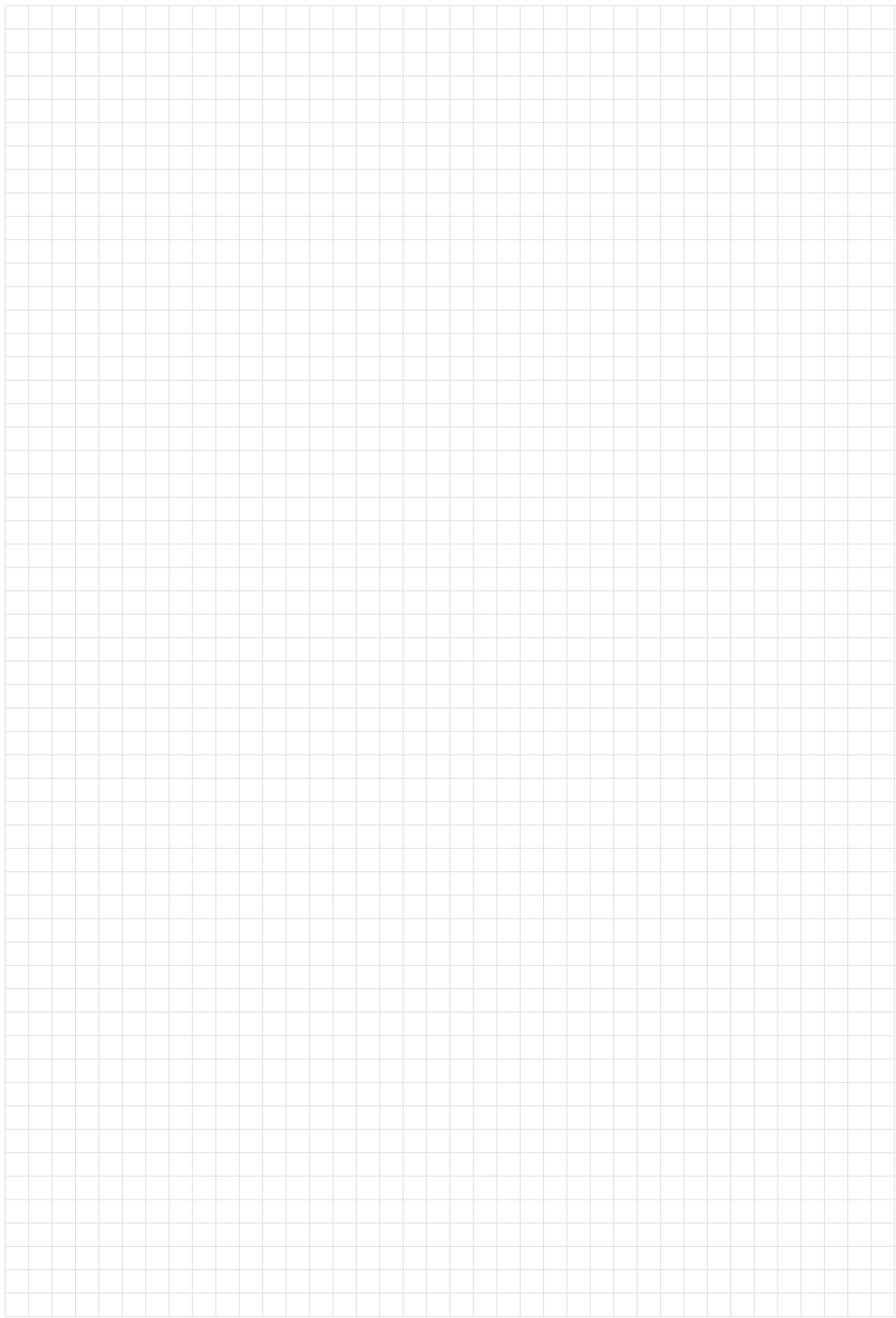
Les longueurs sont exprimées dans la même unité.

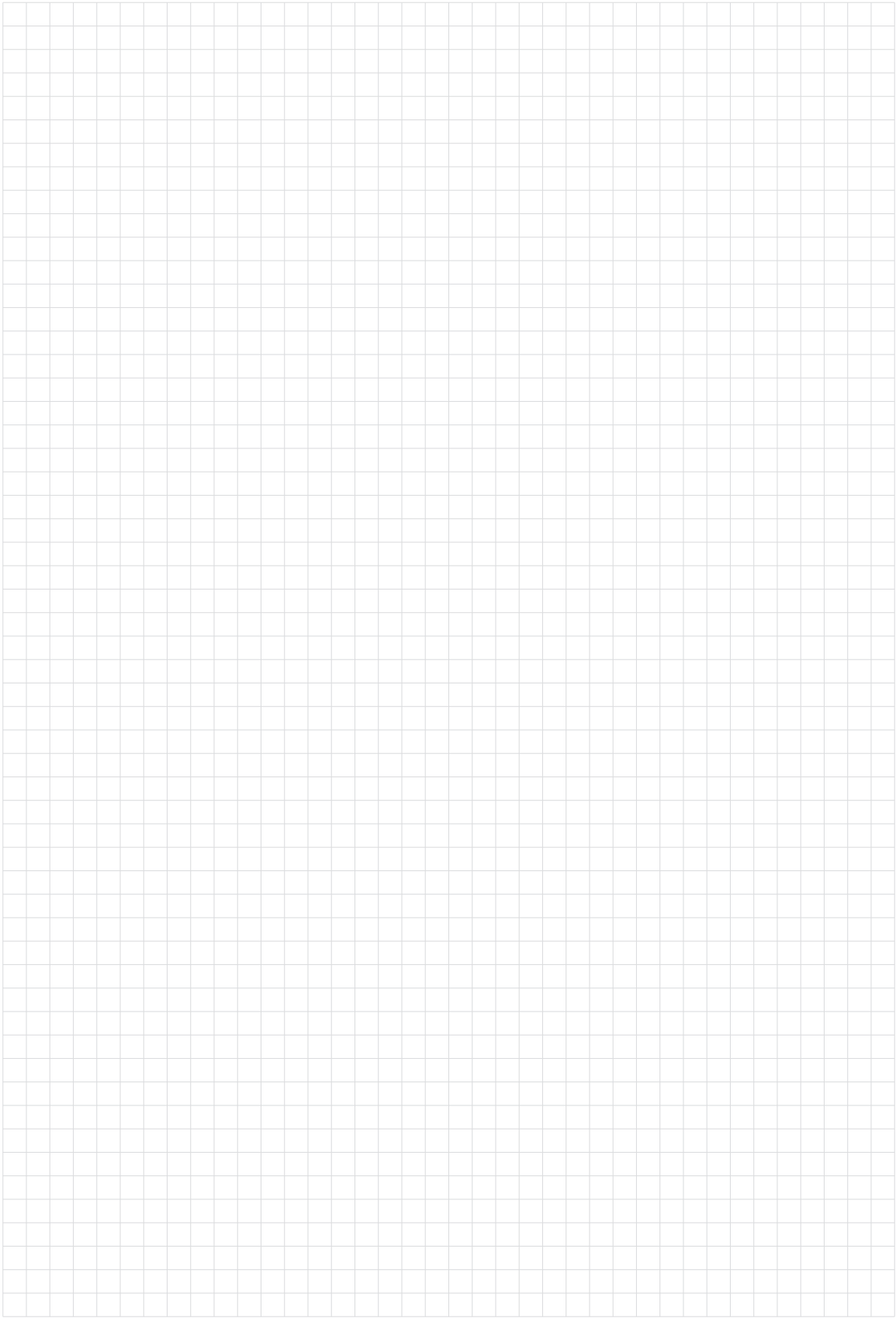


ÉTAPE 1 S'assurer qu'on a bien les conditions d'utilisation du théorème de Thalès.	Les droites BC et MN sont parallèles et elles coupent les sécantes AB et AC.
ÉTAPE 2 Ecrire les rapports égaux en utilisant le théorème de Thalès.	$\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB}$
ÉTAPE 3 Remplacer les longueurs connues par leurs valeurs et calculer la longueur cherchée.	$\frac{AN}{3} = \frac{6}{4,5 + 6}$ $4,5 \cdot AN = 3 \cdot 6$ $4,5 \cdot AN = 18$ $\text{Donc } AN = \frac{18}{4,5} = 4$









Recherche et stratégies

- Problèmes et résolutions
- Stratégies de recherche
- Vérification
- Preuve

Problèmes et résolutions

● Problème

Définition

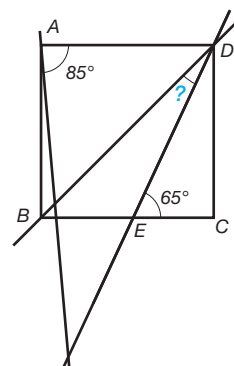
Toute activité pour laquelle il n'y a pas de procédure immédiate de résolution est un problème.

Exemples

- Quel est le chiffre des unités de 7^{201} ?
- Dans le carré $ABCD$, on voudrait connaître l'angle marqué d'un point d'interrogation.

ÉTYM **Problème** : du grec *problēma*, ce qu'on a devant soi, obstacle, tâche, sujet de controverse, problème.

→ Étapes de résolution d'un problème (p. 182)



● Étapes de résolution d'un problème

Étape 1

S'approprier l'énoncé

- Lire attentivement et complètement l'énoncé du problème afin de se mettre en situation, de donner du sens au texte et de s'en construire une représentation.
- Trier les informations (ce qu'on connaît, ce qu'on doit chercher, etc.).
- Représenter les informations, si cela est utile, sous forme de croquis, tableau, schéma, etc., pour visualiser la situation.
- Décrire clairement le but à atteindre.

Étape 2

Elaborer une solution

- Choisir une ou des stratégies de recherche afin d'élaborer les étapes de résolution.
- Exécuter ces étapes en contrôlant régulièrement la pertinence des résultats intermédiaires.
- Vérifier le résultat final et, lorsque c'est demandé, le prouver.

Etape 3

Communiquer les étapes de la résolution et le résultat

Mettre en forme les résultats pour que quiconque puisse comprendre le travail effectué. A cette fin, utiliser les termes propres au langage mathématique ainsi qu'une représentation et une notation adaptées et correctes.

Remarque Dans le cadre d'une **narration de recherche**, on rédige un compte-rendu complet de la recherche, dans lequel on décrit :

- le but à atteindre ;
- les conjectures émises ;
- les pistes explorées et ce qui a conduit à les garder ou à les rejeter ;
- la ou les solution(s) trouvée(s) ;
- les propriétés utilisées ;
- les calculs effectués ;
- etc.

✚ Problème (p. 182), Vérifier (p. 189), Vérifier (p. 189), Preuve (p. 190)

Stratégies de recherche

Stratégie

Définition Ensemble d'actions que l'on coordonne dans l'objectif de trouver et de planifier les étapes de la résolution d'un problème.

Remarques

- De très nombreuses stratégies de recherche existent en mathématiques comme dans les sciences de façon générale. Certaines seront présentées dans les pages suivantes.
- Chacune peut être utilisée seule, mais plusieurs d'entre elles peuvent être associées.

ETYM **Stratégie** : du grec *strategia*, commandement d'une armée, d'où aptitude à commander une armée, qualités d'un général et manœuvre ou ruse de guerre.

