

Aide-mémoire

Mathématiques

9-10-11

Savoirs, savoir-faire et stratégies



CONFÉRENCE INTERCANTONALE
DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DE
LA SUISSE ROMANDE ET DU TESSIN

Impressum : *Aide-mémoire Mathématiques 9–10–11*

Édition 2024

Pour la partie Recherche et stratégies (RS) de cette nouvelle édition, nous remercions pour leur engagement :

Rédaction Ivan Corminboeuf

Appui didactique et scientifique Michel Mante, Sylvie Coppé

Coordination Yolande Berga

Administration et relecture Karin Seiler, Myriam Hulmann

Sous-groupe COPED Viridiana Marc, Alain Ramelet, David Rey, Samuel Rohrbach, François Sulliger

Pour les savoirs et savoir-faire en lien avec les axes thématiques, nous remercions les personnes ayant participé à l'édition 2019 de l'*Aide-mémoire 9-10-11*, dont la majorité des contenus a été reprise pour cette nouvelle édition.

Rédaction Ivan Corminboeuf, Michel Mante, Hervé Schild

Expertise externe Michel Brêchet

Sous-groupe COPED Silvia Fankhauser, Alain Ramelet, François Sulliger

Coordination Raymond Clavel, Alain Emery

Nous remercions également les commissions et conférences intercantionales impliquées, ainsi que les cantons de Berne, Fribourg, Genève, Jura, Neuchâtel, Valais et Vaud.

Pour faciliter la lecture du document, le masculin générique est utilisé pour désigner les personnes des deux sexes. Lorsqu'une distinction est faite, il s'agit d'une nuance entre les hommes et les femmes qui se doit d'être mise en évidence.

Les moyens d'enseignement de la CIIP sont imprimés pour l'ensemble des élèves de la scolarité obligatoire des cantons romands. Pour des raisons économiques les différents ouvrages, et en particulier les livres de l'élève, sont imprimés pour plusieurs années. Ainsi, il est possible qu'un temps de latence plus ou moins important existe entre le moment où une décision est prise (par exemple, reconnaissance d'un État), où une erreur est constatée, et celui où la modification qui en découle est prise en considération dans les moyens d'enseignement romands.

Illustrations Louiza Becquelin, Lausanne : 50, 52, 68 ; Yuri Coles, Genève : 29, 84m, 85m, 178m

Conception graphique Design NG Tornay

Impression PCL Presses Centrales SA, Renens

Réalisation UMER-SO – Unité des moyens d'enseignement romands pour la scolarité obligatoire

Crédits © David Bellot, svg-cards.sourceforge.net : 53, © Editions LEP, Objectif Vie, Le Mont-sur-Lausanne : 73d,

© Office fédéral de topographie swisstopo (BA110186) : 73g

ISBN 978-2-88500-469-4

CATARO 022860

Édition 1 (2024)

Copyright

Neuchâtel, 2024, © CIIP, Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin
Faubourg de l'Hôpital 68, case postale 556
2002 Neuchâtel
www.ciip.ch

Tous droits réservés pour tous les pays

Préambule

Ton *Aide-mémoire* présente les termes, définitions, notations et notions théoriques ainsi qu'un certain nombre de savoir-faire abordés dans la collection *Mathématiques 9-10-11*.

C'est un ouvrage de référence auquel tu peux accéder, lorsque tu en éprouves le besoin. C'est par exemple le cas :

- pour te remémorer une définition ou un savoir-faire ;
- lorsqu'un travail à effectuer nécessite de revenir sur un aspect théorique que tu n'as pas encore parfaitement assimilé ou un savoir-faire que tu ne maîtrises pas complètement.

Tu disposes d'un sommaire, d'une table des matières et d'un index alphabétique pour accéder plus facilement à l'information recherchée.

En utilisant les pages quadrillées prévues à cet effet, tu peux enrichir ton *Aide-mémoire* notamment avec des explications complémentaires, des exemples ou des remarques.

Les rédacteurs

Dans cette partie, tu trouves l'ensemble des conventions et notations utilisées dans les ouvrages de *Mathématiques 9-10-11*.