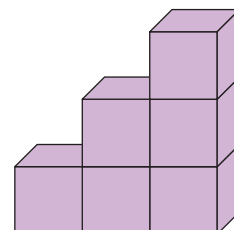
● Analogie

Définition

Stratégie consistant à repérer une ressemblance entre le problème posé et un autre problème déjà résolu qui facilitera l'élaboration d'une solution.

Exemple

Déterminer le nombre de cubes nécessaires à la construction d'un escalier simple de 100 marches de hauteur.



- On commence à faire des essais et à les organiser. On se rend compte qu'il s'agit de faire la somme de nombres entiers consécutifs en commençant par 1, donc à additionner $1 + 2 + 3 + 4 \dots$
- Cette démarche rappelle un problème dans lequel il était demandé de trouver une manière rapide d'additionner les 50 premiers nombres entiers. La méthode trouvée revenait à faire le calcul suivant : $(50 \cdot 51) : 2$
- Cette manière de faire pouvant se généraliser pour n'importe quelle somme des n premiers nombres entiers, on utilise alors cette méthode pour résoudre le problème de l'escalier en effectuant le calcul $(100 \cdot 101) : 2 = 5050$, qui donne directement le nombre de cubes nécessaires à la construction d'un escalier simple de 100 marches de hauteur.

❖ Stratégie (p. 183)

● Modélisation

Définition

Créer une représentation simplifiée d'un problème (schéma, croquis, tableau, graphique, simulation, etc.) afin de le comprendre et d'élaborer une solution.

Exemple

Le tableau utilisé dans la résolution du problème « Poignées de main » (cf. p. 188) est une modélisation de la situation proposée.

Définition

Un **schéma**, un **croquis** est un dessin fait à main levée, sans recherche de détails.

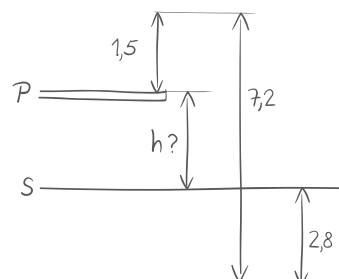
Il ne respecte pas nécessairement les mesures, mais contient des informations (cotes, symboles, explications complémentaires) qui permettent de représenter la situation et qui constitue un support à la résolution du problème.

Exemple 1

Pour effectuer une figure acrobatique, Léo saute du plongoir de la piscine municipale. Il s'élève de 1,5 m en l'air, puis descend de 7,2 m et remonte de 2,8 m pour atteindre la surface de l'eau. A quelle hauteur au-dessus de l'eau se trouve le plongoir ?

A partir de cet énoncé, on peut construire le schéma ci-contre, qui nous aide à trouver les étapes de résolution.

Solution : $h \text{ en m} = 7,2 - 2,8 - 1,5 = 2,9$

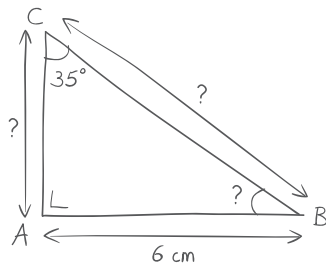


Exemple 2

Trace un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6\text{ cm}$ et $\widehat{ACB} = 35^\circ$.

A partir de cet énoncé, on peut construire le schéma ci-dessous, qui nous aide à trouver les étapes de résolution du problème.

- Calcul de l'angle $\widehat{ABC}$;
- Identification des étapes de construction.



Tâtonnement réfléchi

Définition

Stratégie consistant à rechercher la solution d'un problème en faisant différents essais en tenant compte chaque fois des résultats des essais précédents. Le premier essai ne se fait pas totalement au hasard, mais en prenant en compte les données du problème.

Exemple

Léa et Lucas collectionnent les images de leurs footballeurs préférés. Ils ont au total 134 images. Léa a 20 photos de plus que Lucas. Combien Lucas a-t-il d'images ?

Pour résoudre ce problème, on peut procéder en utilisant le tâtonnement réfléchi.

Essais	Nombre d'images de Lucas	Nombre d'images de Léa (Léa a 20 images de plus que Lucas)	Total	Conclusion
1 ^{er} essai	50	70	120	Il faut augmenter le nombre d'images de Lucas.
2 ^e essai	70	90	160	Il faut diminuer le nombre d'images de Lucas.
3 ^e essai	60	80	140	Il faut diminuer le nombre d'images de Lucas.
4 ^e essai	57	77	134	Lucas a 57 images.

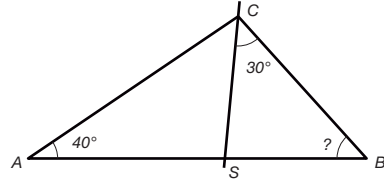
Chaînage avant

Définition

Stratégie consistant à regarder toutes les conséquences que l'on peut tirer des données du problème, ce que l'on peut en déduire ou calculer directement.

Exemple

Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$, sachant que $\widehat{CAB} = 40^\circ$, $\widehat{BCS} = 30^\circ$ et que la droite CS est la bissectrice de $\widehat{ACB}$?



ÉTAPE 1	Que puis-je calculer directement avec la donnée de ce problème ?	Je peux déterminer l'angle $\widehat{ACS}$: la droite CS étant la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$, $\widehat{ACS} = 30^\circ$.
ÉTAPE 2	Maintenant que j'ai calculé cela, que puis-je calculer d'autre ?	Maintenant, je peux calculer l'angle $\widehat{ACB}$: $\widehat{ACB} = \widehat{ACS} + \widehat{BCS} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.
ÉTAPE 3	Que puis-je encore calculer avec ce que je viens de trouver ?	Dans le triangle ABC, je peux maintenant calculer l'angle $\widehat{ABC}$: $\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{CAB} + \widehat{ACB}) = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ$
ÉTAPE 4	Je peux noter la solution.	Je peux conclure que l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 80° .

Chaînage arrière

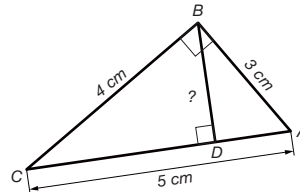
Définition

Stratégie consistant à partir du but à atteindre pour identifier :

- ce qu'il faudrait connaître pour atteindre le but ;
- les outils mathématiques ou logiques à mobiliser pour déterminer ce qui manque (définitions, propriétés, théorèmes, formules, règles, équations, représentations, etc.).

Exemple

Détermine la longueur du segment BD.



ÉTAPE 1	Je fais la liste des méthodes que je connais pour calculer une longueur.	Théorème de Pythagore, de Thalès, formules de calcul de périmètre et d'aire d'un triangle, etc.
ÉTAPE 2	Je sélectionne une de ces méthodes en fonction de leurs conditions d'utilisation et des données à disposition.	Le théorème de Thalès ne semble pas utilisable, car dans la figure on ne trouve pas l'une des conditions de ce théorème (la présence de droites parallèles). Par contre, on peut utiliser la formule de l'aire d'un triangle, car ici on peut calculer l'aire du triangle ABC de deux façons différentes.

ÉTAPE 3

J'applique la méthode choisie et je conclus.

ABC est un triangle rectangle en B dont l'aire en cm^2 est :

$$A_{ABC} = BA \cdot \frac{BC}{2} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6.$$

(Les côtés BA et BC sont respectivement la base et la hauteur, $\widehat{ABC}$ étant un angle droit.)

Dans le triangle ABC , BD est la hauteur issue de B , donc :

$$A_{ABC} = BD \cdot \frac{5}{2} = BD \cdot 2,5 \quad \text{or} \quad A_{ABC} = 6$$

$$BD \cdot 2,5 = 6, \text{ donc } BD = \frac{6}{2,5} = 2,4.$$

Donc BD mesure 2,4 cm.

Étude systématique de cas

Définition

Stratégie consistant, dans les situations pour lesquelles on sait qu'il existe un nombre restreint de possibilités de solutions, à étudier tous les cas possibles et à chercher à déterminer la ou lesquelles satisfont aux contraintes du problème.

Exemple

Un facteur donne son courrier à un professeur de maths. Il discute de la pluie et du beau temps, puis le professeur propose un petit problème au facteur :

« J'ai trois filles qui ont leur anniversaire le même mois. La somme de leurs âges est égale au numéro que l'on aperçoit sur la maison d'en face. Le produit de leurs âges est égal à 36. Quel est l'âge de chacune de mes filles ? »

Le facteur répond : « Il me manque une information pour pouvoir répondre. »

Le professeur : « Vous avez raison, la voici : mon aînée n'a pas de sœur jumelle... »

Et le facteur lui donne l'âge de ses filles.

Au fait, quel est l'âge de chacune de ses filles ?

- Les nombres à disposition ainsi que les informations proposées ne permettent pas de trouver directement ces âges. L'âge de chacun est un diviseur de 36. Le nombre de possibilités n'étant pas très grand, on peut dresser la liste exhaustive des cas.

Produits possibles	Sommes respectives
$1 \cdot 1 \cdot 36$	$1 + 1 + 36 = 38$
$1 \cdot 2 \cdot 18$	$1 + 2 + 18 = 21$
$1 \cdot 3 \cdot 12$	$1 + 3 + 12 = 16$
$1 \cdot 4 \cdot 9$	$1 + 4 + 9 = 14$
$1 \cdot 6 \cdot 6$	$1 + 6 + 6 = 13$
$2 \cdot 2 \cdot 9$	$2 + 2 + 9 = 13$
$2 \cdot 3 \cdot 6$	$2 + 3 + 6 = 11$
$3 \cdot 3 \cdot 4$	$3 + 3 + 4 = 10$

Il y a par conséquent huit cas possibles.

- Comme le facteur connaît le numéro de la maison d'en face et qu'il a besoin d'un renseignement supplémentaire, cela signifie que seules les sommes égales sont des solutions possibles, soit (1 ; 6 ; 6) et (2 ; 2 ; 9).
- La dernière indication « mon aînée n'a pas de sœur jumelle » entraîne que l'on doit éliminer (1 ; 6 ; 6).

Solution

Il y a des jumelles qui ont 2 ans et sa fille aînée a 9 ans.

Démarche scientifique

Définition

Stratégie consistant à :

- Commencer par faire des essais et les organiser.
- Emettre des conjectures à partir de ces essais.
- Tester ces conjectures : en cas d'échec, émettre d'autres conjectures et recommencer la procédure ; en cas de réussite, prouver que la conjecture est valable pour tous les cas.

Exemple

Dans un groupe de n personnes, chacune serre, une seule fois, la main de toutes les autres. Combien y a-t-il eu de poignées de main échangées ?

ÉTAPE 1 Commencer par faire des essais et les organiser. Ces essais peuvent être organisés à l'aide d'un tableau : – la diagonale est forcément vide (la personne ne serre pas sa propre main) ; – les autres cases vides représentent des situations déjà prises en compte : (B ; A) est identique à (A ; B).	Pour 2 personnes A et B : 1 poignée (A ; B). Pour 3 personnes A, B et C : 3 poignées (A ; B) ; (A ; C) ; (B ; C). Pour 4 personnes A, B, C et D : 6 poignées (A ; B) ; (A ; C) ; (A ; D) ; (B ; C) ; (B ; D) ; (C ; D). Pour 5 personnes A, B, C, D et E : 10 poignées. Pour 6 personnes A, B, C, D, E et F : 15 poignées. Par exemple pour 5 personnes : <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td>A</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>(A ; B)</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>C</td><td>(A ; C)</td><td>(B ; C)</td><td>X</td><td></td><td></td></tr><tr><td>D</td><td>(A ; D)</td><td>(B ; D)</td><td>(C ; D)</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>E</td><td>(A ; E)</td><td>(B ; E)</td><td>(C ; E)</td><td>(D ; E)</td><td>X</td></tr></table>		A	B	C	D	E	A	X					B	(A ; B)	X				C	(A ; C)	(B ; C)	X			D	(A ; D)	(B ; D)	(C ; D)	X		E	(A ; E)	(B ; E)	(C ; E)	(D ; E)	X
	A	B	C	D	E																																
A	X																																				
B	(A ; B)	X																																			
C	(A ; C)	(B ; C)	X																																		
D	(A ; D)	(B ; D)	(C ; D)	X																																	
E	(A ; E)	(B ; E)	(C ; E)	(D ; E)	X																																
ÉTAPE 2 Emettre une conjecture.	Le nombre de poignées de main est égal à la somme des entiers naturels inférieurs au nombre de personnes. Pour 5 personnes : $1 + 2 + 3 + 4 = 10$																																				
ÉTAPE 3 Tester cette conjecture.	Avec 6 personnes, on constate qu'on obtient bien $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ poignées de main. ↑ (6 – 1)																																				
ÉTAPE 4 Prouver la conjecture.	Le test de cette généralisation fonctionne pour tous les exemples déjà traités ; on peut la tester et elle fonctionne pour de nombreux autres exemples. On ne trouve pas non plus de contre-exemple. Toutefois, cela ne suffit pas à affirmer que cette conjecture est toujours vraie (cf. la deuxième règle du débat mathématique, p.190). Il faudrait encore la prouver à l'aide de propriétés mathématiques.																																				

Vérification

Vérifier

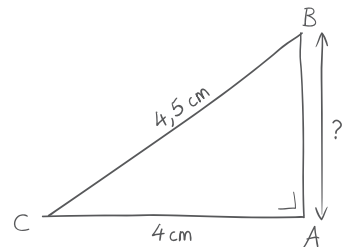
Une fois qu'on a trouvé la solution d'un problème, il est important, avant de la communiquer, de **vérifier** cette solution. Pour cela, on peut mettre en place les procédures suivantes.

- **S'assurer que la solution n'est pas en contradiction avec certaines données.**

Exemple 1

Calculer la longueur du segment AB dans la figure ci-contre.

Si l'on trouve $AB \approx 6$ cm, on peut vérifier que ce résultat est faux. En effet, on sait que dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté donc $AB < BC$, ce qui n'est pas le cas avec le résultat trouvé.



Exemple 2

Dans un garage il y a des motos et des voitures. En tout il y a 9 véhicules et 22 roues. Combien y a-t-il de voitures ? Combien y a-t-il de motos ?

Si l'on trouve 3 voitures et 6 motos, on peut constater que cela donne bien 9 véhicules ($3 + 6$) mais que le nombre de roues ne convient pas, car $3 \times 4 + 6 \times 2 \neq 22$. Donc le résultat trouvé est faux.

24

- **S'assurer, dans le cadre de problèmes concrets, que le résultat est réaliste.**

Exemple 3

Si dans un problème, on demande de calculer la vitesse du piéton et si l'on trouve 75 km/h, on peut être sûr que le résultat est faux.

Dans le cas où la solution d'un problème qu'on a trouvée est fausse, il faut vérifier l'exécution des étapes de la résolution (calculs, etc.). Si cette exécution s'avère juste, cela signifie qu'il y a une erreur au niveau de l'élaboration des étapes de résolution.

Reprenons l'exemple 1

Voici la solution d'un élève qui a trouvé environ 6 cm.

D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$AB^2 = 4,5^2 + 4^2$$

$$AB^2 = 36,25$$

$$AB \approx 6 \text{ cm}$$

L'exécution des étapes de la résolution est correcte (ici, les calculs sont justes) mais les étapes sont fausses. En effet, cet élève n'a pas appliqué correctement le théorème de Pythagore. La formulation correcte dans ce cas est $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Cela permet de trouver $AB \approx 2$ cm.

➡ Étapes de résolution d'un problème (p. 182)

Preuve

● Règles du débat mathématique

Définition

En mathématiques, pour prouver qu'une affirmation est vraie, on s'appuie sur un certain nombre de règles appelées **règles du débat mathématique**. Voici les principales :

- Une affirmation est soit vraie, soit fausse ; il n'y a pas d'exception.
- Des exemples, même nombreux, qui vérifient une affirmation ne suffisent pas à prouver que cette affirmation est vraie.
- Un contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse.
- Une mesure sur un dessin ou une constatation « à vue d'œil » ne suffisent pas à prouver qu'une affirmation géométrique est vraie ou fausse.

↗ Contre-exemple (p. 191)

● Conjecture

Définition

Affirmation mathématique qui semble vraie, mais qui n'a pas encore été prouvée.

Exemple

Conjecture de Goldbach (mathématicien et historien russe, 1690-1764) :

« Tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers »
est une conjecture célèbre dont on ne sait toujours pas si elle est vraie ou si elle est fausse ;
à l'heure actuelle, on n'est pas parvenu à la démontrer.

Remarque

En sciences de la nature, une *hypothèse* a le même sens qu'une *conjecture* en mathématiques.

● Si... alors...

Définitions

On utilise souvent, en mathématiques des affirmations sous la forme « si... alors... ».

- L'expression qui vient juste après « **si** » est appelée **condition** et l'expression qui suit « **alors** » est appelée **conclusion**.
- On obtient la **réciproque d'une telle affirmation** en inversant condition et conclusion ; la réciproque d'un énoncé vrai n'est pas toujours vraie.

Exemples

Affirmation 1	Réciproque 1 – vraie
<i>Si un triangle possède trois côtés isométriques, alors il possède trois angles isométriques.</i>	<i>Si un triangle possède trois angles isométriques, alors il possède trois côtés isométriques.</i>

Affirmation 2	Réciproque 2 – vraie
<i>Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.</i>	<i>Si, dans un triangle, le carré de la mesure du plus long côté est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.</i>
Affirmation 3	Réciproque 3 – fausse
<i>Si un nombre se termine par 2, alors il est divisible par 2.</i>	<i>Si un nombre est divisible par 2, alors il se termine par 2.</i>

➤ Critères de divisibilité (p. 13), Triangles isométriques (p. 120) Triangle rectangle et vocabulaire (p. 173)

Contre-exemple

Définition

Exemple qui contredit une affirmation. Il suffit d'un seul contre-exemple pour déclarer fausse une affirmation.

Exemples

- « Tous les nombres pairs sont des multiples de 4 »
est une affirmation fausse car, par exemple, 6 est un nombre pair, mais n'est pas un multiple de 4. Le nombre 6 est un contre-exemple de cette affirmation.
- « Tous les nombres premiers sont impairs »
est une affirmation fausse, car 2 est premier et pair, c'est l'unique contre-exemple.

➤ Multiple, diviseur (p. 12), Nombre premier (p. 13)

Prouver qu'une affirmation mathématique est fausse

Pour prouver qu'une affirmation mathématique est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.

Exemple

L'affirmation mathématique suivante est-elle vraie ou fausse ? « Quel que soit le nombre entier, s'il est divisible par 2 alors il se termine par 2. »

Cette affirmation est fausse car, par exemple, 14 est divisible par 2 et pourtant il ne se termine pas par 2. Ainsi 14 est un contre-exemple de l'affirmation ci-dessus.

➤ Contre-exemple (p. 191)

Prouver qu'une affirmation mathématique est vraie

Pour prouver qu'une affirmation mathématique est vraie, il faut utiliser des propriétés.

Exemple

L'affirmation mathématique suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Le triangle ABC tel que $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 5$ cm est un triangle rectangle. »

Le fait de dessiner le triangle et d'utiliser l'équerre pour vérifier qu'il possède un angle droit ne permet pas de prouver que ABC est triangle rectangle, d'après la 4^e règle du débat mathématique ci-dessus.

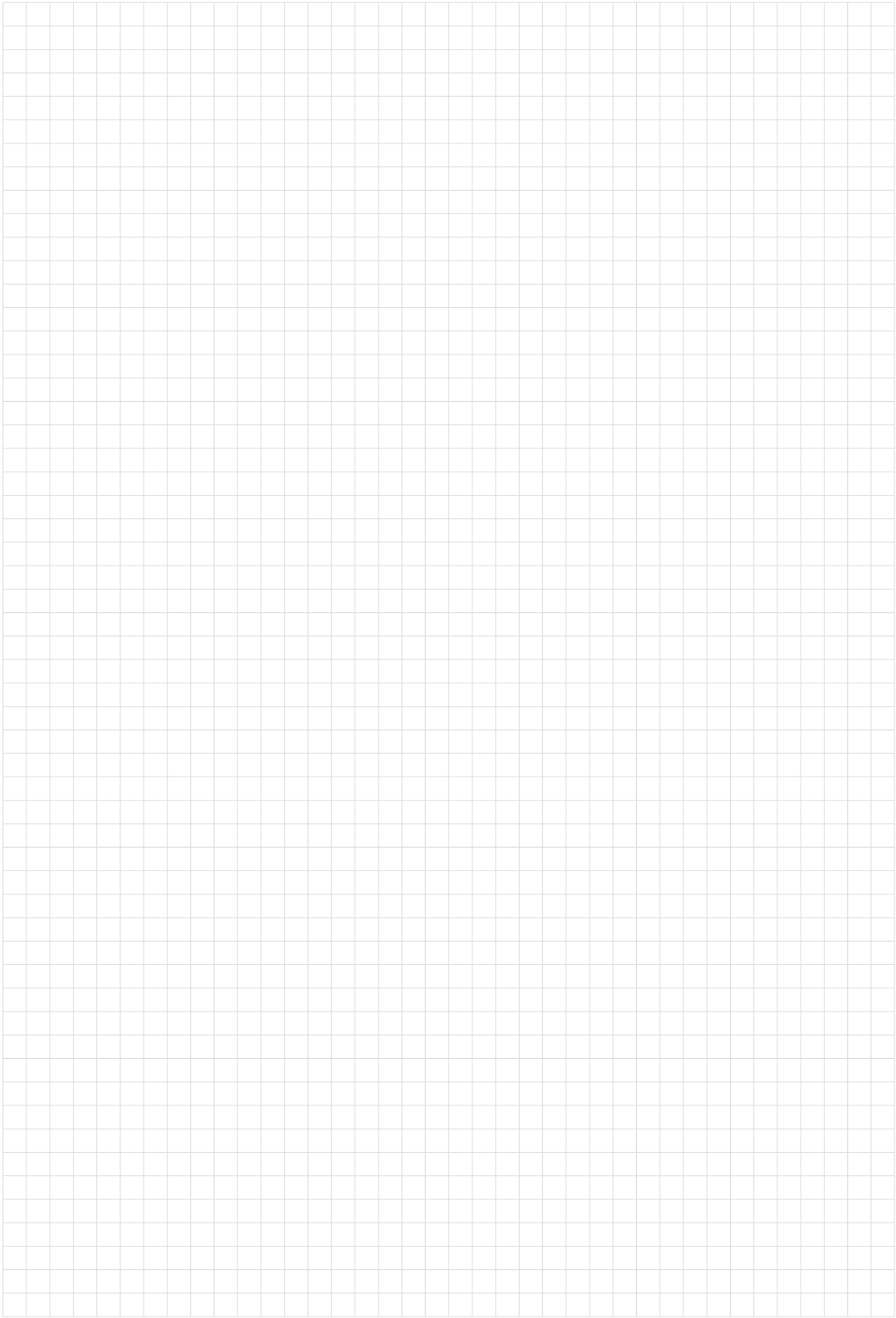
Par contre, la réciproque du théorème de Pythagore permet de prouver que cette affirmation est vraie :