Pages 200 à 202

Aide mémoire | Conventions et notations

169

Conventions et notations

Objet, notion, propriété	Notations, conventions et commentaires
Qui est proche de ...	$\approx$
Inférieur à... (plus petit que...)	$<$
Supérieur à... (plus grand que...)	$>$
Inférieur ou égal à...	$\leq$
Supérieur ou égal à...	$\geq$
Couple de nombres	$(a ; b)$
Ensemble	$\{a ; b ; \dots\}$
Ensemble vide	$\emptyset$ ou $\{\}$
Ensemble de solution	$S = \{x_1 ; x_2 ; \dots\}$
Est élément de... n'est pas élément de... ou Appartient à... n'appartient pas à...	$\in, \notin$
Ensembles de nombres	$\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels
Symboles représentant, numériquement partant : - « ce qu'il y a de plus grand » - « ce qu'il y a de plus petit »	$\sup$ $\inf$
Opposé d'un nombre x	$-x$
Inverse d'un nombre x ($x \neq 0$)	x^{-1} ou $\frac{1}{x}$
Pourcent	%
Pour-mille	‰
Fonction On trouve aussi les notations :	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = \dots$ $x \longmapsto \overline{f(x)} = \dots$

Conventions et notations

Pages 195 à 197

[illegible]Pages 203 à 207

Aide-mémoire | Conventions et notations 15

Objet, notation, propriété	Notations, conversions et commentaires
Sécantes 	Deux droites d et d' possédant un seul point d'intersection A
Concourantes 	plusieurs droites d , d' et d'' possédant un seul point d'intersection A
Parallèles 	les droites e et f sont parallèles
Perpendiculaires 	sur ce schéma, l'angle droit formé par les droites e et f est noté à l'aide du signe $\perp$, parfois, il est signalé à l'aide des symboles f_1 ou f_2 , a , b et c
Isométries appliquées à une figure f	transformation $f = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ symétrie axiale $f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ rotation $f = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ symétrie centrale $f = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
Homothétie	homothétie $f = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Composition de transformations	la composition des transformations f et g peut être notée, $g \circ f$, on commencera par la transformation f , puis la transformation g

Alphabet grec

Majuscules	Minuscules	En français	Majuscules	Minuscules	En français
α	α	alpha	ν	ν	nu
β	β	beta	ξ	ξ	xi
γ	γ	gamma	$\omicron$	$\omicron$	omacron
δ	δ	delta	π	π	pi
ϵ	ϵ	epsilon	ρ	ρ	rho
ζ	ζ	zeta	σ	σ	sigma
η	η	eta	τ	τ	tau
θ	θ	theta	υ	υ	upsilon
ι	ι	iota	ϕ	ϕ	phi
κ	κ	kappa	χ	χ	chi
λ	λ	lambda	ψ	ψ	psi
μ	μ	mu	ω	ω	omega

Repères graphiques

Savoirs

Dans ces rubriques, tu trouves notamment, les définitions, les propriétés et les théorèmes relatifs aux notions étudiées. Ils sont accompagnés de remarques, d'exemples et d'illustrations. Chaque rubrique est précédée d'un disque blanc que tu peux cocher ✓ lorsque celle-ci a été abordée.

Savoir-faire

Dans cette partie, tu trouves la description détaillée de méthodes liées à la rubrique. La première colonne décrit les différentes étapes à effectuer pour appliquer la méthode; la deuxième, sur la base d'un exemple donné, illustre concrètement chaque étape.

Définitions, propriétés, théorèmes

Tu repères ces parties par leur encadré en couleur.

Étymologie

Introduits par le symbole **ÉTYM**, l'étymologie te renseigne sur l'origine de certains mots afin d'en comprendre le sens et de faciliter leur mémorisation.

Renvois

Introduits par le symbole **→**, les renvois t'indiquent le numéro de page de notions citées dans la rubrique.

Mises en garde

Introduits par le symbole **⚠**, ces commentaires supplémentaires t'informent d'éléments particuliers auxquels il faut être attentif ou te signalent quelques obstacles classiques.

Schémas

Ces illustrations te permettent de visualiser la description d'un objet mathématique.

170

Grandeurs et mesures | Aide-mémoire

Unités de mesure

Unités de longueur

Définitions

- Dans le système métrique, le **mètre (m)** est l'unité principale de mesure des longueurs.
- On utilise aussi des multiples du mètre : décamètre (dam), hectomètre (hm), kilomètre (km) ainsi que des sous-multiples : décimètre (dm), centimètre (cm), millimètre (mm).

Exemples

- 1 dm = 10 cm = 100 mm
- 1 km = 1000 m ; 100 cm = 1 m ; 0,1 m = 1 dm

Remarque

Il existe d'autres unités de longueur que celles du système métrique.

Exemples

Le pouce : 2,54 cm ; le pied : 0,3048 m ; le mille marin : 1852 m ; l'année-lumière : $\sim 10^{13}$ km

→ Puissance de dix (p. 33)

Convertir les unités de longueur

Méthode 1

En utilisant les relations entre les différentes unités.

Exemple Exprimer 1528,9 m en km.

Il y a trois unités pour passer des mètres aux kilomètres (dam, hm, km). On déplace donc la virgule de trois rangs vers la gauche.

Ou 1 km = 1000 m ; on divise donc 1528,9 par 1000.

1528,9 m = 1,5289 km

Méthode 2

En utilisant un tableau de conversion.

Exemples Exprimer 1528,9 m en km, 12 mm en m et 2,5 hm en m.

1528,9 m en km :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1	5	2	8	9		

1528,9 m = 1,5289 km

12 mm en m :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
						12

12 mm = 0,012 m

Aide-mémoire | Espace

131

Cercle inscrit dans un triangle et bissectrices

Définition

Le cercle inscrit dans un triangle est le cercle tangent aux trois côtés de ce triangle.

Exemple

c est le cercle inscrit dans un triangle ABC. Les trois côtés du triangle sont tangents à ce cercle.

Propriété

Les **bissectrices** des angles d'un triangle se coupent en un point. Ce point est le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

Exemple

O est le centre du cercle inscrit dans un triangle ABC.

ES

ES

Inscrit : du latin in, à l'intérieur et scribe, écrire.

→ Tangente à un cercle (p. 100), Bissectrice d'un angle (p. 105)

Hauteurs d'un triangle et orthocentre

Définition

Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

⚠ Les hauteurs peuvent être à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.

Exemples

- La droite AH est la hauteur issue de A du triangle ABC.
- La droite DH est la hauteur issue de D du triangle DEF.

Extraits du Plan d'études romand

Visées prioritaires MSN

Se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux *Mathématiques* et aux *Sciences de la nature* dans les champs des phénomènes naturels et techniques, du vivant et de l'environnement, ainsi que des nombres et de l'espace.

Mathématiques et Sciences de la nature (MSN)

Nombres et opérations

Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres réels

Résoudre des problèmes numériques

Résolution de problèmes numériques en lien avec les ensembles de nombres travaillés, l'écriture de ces nombres et les opérations étudiées.

Fonctions et algèbre

Résoudre des problèmes numériques et algébriques

Résolution de problèmes en lien avec les notions étudiées (fonctions, diagrammes, expressions algébriques et équations).

Résolution de problèmes de proportionnalité.



Espace

Poser et résoudre des problèmes pour modéliser le plan et l'espace

Résolution de problèmes géométriques en lien avec les figures et les transformations étudiées.

Grandeurs et mesures

Mobiliser la mesure pour comparer des grandeurs

Résolution de problèmes de mesurage en lien avec les grandeurs et les théorèmes étudiés.

Sommaire

Recherche et stratégies – RS 9

Résolution de problèmes	10
Des stratégies de résolution de problèmes	10
Des outils pour chercher	14
Preuve	16
Vérification	18

RS

Nombres et opérations – NO 23

Généralités	24
Ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$	26
Ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$	31
Ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$	35
Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$	41
Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$	46
Puissances	46
Racines	50
Probabilités	52

NO

FA

Fonctions et algèbre – FA 59

Fonctions	60
Proportionnalité	69
Diagrammes	78
Calcul littéral	81
Équations	90

ES

Espace – ES 103

Figures géométriques planes	104
Transformations géométriques	140
Géométrie dans l'espace	156

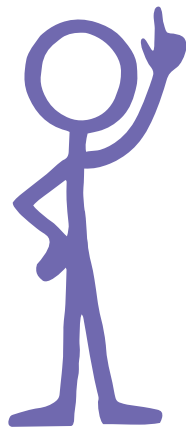
Grandeurs et mesures – GM 169

Unités de mesure	170
Périmètre d'une surface	177
Aire d'une surface	179
Volume d'un solide	183
Théorèmes	187

GM

Recherche et stratégies

- Résolution de problèmes
- Des stratégies de résolution de problèmes
- Des outils pour chercher
- Preuve
- Vérification



Résolution de problèmes

Problème

RS

Définition

Faire des mathématiques, c'est poser et résoudre des **problèmes**. C'est pour cela que les problèmes sont présents dans tous les axes thématiques et dans la partie « Recherche et stratégies »

ÉTYM **Problème** : du grec *problēma*, ce que l'on a devant soi, obstacle, tâche, sujet de controverse, problème.