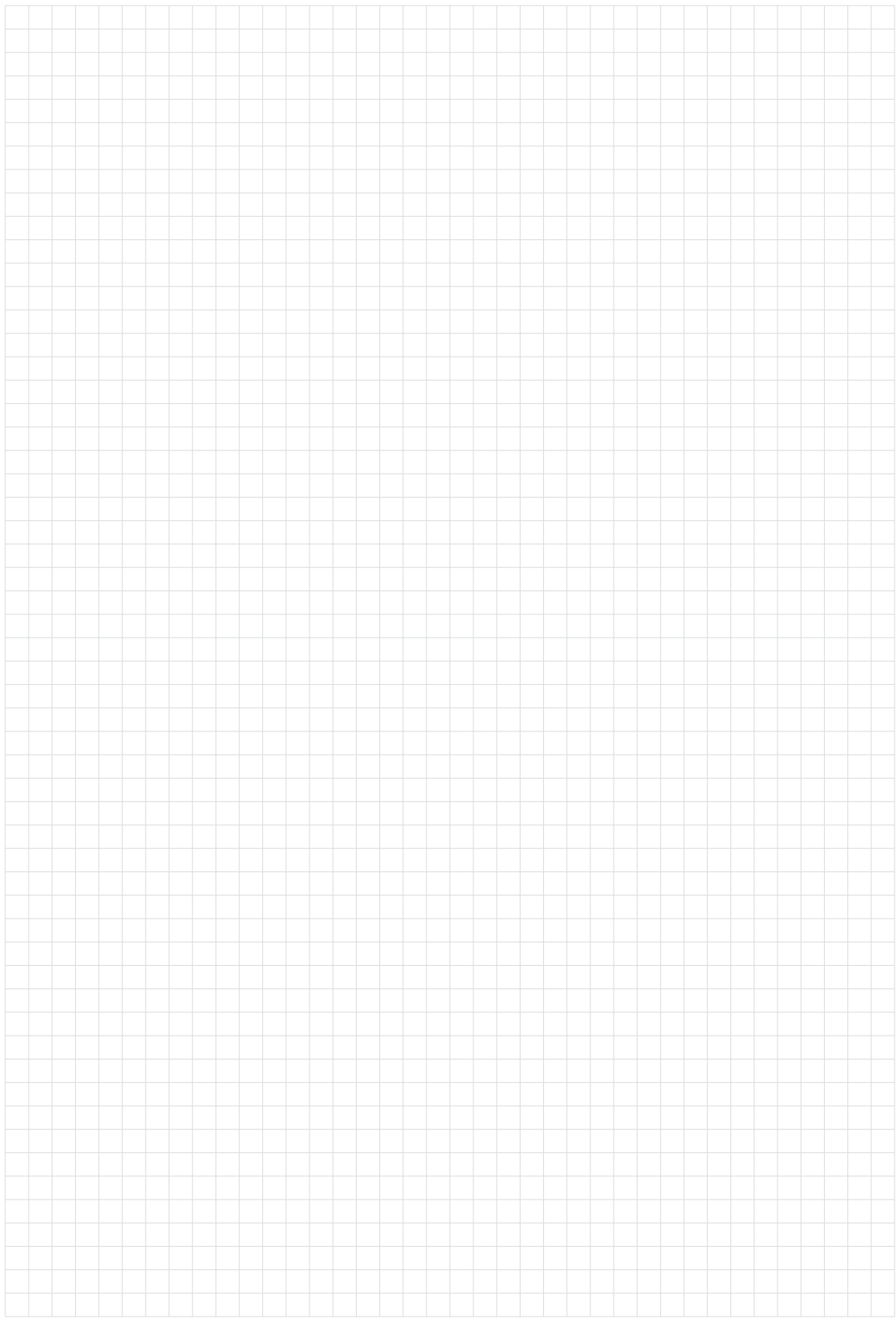
En effet, $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ et $BC^2 = 5^2 = 25$.

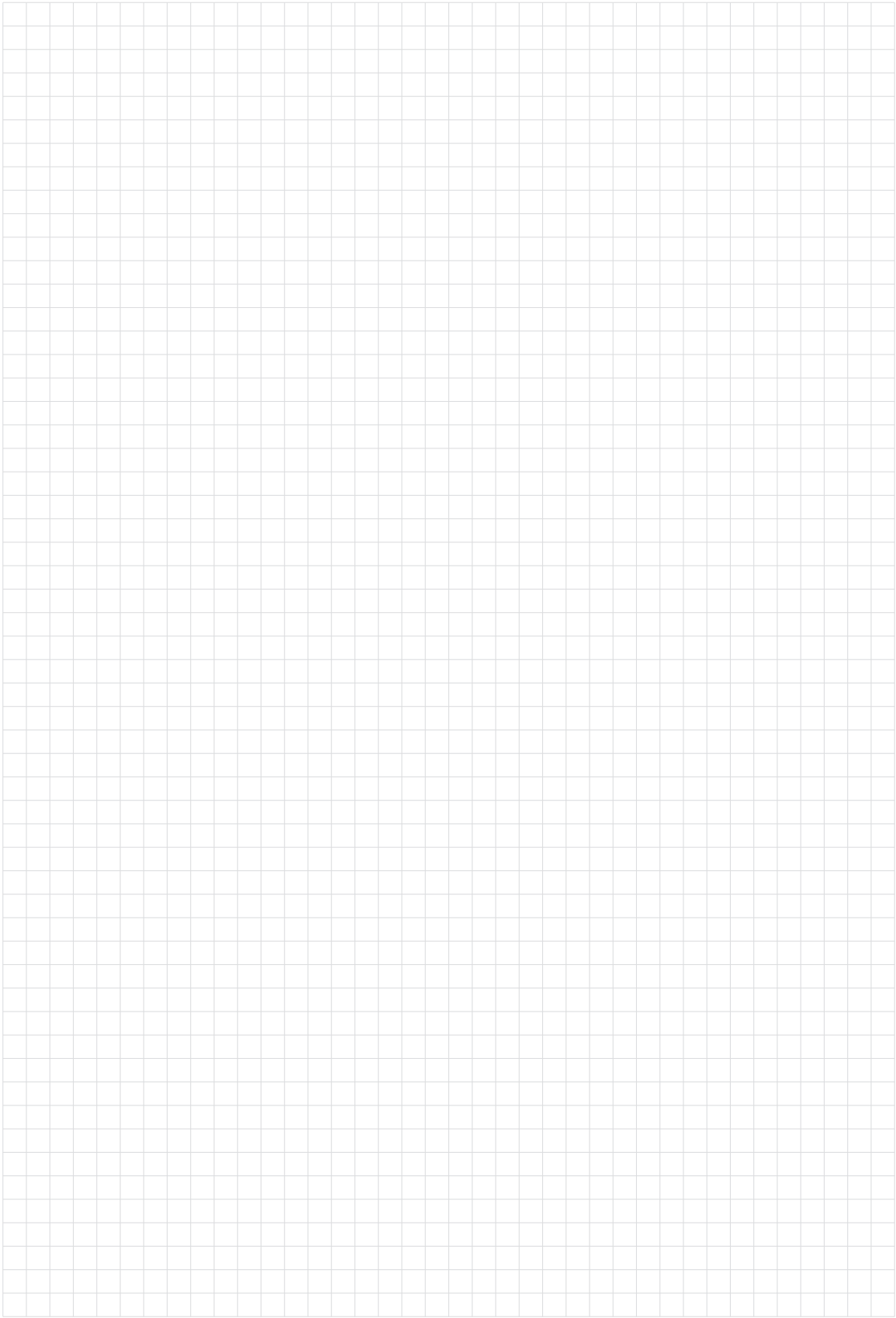
Donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

➤ Théorème de Pythagore (p. 174)

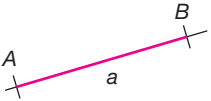
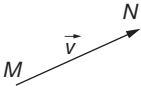
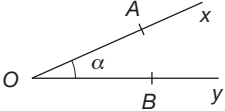
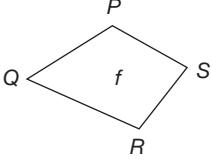
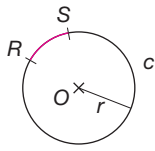
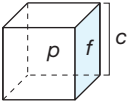
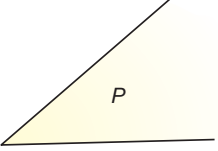
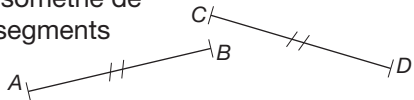
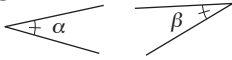


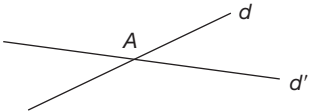
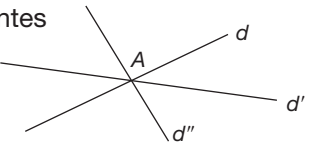
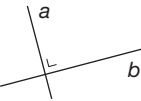