Des **stratégies** de recherche permettent de résoudre certains problèmes. Trois d'entre elles sont plus particulièrement étudiées au secondaire 1 :

- Essais et ajustements
- Étude systématique des cas
- Essais, conjecture, preuve

D'autre part, certains **outils pour chercher** peuvent faciliter la découverte de la solution de problèmes. Nous en étudions deux :

- Réaliser un schéma, un croquis, un tableau
- Se questionner et s'organiser

Des stratégies de résolution de problèmes

Essais et ajustements

Définition

Stratégie consistant à rechercher la solution d'un problème en faisant différents essais en tenant compte chaque fois des résultats des essais précédents. Le premier essai ne se fait pas totalement au hasard, mais en prenant en compte les données du problème.

Exemple

Léa et Lucas collectionnent les images de leurs footballeurs préférés. Ils ont au total 134 images. Léa a 20 photos de plus que Lucas. Combien Lucas a-t-il d'images ?

Pour résoudre ce problème, on peut procéder en utilisant le tâtonnement réfléchi.

Essais	Nombre d'images de Lucas	Nombre d'images de Léa (Léa a 20 images de plus que Lucas)	Total	Conclusion
1 ^{er} essai	50	70	120	Il faut augmenter le nombre d'images de Lucas.
2 ^e essai	70	90	160	Il faut diminuer le nombre d'images de Lucas.
3 ^e essai	60	80	140	Il faut diminuer le nombre d'images de Lucas.
4 ^e essai	57	77	134	Lucas a 57 images.

Étude systématique de cas

Définition

Stratégie permettant de résoudre des problèmes qui ont un nombre fini de solutions. Elle consiste à lister l'ensemble de ces solutions. L'utilisation d'un arbre de choix ou d'un tableau peut faciliter ce travail.

Pour certains problèmes, il est nécessaire de passer par un ensemble de solutions possibles. Il faut alors tester chacune d'elles de façon à savoir si elle est solution ou non. Pour cela on utilise souvent le raisonnement par l'absurde. Le raisonnement par l'absurde consiste à prouver qu'une proposition est vraie en montrant que son contraire est faux.

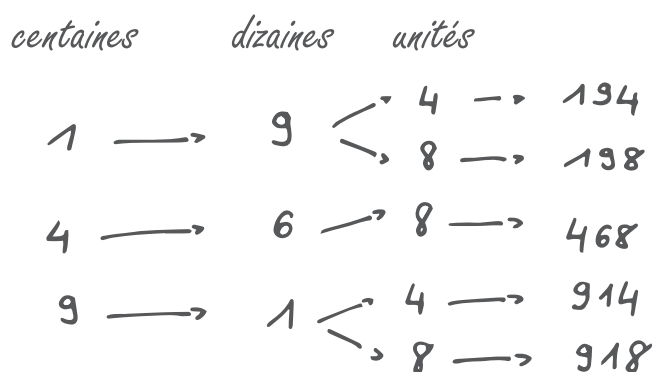
RS

Exemple 1

Un nombre entier est formé de trois chiffres non nuls et tous différents. Le chiffre des unités est un multiple de 4, le chiffre des centaines est un carré parfait et la somme des chiffres des centaines et des dizaines est égale à 10. Quels sont les nombres solution ?

Le chiffre des centaines peut être égal à 1 ; 4 ou 9. Connaissant le chiffre des centaines, on trouve le chiffre des dizaines. Le chiffre des unités peut être égal à 4 ou 8.

Un arbre de choix permet de lister toutes les solutions.



Les nombres solution sont donc 194 ; 198 ; 468 ; 914 ; 918.

Exemple 2

La somme d'un multiple de 3 et d'un multiple de 11 est égal à 25. Trouve toutes les solutions.

Les multiples de 11 possibles sont 0, 11 et 22.