Conventions et notations

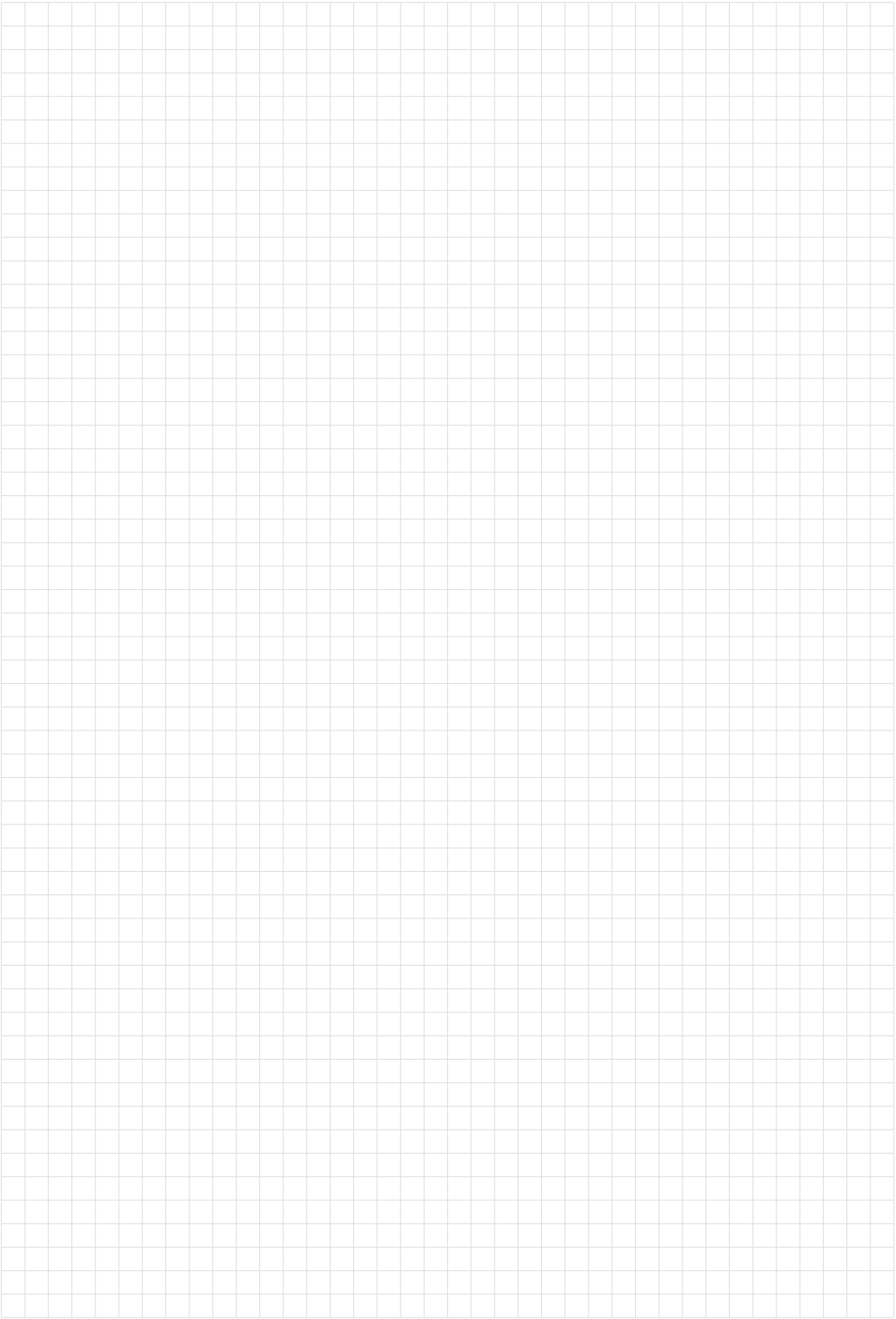
Objet, notion, propriété	Notations, conventions et commentaires
Qui est proche de...	$\cong$
Inférieur à... (plus petit que...) Supérieur à... (plus grand que...)	$<$ $>$
Inférieur ou égal à... Supérieur ou égal à...	$\leq$ $\geq$
Couple de nombres	$(a ; b)$
Ensemble Ensemble vide Ensemble de solution	$\{a ; b ; \dots\}$ $\emptyset = \{\}$ $S = \{x_1 ; x_2 ; \dots\}$
Est élément de..., n'est pas élément de... ou Appartient à..., n'appartient pas à...	$\in, \notin$
Ensembles de nombres	$\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels
Symboles représentant, numériquement parlant, «ce qu'il y a de plus grand» «ce qu'il y a de plus petit»	$+\infty$ $-\infty$
Opposé d'un nombre x	$-x$
Inverse d'un nombre x ($x \neq 0$)	x^{-1} ou $\frac{1}{x}$
Pour-cent	$\%$
Pour-mille	‰
Fonction On trouve aussi les notations :	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto y = \dots$ $x \longmapsto f(x) = \dots$

Objet, notion, propriété	Notations, conventions et commentaires
Point $+_A$ $\times_P$	le point P le point A
Segment 	le segment AB ou le segment a AB et a désignent aussi bien le segment que sa mesure <i>exemple: $AB = 2,4 \text{ cm}$ ou $a = 24 \text{ mm}$</i>
Droite 	la droite CD la droite d
Demi-droite 	la demi-droite issue de Q passant par R la demi-droite QR la demi-droite Qe
Vecteur 	le vecteur $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{MN}$
Angle 	l'angle $\widehat{AOB}$ l'angle $\widehat{xOy}$ l'angle α l'angle $\widehat{AOy}$ $\widehat{AOB}$ désigne aussi bien l'angle que sa mesure
Figure du plan 	le quadrilatère $PQRS$ la figure f le quadrilatère f le périmètre p et l'aire A le côté PS
Cercle 	le cercle c l'arc $\widehat{RS}$ le cercle $c(O; r)$ $\widehat{RS}$ désigne aussi bien l'arc que sa mesure
Figure de l'espace 	le polyèdre p la face f l'arête c le volume V
Plan 	le plan P
Isométrie de segments 	$AB = CD$ des segments isométriques peuvent être marqués par un même symbole
Isométrie d'angles 	$\alpha = \beta$ des angles isométriques peuvent être marqués par un même symbole

Objet, notion, propriété	Notations, conventions et commentaires
Sécantes 	deux droites d et d' possédant un seul point d'intersection A
Concourantes 	plusieurs droites d, d' et d'' possédant un seul point d'intersection A
Parallèles 	les droites e et f sont parallèles $e // f$
Perpendiculaires 	sur ce dessin, l'angle droit formé par les droites a et b est noté à l'aide du signe $\perp$; parfois, il est signalé à l'aide des symboles $\perp$ ou $\perp$ $a \perp b$
Isométries appliquées à une figure f	translation $f \xrightarrow{T(\vec{v})} f'$ symétrie axiale $f \xrightarrow{S(d)} f'$ rotation $f \xrightarrow{R(O; +120^\circ)} f'$ symétrie centrale $f \xrightarrow{S(O)} f'$
Homothétie	homothétie $f \xrightarrow{H(O; k)} f'$
Composition de transformations	la composition des transformations f et g peut être notée $g \circ f$; on commencera par la transformation f, puis la transformation g

Alphabet grec

Majuscules	Minuscules	En français	Majuscules	Minuscules	En français
A	α	alpha	N	ν	nu
B	β	bêta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	O	o	omicron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ε	epsilon	P	ρ	rhô
Z	ζ	dzêta	Σ	σ	sigma
H	η	êta	T	τ	tau
Θ	θ	thêta	Y	υ	upsilon
I	ι	iota	Φ	φ	phi
K	κ	kappa	X	χ	khi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mu	Ω	ω	oméga



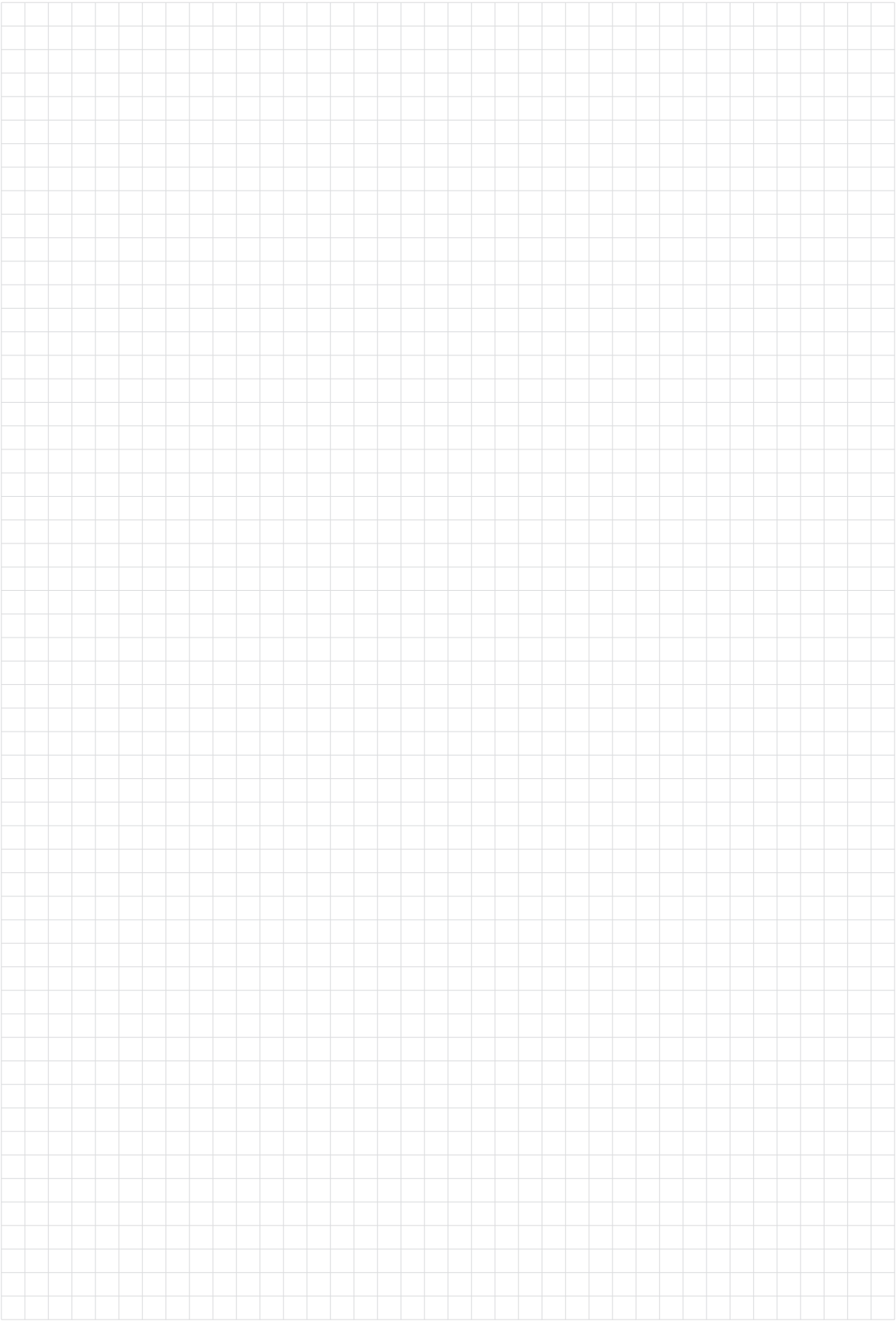


Table des matières

Nombres et opérations

■ Généralités	10
Ensembles de nombres	10
Chiffres et nombres	11
Droite numérique	11
Ordre croissant et ordre décroissant	11
Estimation d'un résultat	12
■ Ensemble des nombres naturels	12
Nombres naturels	12
Multiple, diviseur	12
Critères de divisibilité	13
Nombre premier	13
Décomposition en produit de facteurs premiers	14
<i>Décomposer un nombre en un produit de facteurs premiers</i>	14
Multiple commun, ppmc	15
<i>Calculer le ppmc de plusieurs nombres</i>	15
Diviseur commun, pgdc	16
<i>Calculer le pgdc de plusieurs nombres</i>	16
■ Ensemble des nombres entiers relatifs	17
Nombres entiers relatifs	17
Distance à zéro	17
Nombres opposés	17
Addition de nombres relatifs	18
Soustraction de nombres relatifs	18
Écriture simplifiée d'une somme ou d'une différence de nombres relatifs	19
<i>Effectuer un calcul comportant des sommes et des différences de nombres relatifs</i>	19
Multiplication de nombres relatifs	20
Division de nombres relatifs	20
■ Ensemble des nombres décimaux	21
Nombres décimaux	21
Représentation de nombres décimaux sur une droite graduée	21
Approximation d'un nombre décimal	22
Addition	22
<i>Additionner des nombres décimaux positifs en colonnes</i>	23
Soustraction	23
<i>Soustraire des nombres décimaux positifs en colonnes</i>	23
Multiplication	24
<i>Multiplier des nombres décimaux positifs en colonnes</i>	24
Division	24
<i>Diviser un nombre décimal positif par un nombre décimal positif</i>	25
Propriétés de l'addition et de la multiplication	25
Priorités des opérations	26
<i>Effectuer un calcul avec ou sans parenthèses</i>	27
■ Ensemble des nombres rationnels	27
Nombres rationnels	27