On va tester chacun de ces multiples pour savoir s'il est solution. Pour cela, on utilise **le raisonnement par l'absurde** :

- Si le multiple de 11 est 0, alors le multiple de 3 est égal à $25 - 0 = 25$, ce qui est absurde, car 25 n'est pas un multiple de 3. Donc le multiple de 11 ne peut pas être 0.
- Si le multiple de 11 est 11, alors le multiple de 3 est égal à $25 - 11 = 14$, ce qui est absurde, car 14 n'est pas un multiple de 3. Donc le multiple de 11 ne peut pas être 11.
- Si le multiple de 11 est 22, alors le multiple de 3 est égal à $25 - 22 = 3$. 3 est bien un multiple de 3, donc 22 est une solution.

On obtient par conséquent une solution : 3 et 22

Remarque

Il est souvent important de réduire au maximum le nombre de solutions possibles. Par exemple ici, il vaut mieux partir des multiples de 11 que des multiples de 3 qui sont bien plus nombreux.

Essais, conjecture, preuve

Définitions

Stratégie consistant à faire des essais, à les organiser afin d'émettre une conjecture puis à la tester. En cas d'échec, il faut émettre une autre conjecture et en cas de réussite, il faut prouver que la conjecture est vraie pour tous les cas.

Une conjecture est une affirmation mathématique qui semble vraie, mais qui n'a pas encore été prouvée.

RS

Exemple

La conjecture de Goldbach (mathématicien et historien prussien, 1690-1764) qui affirme que « Tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers » est une conjecture célèbre pour laquelle on n'est pas parvenu, à l'heure actuelle, à démontrer si elle est vraie ou fausse.

Remarque

En mathématiques, on emploie le terme conjecture, alors qu'en sciences, on utilise le terme hypothèse (faire une hypothèse).

Exemple

Anton propose le programme de calcul suivant :

Je pense à un nombre.

Je lui ajoute 7.

Je multiplie le tout par 3.

J'ajoute ensuite le nombre de départ.

J'enlève 21.

Apolline dit qu'elle sait trouver le nombre obtenu en faisant une seule opération.

Comment peut-elle procéder ?

On fait des essais que l'on organise. Remarque : Pour certains problèmes, il peut être utile de rassembler ces essais dans un tableau.	Si l'on choisit 1, on obtient 4 Si l'on choisit 10, on obtient 40 Si l'on choisit 4,5 on obtient 18 Si l'on choisit -5 on obtient -20
On émet une conjecture. À noter que l'on peut parfois émettre plusieurs conjectures.	Le nombre obtenu est égal à 4 fois le nombre de départ. Donc Apolline peut multiplier le nombre de départ par 4 pour trouver directement le résultat du programme de calcul.
On teste cette conjecture.	Si l'on choisit 25 (par exemple) on obtient 100. C'est bien 4 fois le nombre de départ
On prouve la conjecture.	En appelant x le nombre de départ. Le programme de calcul se traduit par une expression littérale $(x + 7) \cdot 3 + x - 21$ On transforme cette expression littérale en utilisant la distributivité de la multiplication sur l'addition. On obtient alors $3x + 21 + x - 21 = 4x$ On a prouvé que la conjecture est vraie pour tous les nombres.

Des outils pour chercher

Schéma, croquis, tableau

RS

Définition

Un schéma et un tableau sont utilisés pour organiser les informations d'un énoncé, pour les mettre en relation et en faciliter le traitement.

Le croquis est un schéma particulier utilisé en géométrie. Il s'agit d'une représentation faite à main levée, sans recherche de détails. Il ne respecte pas nécessairement les mesures, mais contient des informations (cotes, symboles, explications complémentaires) qui permettent de représenter la situation et qui peuvent faciliter la résolution du problème.

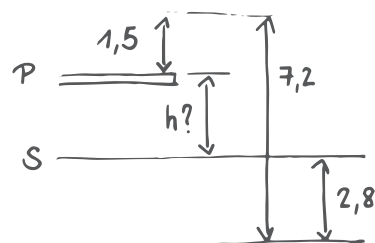
L'arbre de choix est un autre type de schéma qui permet de déterminer tous les cas possibles ou leur nombre.

Exemples

- On a utilisé un schéma appelé arbre de choix pour résoudre l'exemple 1 de la rubrique « Étude systématique de cas » (p. 11)
- On a utilisé un tableau pour résoudre l'exemple de la rubrique « Essais et ajustements » (pp. 10-11).
- Pour effectuer une figure acrobatique, Léo saute du plongoir de la piscine municipale. Il s'élève de 1,5 m en l'air, puis descend de 7,2 m et remonte de 2,8 m pour atteindre la surface de l'eau. À quelle hauteur au-dessus de l'eau se trouve le plongoir ?