<i>Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale</i>	28
<i>Passer d'une écriture décimale finie à une écriture fractionnaire</i>	28
Amplification et simplification de fractions	29
Addition et soustraction de fractions	30
<i>Additionner et soustraire des fractions</i>	30
Multiplication de fractions	31
Calculer la fraction d'un nombre	31
Nombres inverses	31
Division de fractions	31
■ Ensemble des nombres réels	32
Nombres réels	32
■ Puissances	32
Puissance d'exposant positif	32
Puissance d'exposant négatif	33
Puissance de dix	33
Propriétés des puissances	34
Notation scientifique	35
<i>Écrire un nombre décimal positif en notation scientifique</i>	35
■ Racines	36
Racine carrée	36
Racine cubique	36
Propriétés des racines	37
<i>Simplifier des sommes contenant des racines carrées</i>	37
■ Probabilités	38
Série statistique et fréquence	38
Situation aléatoire, événement	38
<i>Calculer la probabilité d'un événement</i>	40

Fonctions et algèbre

■ Fonctions	46
Généralités	46
Représentation graphique	46
Définir une fonction	47
Fonction affine	48
<i>Construire la représentation graphique d'une fonction affine</i>	49
<i>Déterminer la pente d'une droite à partir de sa représentation graphique</i>	50
<i>Déterminer l'expression fonctionnelle d'une fonction affine à partir de sa représentation graphique</i>	51
Cas particuliers de la fonction affine	52
Fonction quadratique	53
Fonction cubique	53
Fonction racine carrée	54
Fonction homographique	54
■ Proportionnalité	55
Généralités	55
<i>Résoudre un problème de proportionnalité</i>	57
Pourcentage	58
<i>Déterminer un pourcentage</i>	58

Echelle	59
<i>Déterminer l'échelle d'une reproduction de la réalité</i>	59
Pente	60
<i>Déterminer la pente moyenne</i>	60
Vitesse moyenne	61
<i>Déterminer la vitesse moyenne</i>	61
Masse volumique	62
<i>Déterminer la masse volumique d'un objet</i>	62
Débit	63
<i>Déterminer le débit</i>	63
■ Diagrammes	64
Diagramme	64
<i>Construire un diagramme circulaire</i>	66
■ Calcul littéral	67
Expression littérale	67
Alléger l'écriture d'expressions littérales	67
Égalité de deux expressions littérales	68
Monôme	68
Degré d'un monôme	68
Multiplication de monômes	69
Monômes semblables	69
Addition ou soustraction de monômes semblables	69
Polynôme	69
Réduction d'un polynôme	70
Degré d'un polynôme	70
Addition de polynômes	70
Polynômes opposés	71
Soustraction de polynômes	71
Somme ou produit d'une expression littérale	71
Multiplication de polynômes	72
Produits remarquables	72
Développement d'un produit	73
<i>Développer et réduire une expression littérale</i>	73
<i>Calculer la valeur numérique d'une expression littérale connaissant la valeur de la lettre</i>	74
Factorisation d'une expression littérale	74
<i>Factoriser une expression littérale</i>	74
■ Equations	76
Equation	76
Equations équivalentes	76
Equation du premier degré à une inconnue	76
Règles d'équivalence	77
<i>Résoudre une équation du premier degré à une inconnue</i>	77
Equation du premier degré à deux inconnues	78
Système de deux équations du premier degré à deux inconnues	78
<i>Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues</i>	79
Equation du deuxième degré à une inconnue	80
Résolution d'une équation du deuxième degré à une inconnue	81
<i>Résoudre une équation du deuxième degré à une inconnue</i>	82
Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule	83
<i>Utiliser une formule pour calculer une mesure de grandeur</i>	83

Espace

■ Figures géométriques planes	90
Droite	90
Points alignés	90
Demi-droite	90
Segment	90
Distance entre deux points	91
Distance d'un point à une droite	91
Distance entre deux droites parallèles	91
Segments isométriques	92
Milieu d'un segment	92
Droites sécantes	92
Droites perpendiculaires	93
<i>Tracer la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné</i>	93
Droites parallèles	94
Propriétés des droites parallèles et perpendiculaires	94
<i>Tracer la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné</i>	95
Médiatrice d'un segment	96
<i>Construire la médiatrice d'un segment avec une règle non graduée et un compas</i>	97
Plan	97
Repérage d'un point dans le plan	98
Cercle et disque	99
Arc de cercle	100
Secteur circulaire	100
Tangente à un cercle	100
Angle	101
<i>Mesurer un angle à l'aide d'un rapporteur</i>	102
Classement des angles	103
Angles adjacents	104
Angles complémentaires	104
Angles supplémentaires	104
Angles isométriques	105
Bissectrice d'un angle	105
<i>Construire la bissectrice d'un angle avec une règle et un compas</i>	106
Angles opposés par le sommet	106
Angles correspondants	107
Angles alternes-internes	107
Angles alternes-externes	108
Angle au centre d'un cercle	108
Angle inscrit dans un cercle	108
Cercle de Thalès d'un segment	109
Figure plane	110
Polygone	110
Diagonale d'un polygone	111
Polygone convexe ou non convexe	111
Polygone inscrit dans un cercle	111
Polygone régulier	112
Angle au centre et angle intérieur d'un polygone régulier	113
<i>Construire un polygone régulier avec une règle, un rapporteur et un compas</i>	113
Triangle	114
Triangles particuliers	114

Classement des triangles	115
Inégalité triangulaire	115
Somme des angles d'un triangle	116
Cercle circonscrit à un triangle et médiatrices	116
Cercle inscrit à un triangle et bissectrices	117
Hauteurs d'un triangle et orthocentre	117
<i>Tracer une hauteur d'un triangle</i> <i>avec une équerre</i>	118
Médianes et centre de gravité	119
Triangles isométriques	120
Triangles semblables	121
Figures semblables	122
Quadrilatère	123
Quadrilatères particuliers	123
Classement des quadrilatères	125
Transformations géométriques	126
Transformations du plan	126
Quelques propriétés des transformations du plan	126
Isométrie	128
Vecteur	128
Translation	129
<i>Construire l'image d'un point par une translation</i>	130
Symétrie axiale	130
<i>Construire l'image d'un point par une</i> <i>symétrie axiale</i>	131
Axe de symétrie	132
Symétrie centrale	132
<i>Construire l'image d'un point par</i> <i>une symétrie centrale</i>	133
Centre de symétrie	134
Rotation	134
<i>Construire l'image d'un point par une rotation</i>	136
<i>Retrouver le centre et l'angle d'une rotation</i>	137
Homothétie	138
<i>Construire l'image d'un point</i> <i>par une homothétie</i>	140
Propriétés des isométries et des homothéties du plan	140
Similitude	141
Géométrie dans l'espace	142
Représentation d'un objet dans l'espace	142
Repérage d'un point dans l'espace	144
Polyèdre	144
Prisme droit	145
Parallélépipède rectangle ou pavé droit	146
Pyramide	147
Polyèdre régulier	148
Cylindre droit	149
Cône de révolution	149
Sphère ou boule	150

Grandeurs et mesures

■ Unités de mesure	156
Unités de longueur	156
<i>Convertir les unités de longueur</i>	156
Unités d'aire	157
<i>Convertir les unités d'aire</i>	158

Unités de volume et de capacité	158
<i>Convertir les unités de volume</i>	159
<i>Convertir les unités de volume en unités de capacité et inversement</i>	160
Unités de masse	160
Unités de temps	161
<i>Convertir les unités de temps</i>	161
■ Périmètre d'une surface	163
Généralités	163
Périmètre des surfaces usuelles	164
■ Aire d'une surface	165
Généralités	165
Aire des surfaces usuelles	165
<i>Calculer l'aire d'une figure</i>	168
■ Volume d'un solide	169
Généralités	169
Volume des solides usuels	170
<i>Calculer le volume d'un solide</i>	172
■ Théorèmes	173
Triangle rectangle et vocabulaire	173
Théorème de Pythagore	173
<i>Calculer la longueur d'un segment en utilisant le théorème de Pythagore</i>	174
<i>Prouver qu'un triangle est rectangle en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore</i>	175
Théorème de Thalès	175
<i>Calculer la longueur d'un segment en utilisant le théorème de Thalès</i>	176

Recherche et stratégies

■ Problèmes et résolutions	182
Problème	182
Etapas de résolution d'un problème	182
■ Stratégies de recherche	183
Stratégie	183
Analogie	184
Modélisation	184
Tâtonnement réfléchi	185
Chaînage avant	186
Chaînage arrière	186
Etude systématique de cas	187
Démarche scientifique	188
■ Vérification	189
Vérifier	189
■ Preuve	190
Règles du débat mathématique	190
Conjecture	190
Si... alors...	190
Contre-exemple	191
Prouver qu'une affirmation mathématique est fausse	191
Prouver qu'une affirmation mathématique est vraie	191

Conventions et notations	195
Table des matières	200
Index	203

Index

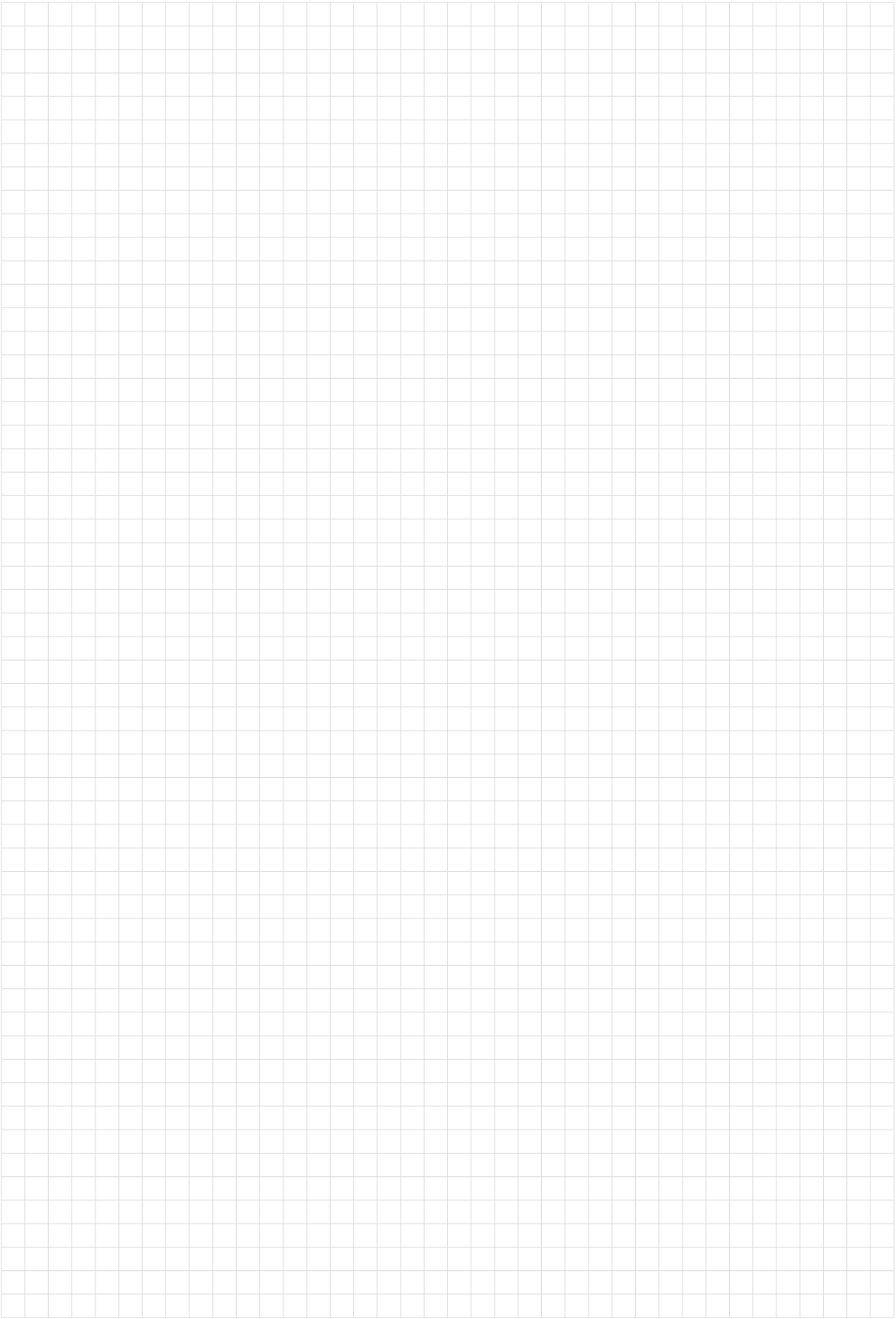
- A**
- abscisse (d'un point) 98, 144
 - absorbant (élément) 26
 - addition 22
 - addition (propriétés) 25
 - addition de fractions 30
 - addition de monômes semblables 69
 - addition de nombres décimaux 22, 23
 - addition de nombres relatifs 18
 - addition de polynômes 70
 - adjacents (angles) 104
 - affine (fonction) 48-52
 - agrandissement d'une figure 139
 - agrandissement d'une figure 59, 122
 - aigu (angle) 103
 - aire (unité) 157, 158
 - aire d'une surface 165-169
 - aire des surfaces usuelles 165-167
 - aléatoire (situation) 38
 - alléger l'écriture d'écriture d'expressions littérale 67
 - alphabet grec 197
 - amplification de fractions 29
 - analogie 184
 - angle (mesurer) 102
 - angle aigu 103
 - angle au centre d'un cercle 108
 - angle au centre d'un polygone régulier 113
 - angle de rotation 134
 - angle droit 103
 - angle inscrit dans un cercle 108-109
 - angle intérieur (polygone régulier) 113
 - angle nul 103
 - angle obtus 103
 - angle plat 103
 - angle plein 103
 - angle rentrant 103
 - angles 101-109
 - angles (classement) 103
 - angles adjacents 104
 - angles alternes-externes 108
 - angles alternes-internes 107
 - angles complémentaires 104
 - angles correspondants 107
 - angles isométriques 105
 - angles opposés 106
 - angles supplémentaires 104
 - approximation d'un nombre décimal 22
 - arc de cercle 100
 - arc de cercle (périmètre) 164
 - are (a) 157
 - arête d'un polyèdre 144
 - arrondi 22
 - arrondir un nombre 22
 - associativité 25
 - axe de symétrie 132
 - axe de symétrie d'un angle 105
 - axe des x (abscisse) 98, 144
 - axe des y (ordonnée) 98, 144
 - axe des z (cote) 144
 - axes de symétrie (polygones réguliers) 112
 - axe de symétrie (quadrilatères particuliers) 123-124
- B**
- base (cône, cylindre, prisme droit, pyramide) 145, 147, 149
 - base d'une puissance 32
 - billion 33
 - billionième 33
 - bissectrice d'un angle 105, 106
 - bissectrices (triangle) 117
 - boule 150
 - boule (volume) 171
- C**
- calcul littéral 67-75
 - calculer la fraction d'un nombre 31
 - capacité (unité) 159
 - carré (périmètre et aire) 164, 166
 - carré (propriétés) 124, 125
 - cartésien (diagramme) 64
 - cathètes 173
 - centaine 21
 - centi 33
 - centième 21, 33
 - centre d'homothétie 138
 - centre d'un cercle 99
 - centre d'une sphère 150
 - centre de gravité du triangle 119
 - centre de polygone 112
 - centre de rotation 134
 - centre de symétrie 134
 - cercle 49
 - cercle (périmètre et aire) 164, 166
 - cercle circonscrit à un triangle 116
 - cercle de Thalès 109
 - cercle inscrit à un triangle 117
 - cerf-volant (propriétés) 124
 - chaînage arrière 186, 187
 - chaînage avant 186
 - chiffres 11
 - circonscrit (cercle) 116
 - circulaire (diagramme) 65, 66
 - coefficient de linéarité (facteur de linéarité) 55
 - coefficient de proportionnalité (facteur de proportionnalité) 55
 - coefficient d'un monôme 68
 - combinaison linéaire (résolution d'équation) 80
 - commutativité 25
 - cône (volume) 171
 - cône de révolution 149
 - conjecture 189
 - conservation des longueurs (propriétés) 126
 - conservation des angles (propriétés) 126
 - conservation du parallélisme (propriétés) 127
 - conservation de l'orientation (propriétés) 127
 - conservation des directions (propriétés) 127
 - conservation du sens des vecteurs (propriétés) 127
 - constante (fonction) 50
 - construire l'image d'un point par une homothétie 140
 - construire l'image d'un point par une rotation 136
 - construire l'image d'un point par une symétrie axiale 131
 - construire l'image d'un point par une symétrie centrale 133
 - construire l'image d'un point par une translation 130
 - construire la bissectrice d'un angle 106
 - construire un polygone régulier 113-114
 - contre-exemple 190
 - convention d'écriture (expression littérale) 67
 - conventions et notations 195-197
 - convertir les unités d'aire 158
 - convertir les unités de longueur 156
 - convertir les unités de temps 161, 162
 - convertir les unités de volume 159
 - convertir les unités de volume en unité de capacité et inversement 160
 - convexe ou non convexe (polygone) 111
 - coordonnée 98, 144
 - coordonnées 46
 - corde 99
 - correspondants (angles) 107
 - cote d'un point (repérage) 144

côté d'un polygone	110	distance à zéro	17	équation	76-83
côtés de l'angle droit	173	distance d'un point à une droite	91	équation du deuxième degré à une inconnue	80-82
critères de divisibilité	13	distance entre deux droites parallèles	91	équation du premier degré à deux inconnues	78
croissant (ordre)	11	distance entre deux points	91	équation du premier degré à une inconnue	76
croquis	184	distance horizontale	60	équations (système de deux équations du premier degré à deux inconnues)	78-80
cube	146, 148	distributivité	26	équations équivalentes	76
cube (volume)	170	distributivité (double)	72	équilatéral (triangle)	114, 115
cubique (fonction)	53	dividende	24	équiprobables (résultats)	39
cyindre (volume)	171	diviseur	11, 24	équivalence (règles)	77
cyindre droit	149	diviseur commun	16, 29	équivalentes (équations)	76
D					
débat mathématique (règles)	189	divisibilité (critères)	13	estimation d'un résultat	12
débit	63	division	24	étapes de résolution d'un problème	182, 183
déca	33	division (nombres décimaux)	25	étude systématique de cas	187
décagone régulier	112	division de fractions	31	événement (aléatoire)	39
déci	33	division de nombres relatifs	20	exposant	32
décimale (écriture)	21	dixième	21, 33	expression fonctionnelle	47-51
décimale (numérotation)	21	dizaine	21, 33	expression littérale	67
décimale (partie)	21	dodécaèdre régulier	148	F	
décimaux (nombres)	21	dodécagone régulier	112	face d'un polyèdre	144
décomposition en produit de facteurs premiers	14	double distributivité	72	face latérale	145
décroissant (ordre)	11	droit (angle)	103	facteur	24
degré (angle)	101	droite	90	facteur de linéarité	55
degré d'un monôme	68	droite graduée (représentation de nombres décimaux)	21	facteur de proportionnalité	55
degré d'un polynôme	70	droite numérique	11	facteurs premiers (décomposition)	14
degré d'une équation	76, 80	droites parallèles	94, 95	factorisation (polynômes)	74-75
démarche scientifique	188	droites perpendiculaires	93, 94	fer de lance (propriétés)	124
demi-droite	90	droites sécantes	92	figure (calculer l'aire)	168
dénivellation	60	E		figure plane	110
dénominateur	27	échelle	59	figures géométriques	90-125
dénominateur commun	30	écriture décimale	21, 27, 33	figures semblables	122
développement d'un cylindre droit	149	écriture fractionnaire	27	fonction (définir une)	47
développement d'un parallélogramme rectangle ou pavé droit	146	écriture scientifique (notation scientifique)	35	fonction affine	48-52
développement d'un produit	73	écriture simplifiée d'une somme ou d'une différence de nombres relatifs	19	fonction affine (construction d'une représentation graphique)	49
développement d'un solide	143	égalité (expression littérale)	68	fonction constante	50
développement de la pyramide	147	égalité conditionnelle	76	fonction cubique	53
développer (expression littérale)	73	égalité des rapports	56, 57	fonction homographique	54
diagonale d'un polygone	111	élément absorbant	26	fonction linéaire	50
diagramme cartésien	64	élément neutre	26	fonction linéaire	55
diagramme circulaire	65, 66	ennéagone régulier	112	fonction quadratique	53
diagramme circulaire (construction)	66	ensemble de solutions d'une équation	76	fonction racine carrée	54
diagramme en barre	65	ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$	10, 21-27	fonctions	46-54
diagramme en bâtons	64	ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$	10, 17-20	formule (calcul de la mesure d'une grandeur)	83
diagramme en colonnes	64	ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$	10, 12-16	formules de calcul d'aires	165- 168
diagramme figuratif	65	ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$	10, 27-31	formules de calcul de périmètres	164
diagrammes	64-66	ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$	10, 32	formules de calcul de volumes	170-172
diamètre (cercle)	99	ensembles de nombres entiers (partie)	21	formule de Viète	81
différence	23			fraction	27
direction d'un vecteur	128			fraction d'un nombre (calculer la)	31
discriminant (équation)	81				
disque	99				
disque (aire)	167				