À partir de cet énoncé, on peut construire le schéma ci-contre qui nous aide à mettre en relation les informations de l'énoncé et à trouver les étapes de résolution.

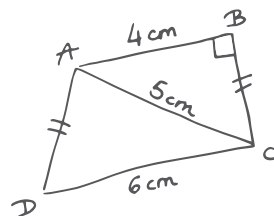
Solution : en m, $h = 7,2 - 2,8 - 1,5 = 2,9$



- Construis un quadrilatère ABCD tel que $AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 5 \text{ cm}$, $DC = 6 \text{ cm}$, $AD = BC$ et $\widehat{ABC}$ est un angle droit.

Faire un croquis est indispensable pour trouver les étapes de construction.

On constate que sur ce croquis, on n'a pas respecté les dimensions des côtés et des angles. En revanche, on a noté les longueurs des segments, codé l'angle droit et les segments de même longueur.



Ce croquis permet de trouver les étapes possibles de la construction de la figure :

on commence par tracer le segment AB, puis la perpendiculaire au segment AB qui passe par B, puis le segment AC. Ensuite, on place le point D et on trace les segments AD et DC.

Se questionner et s'organiser pour résoudre des problèmes

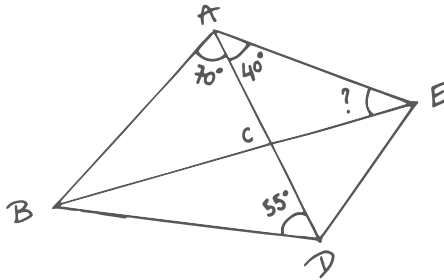
La résolution de certains problèmes consiste à enchaîner un certain nombre de savoirs et savoir-faire. Lorsque l'on est bloqué face à ces problèmes, on peut se poser les questions suivantes :

- Quelles conséquences puis-je tirer des données ? Et avec ces conséquences, quelles nouvelles conséquences je peux tirer ? ...
 - Qu'est-ce qu'il faudrait connaître pour répondre à la question ?
- Pour certains problèmes, on peut se référer à une liste de méthodes. C'est le cas pour les problèmes de calcul de longueurs, de calcul d'aires, de calcul de volumes, de calcul d'angles, ou pour ceux qui consistent à démontrer que deux droites sont parallèles, perpendiculaires, etc.

RS

Exemple

En utilisant les informations portées sur le dessin et le fait que $AE = AD$, calculer l'angle AEC .



Quelles conséquences peut-on tirer des données ?	• Dans le triangle ADB on peut calculer l'angle ABD. • $AE = AD$, donc le triangle ADE est isocèle.
Quelles conséquences peut-on maintenant tirer de ces informations et éventuellement des autres informations de l'énoncé ?	• On peut calculer les angles ADE et AED, car le triangle ADE est isocèle et on connaît un de ses angles. • On peut calculer l'angle BDE • On constate que les angles ABD et ADB sont égaux, donc le triangle ABD est isocèle.
...	...

Ce type de questionnement ne permet pas toujours d'arriver à la solution du problème. Dans ce cas, on peut passer au 2^e type de questionnement.

Quelles sont les méthodes que je connais pour répondre à la question ?

C'est-à-dire, ici, quelles sont les méthodes que je connais pour calculer un angle ? Quelles sont les conditions d'utilisation de ces méthodes ?

Utiliser la propriété de la somme des angles d'un triangle. Cela suppose que l'on dispose d'un triangle dont un angle est l'angle cherché et que l'on connaisse la mesure des deux autres angles de ce triangle.

L'angle cherché AEC fait partie des triangles AEC et AEB. Mais pour chacun d'eux, on ne connaît qu'un angle et il ne semble pas facile de calculer la mesure d'un autre angle de ces triangles.

Utiliser la propriété de la somme des angles d'un triangle isocèle. Cela suppose que l'on dispose d'un triangle isocèle dont un angle est l'angle cherché et que l'on connaisse la mesure d'un de ses angles. Le triangle ABE semble isocèle et on connaît la mesure de l'angle BAE.

Mais il faut démontrer que ce triangle est isocèle.

Quelles méthodes pour démontrer qu'un triangle est isocèle ? ...

...

Preuve

Règles du débat mathématique

Définitions

En mathématiques, pour prouver qu'une affirmation est vraie, on s'appuie sur un certain nombre de règles appelées **règles du débat mathématique**. Voici les principales :

- Une affirmation est soit vraie, soit fausse ; il n'y a pas d'exception.
- Des exemples, même nombreux, qui vérifient une affirmation ne suffisent pas à prouver que cette affirmation est vraie.
- Un contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse.
- Une mesure sur un dessin ou une constatation « à vue d'œil » ne suffisent pas à prouver qu'une affirmation géométrique est vraie ou fausse.

Un contre-exemple est un exemple qui contredit une affirmation. Il suffit d'un seul contre-exemple pour déclarer fausse une affirmation universelle (du type tous les nombres, quel que soit ...).

Exemple

« Tous les nombres pairs sont des multiples de 4 » est une affirmation fausse car, par exemple, 6 est un nombre pair, mais n'est pas un multiple de 4. Le nombre 6 est un contre-exemple de l'affirmation citée.

→ Multiple, diviseur (p. 26), Nombre premier (p. 27)

Si... alors...

Définitions

On utilise souvent, en mathématiques, des affirmations sous la forme «si... alors...».

- L'expression qui vient juste après «**si**» est appelée **condition** et l'expression qui suit «**alors**» est appelée **conclusion**.
- On obtient la **réciproque d'une telle affirmation** en inversant condition et conclusion ; la réciproque d'un énoncé vrai n'est pas toujours vraie.

RS

Exemples

Affirmation 1	Réciproque 1 – vraie
<i>Si un triangle possède trois côtés isométriques, alors il possède trois angles isométriques.</i>	<i>Si un triangle possède trois angles isométriques, alors il possède trois côtés isométriques.</i>
Affirmation 2	Réciproque 2 – vraie
<i>Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.</i>	<i>Si, dans un triangle, le carré de la mesure du plus long côté est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.</i>
Affirmation 3	Réciproque 3 – fausse
<i>Si un nombre entier se termine par 2, alors il est divisible par 2.</i>	<i>Si un nombre entier est divisible par 2, alors il se termine par 2.</i>

→ Critères de divisibilité (p. 27), Triangles isométriques (p. 134) Triangle rectangle et vocabulaire (p. 187)

Prouver qu'une affirmation mathématique est fausse

Pour prouver qu'une affirmation mathématique est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.

Exemple

L'affirmation mathématique suivante est-elle vraie ou fausse ? « Quel que soit le nombre entier, s'il est divisible par 2, alors il se termine par 2. »

Cette affirmation est fausse car, par exemple, 14 est divisible par 2 et pourtant il ne se termine pas par 2. Ainsi 14 est un contre-exemple de l'affirmation ci-dessus.

Prouver qu'une affirmation mathématique est vraie

Pour prouver qu'une affirmation mathématique est vraie, il faut utiliser des propriétés.

Exemple

L'affirmation mathématique suivante est-elle vraie ou fausse ?

«Le triangle ABC tel que $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 5$ cm est un triangle rectangle.»

Le fait de dessiner le triangle et d'utiliser l'équerre pour vérifier qu'il possède un angle droit ne permet pas de prouver que ABC est un triangle rectangle, d'après la 4^e règle du débat mathématique ci-dessus.

Par contre, la réciproque du théorème de Pythagore permet de prouver que cette affirmation est vraie :

En effet, $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ et $BC^2 = 5^2 = 25$, donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

→ Théorème de Pythagore (p. 187)

RS

Vérification

Vérifier

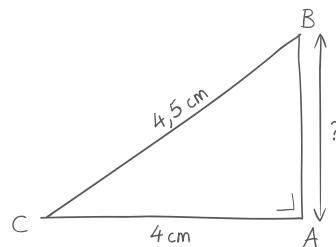
Une fois que l'on a trouvé la solution d'un problème, il est important, avant de la communiquer, de **vérifier** cette solution. Pour cela, on peut mettre en place les procédures suivantes.

- **S'assurer que la solution n'est pas en contradiction avec certaines données.**

Exemple 1

Calculer la longueur du segment AB dans la figure ci-contre.

Si l'on trouve que AB vaut ~ 6 cm, on peut vérifier que ce résultat est faux. En effet, on sait que dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté, donc $AB < BC$, ce qui n'est pas le cas avec le résultat trouvé.