- fraction irréductible 29
fréquence (probabilité) 38, 39
- G**
géométrie dans l'espace 142-150
giga 33
gramme (g) 160
grandeur proportion 55
graphique (représentation d'une fonction) 46, 47, 49-51
- H**
hauteur (cône, cylindre, prisme droit, pyramide) 145, 147, 149
hauteur (triangle, parallélogramme, trapèze) 165-167
hauteur d'un triangle 117-119
hauteur face latérale (pyramide) 147
hectare (ha) 157
hecto 33
hendécagone régulier 112
heptagone régulier 112
hexagone régulier 112
homographique (fonction) 54
homothétie 138-140
homothétie (propriétés) 140
hyperbole 54
hypoténuse 173
- I**
icosaèdre régulier 148
identités remarquables 72, 75
image (fonction) 46
inconnue 67, 76
indéterminée 67
inégalité triangulaire 115
inscrit (cercle) 117
inverse (nombre) 31
irrationnel (nombre) 32
irréductible (fraction) 29
isocèle (trapèze) 123, 125
isocèle (triangle) 114, 115
isométrie 128, 140
isométrie (propriétés) 140
isométrique (segment) 92
isométriques (angles) 105
isométriques (triangles) 120
- K**
kilo 33
- L**
linéaire (fonction) 50
linéaire (fonction) 55
linéarité (facteur) 55
litre (l) 159
littéral (calcul) 67-75
littérale (expression) 67
- longueur (unité) 156
longueur d'un vecteur 128
losange (aire) 166
losange (propriétés) 124, 125
- M**
masse (unité) 160
masse volumique 62
médiane 119, 120
médiatrice d'un segment 96, 97
médiatrices (triangle) 116
méga 33
membre d'une équation 76
mesurer un angle à l'aide d'un rapporteur 102
mètre (m) 156
mètre carré (m²) 157
mètre cube (m³) 158
micro 33
milieu d'un segment 92
mille 33
milliard 33
milliardième 33
millième 21, 33
millier 21
million 33
millionième 33
mise en évidence 74, 75
modélisation 184
monôme 68
monôme (addition) 69
monôme (coefficient) 68
monôme (degré) 68
monôme (multiplication) 69
monôme (partie littérale) 68
monôme (soustraction) 69
monôme semblable 69
multiple 12
multiple commun, ppmc 15
multiplication 24
multiplication (propriétés) 25
multiplication de fractions 31
multiplication de monômes 69
multiplication de nombres décimaux 24
multiplication de nombres relatifs 20
multiplication de polynômes 72
- nombres opposés 17
nombres premiers 13
nombres rationnels 27
nombres réels 32
nombres relatifs 17
notation scientifique 35
nul (angle) 103
numérateur 27
numération décimale 21
- O**
obtus (angle) 103
octaèdre régulier 148
octogone régulier 112
opposé (coté) 117
opposé (nombres) 17
opposé (polynôme) 71
opposés par le sommet (angles) 106
ordonnée 48, 98
ordonnée (axe des) 48, 98
ordonnée (d'un point) 98, 144
ordonnée à l'origine 48, 50
ordonner un polynôme 70
ordre croissant 11
ordre décroissant 11
orientation (conservation) 97
origine 98, 144
origine d'une demi-droite 90
origine d'un repère 98, 144
orthocentre 117-118
- P**
parabole 53
parallépipède rectangle 146
parallépipède rectangle (volume) 170
parallèles (droites) 94, 95
parallélogramme (aire) 166
parallélogramme (propriétés) 124, 125
partie (proportionnalité) 58
partie littérale d'un monôme 68
passer d'une écriture décimale finie à une écriture fractionnaire 28
passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale 28
patron (développement d'un solide) 143
pavé droit 146
pavé droit (volume) 170
pentagone régulier 112
pente (déterminer la) 60
pente (d'un terrain) 60
pente d'une droite 48, 50
pente négative 49
pente positive 49
périmètre d'une figure 163
- N**
narration de recherche 183, 188
naturels (nombres) 12
neutre (élément) 26
nombres 11
nombres entiers relatifs 17
nombres naturels 12
nombres décimaux 21
nombres inverses 31
nombres irrationnels 32

- périmètre d'une surface 163, 164
 périmètres de surfaces usuelles 164
 périodique (nombre) 27
 perpendiculaires (droites) 93, 94
 perspective artistique 143
 perspective cavalière 142
 perspective isométrique 142
 pgdc (plus grand diviseur commun) 16
 plat (angle) 103
 plein (angle) 103
 plan 97
 point de fuite 142
 points alignés 90
 polyèdre 144
 polyèdres de Platon 148
 polyèdres réguliers 148
 polyèdres réguliers convexes 148
 polygone convexe ou non convexe 111
 polygone inscrit dans un cercle 111
 polygone 110-114
 polygones réguliers 112, 113
 polynôme 69
 polynôme (addition) 70
 polynôme (degré) 70
 polynôme (réduction) 70
 polynôme (soustraction) 71
 polynôme opposé 71
 polynômes (multiplication) 72
 pour-cent (%) 58
 pour-mille (‰) 58
 pourcentage 58
 pourcentage (calculer un) 58
 ppmc (plus petit multiple commun) 15
 preuves 189, 190
 priorités des opérations 26, 27
 prisme droit 145
 prisme droit (volume) 170
 probabilité 38-40
 problème (définition) 182
 problèmes et résolutions 182
 produit 24
 produit (propriété) 56, 57
 produit d'une expression littérale 71
 produits remarquables 72, 75
 proportionnalité 55-63
 proportionnalité (résoudre un problème) 57
 proportionnelles (grandeurs) 55
 propriété de la somme (proportionnalité) 56, 57
 propriété du produit (proportionnalité) 56, 57
 propriétés de l'addition et multiplication 25
 puissance d'exposant négatif 33
 puissance d'exposant positif 32
 puissances 32-35
 puissances (propriétés) 34
 puissance de dix 33
 pyramide 147
 pyramide (volume) 170
 pyramide régulière 147
 Pythagore (réciproque) 174, 175
 Pythagore (théorème) 173-175
Q
 quadratique (fonction) 53
 quadrilatère 123-125
 quadrilatères (classement) 125
 quadrilatères particuliers 123, 124
 quintal (q) 160
 quotient 24, 27
R
 racine carrée 36
 racine carrée (fonction) 54
 racine cubique 36
 racines 36-37
 racines (propriétés) 36, 37
 rapport d'homotétie 138
 rapporteur 102
 rationnel (nombre) 27
 rayon (boule) 150
 rayon (cercle) 99
 rayon (sphère) 150
 réciproque (d'un énoncé) 190
 réciproque du théorème de Pythagore 174, 175
 rectangle (périmètre et aire) 164, 166
 rectangle (propriétés) 124, 125
 rectangle (trapèze) 124
 rectangle (triangle) 114, 115
 réduction d'un polynôme 70
 réduction d'une figure 139
 réduction d'une figure 59, 122
 réduire (expression littérale) 73
 réel (nombre) 32
 règle d'équivalence 77
 règles du débat mathématique 189
 relatif (nombre) 17
 rentrant (angle) 103
 repérage d'un point dans l'espace 144
 repérage d'un point dans le plan 98
 repère (repérage d'un point) 98, 144
 représentation d'un objet dans l'espace 142
 représentation graphique (diagrammes) 64-66
 représentation graphique (fonction) 46, 47
 résolution d'équations 77-82
 résolution d'un problème (étapes) 182, 183
 résolution d'une équation du deuxième degré à une inconnue 81, 82
 résultats équiprobables 39
 résultats favorables 39
 résultats possibles 39
 rhomboïde (propriétés) 124, 125
 rotation 134-137
 rotation (propriétés) 140
S
 schéma 184
 sécantes (droites) 92
 seconde (s) 161
 secteur circulaire 100
 secteur circulaire (aire) 167
 segment 90
 segment (milieu) 92
 segment isométrique 92
 segment orienté 128
 semblable (monôme) 69
 semblables (triangles) 121
 sens d'un vecteur 128
 sens de rotation 134
 série statistique 38
 sexagésimal (système) 161
 si... alors... 190
 similitude 141
 simplification d'écriture (somme ou différence de nombres relatifs) 19
 simplification de fractions 29
 situation aléatoire 38
 solide 143, 144
 solide (calculer le volume) 172
 solide (volume) 169-172
 solutions d'une équation 76
 somme 22
 somme (propriété) 56, 57
 somme d'une expression littérale 71
 somme des angles d'un triangle 116
 sommet d'un angle 101
 sommet d'un polyèdre 144
 sommet d'un polygone 110
 soustraction 23
 soustraction de fractions 30
 soustraction de monômes semblables 69
 soustraction de nombres décimaux 23
 soustraction de nombres relatifs 18
 soustraction de polynômes 71
 sphère 150
 sphère (aire) 167
 statistique (série) 38
 stratégie 183
 substitution (résolution d'équation) 79
 surface 163-167

symétrie axiale	130, 131	trapèze (propriétés)	123, 125
symétrie axiale (propriétés)	140	trapèze isocèle (propriétés)	123, 125
symétrie centrale (propriétés)	140	trapèze rectangle (propriétés)	124, 125
symétrie centrale	132, 133	triangle (aire)	165
système (sexagésimal)	161	triangle (classement)	115
système d'équation (résolution)	79, 80	triangle équilatéral	114, 115
système de deux équations du premier degré à deux inconnues	78-80	triangle isocèle	114, 115
système décimal	11	triangle isocèle rectangle	115
système métrique	156-158	triangle rectangle	114, 115
		triangle rectangle (vocabulaire)	173
		triangles	114-121
		triangles isométriques	120
		triangles particuliers	114
		triangles semblables	121
		troncature	22
T		U	
tableau de proportionnalité	55, 56	unité d'aire (convention)	158
tableau de valeurs	47	unités de capacité (et de volume)	158, 159
tangente	100, 101	unités de masse	160
tâtonnement réfléchi	185	unités d'aire	157, 158
temps (unité)	161, 162	unités de longueur	156
tera (billion)	33	unités de longueur (conversion)	156
termes	22, 23	unités de mesure	156
tétraèdre régulier	148	unités de temps	161, 162
Thalès (cercle)	109	unités de temps (conversion)	161, 162
Thalès (théorème)	175	unités de volume	
théorème de Pythagore	173-175	unités de volume (et de capacité)	158, 159
théorème de Thalès	175	unités de volume, unité de capacité (conversion)	160
théorèmes	173-176	V	
tonne (t)	160	valeur approchée	22
tout (proportionnalité)	58	variable	67
tracer la droite parallèle à une droite donnée passant par un point	95	vecteur	128
tracer la droite perpendiculaire à une droite passant par un point donné	95	vérification et preuves	189, 190
tracer la médiatrice d'un segment	97	Viète (formule)	81
tracer une hauteur d'un triangle avec une équerre	118	vitesse	61
transformation du plan	126	volume (conversion)	159
transformation du plan (propriétés)	126-127	volume (unité)	158
transformations	126-141	volume d'un solide	169-172
translation	129-130	volume des solides usuels	170, 171
translation (propriétés)	140		
trapèze (aire)	167		





ISBN 978-2-606-01711-8 | 936012A1



9 782606 017118

N° Cataro 022508-2019