Exemple 2

Dans un garage, il y a des motos et des voitures. En tout, il y a 9 véhicules et 22 roues. Combien y a-t-il de voitures ? Combien y a-t-il de motos ?

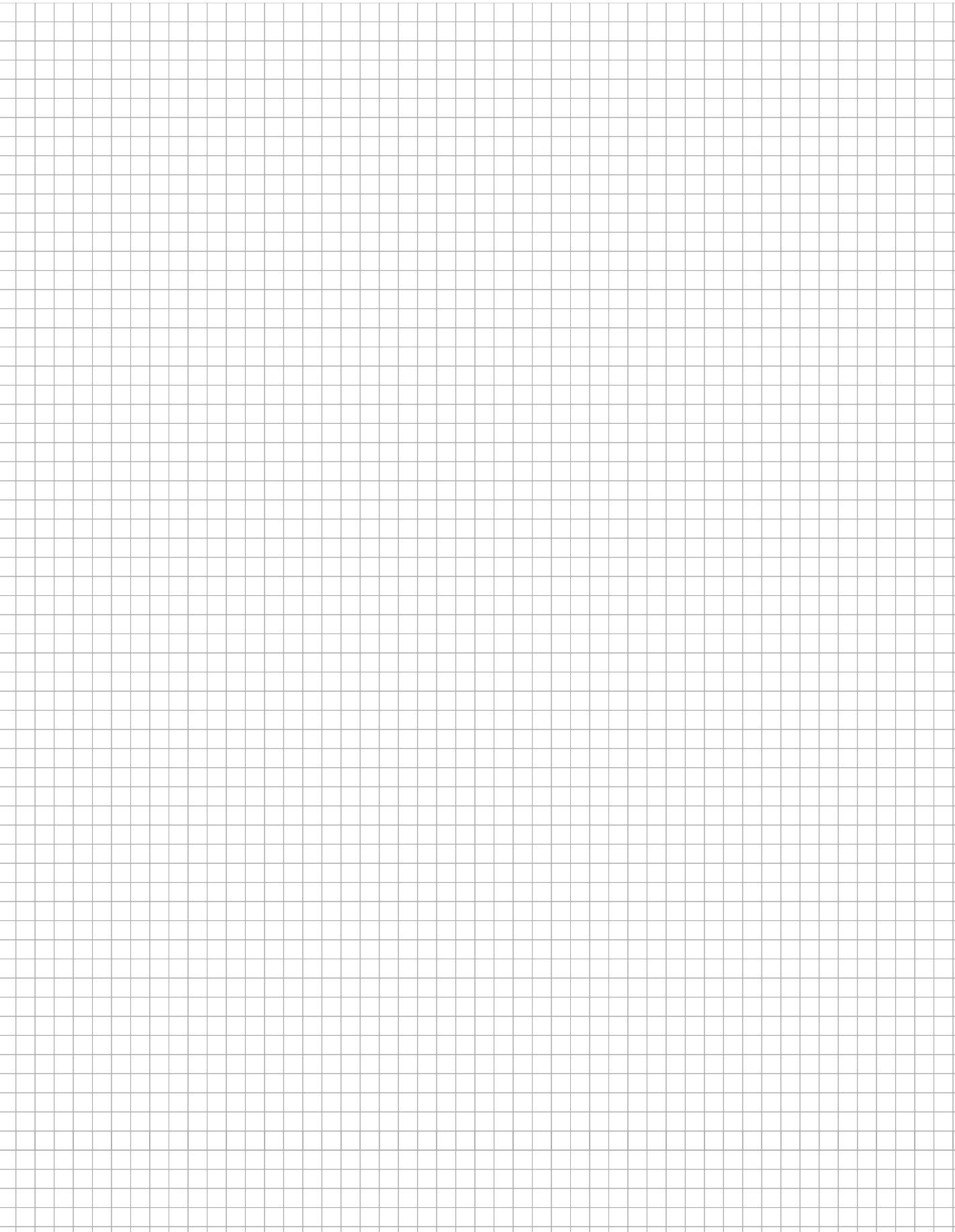
Si l'on trouve 3 voitures et 6 motos, on peut constater que cela donne bien 9 véhicules ($3 + 6$) mais que le nombre de roues ne convient pas, car $3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \neq 22$. Donc le résultat trouvé est faux.

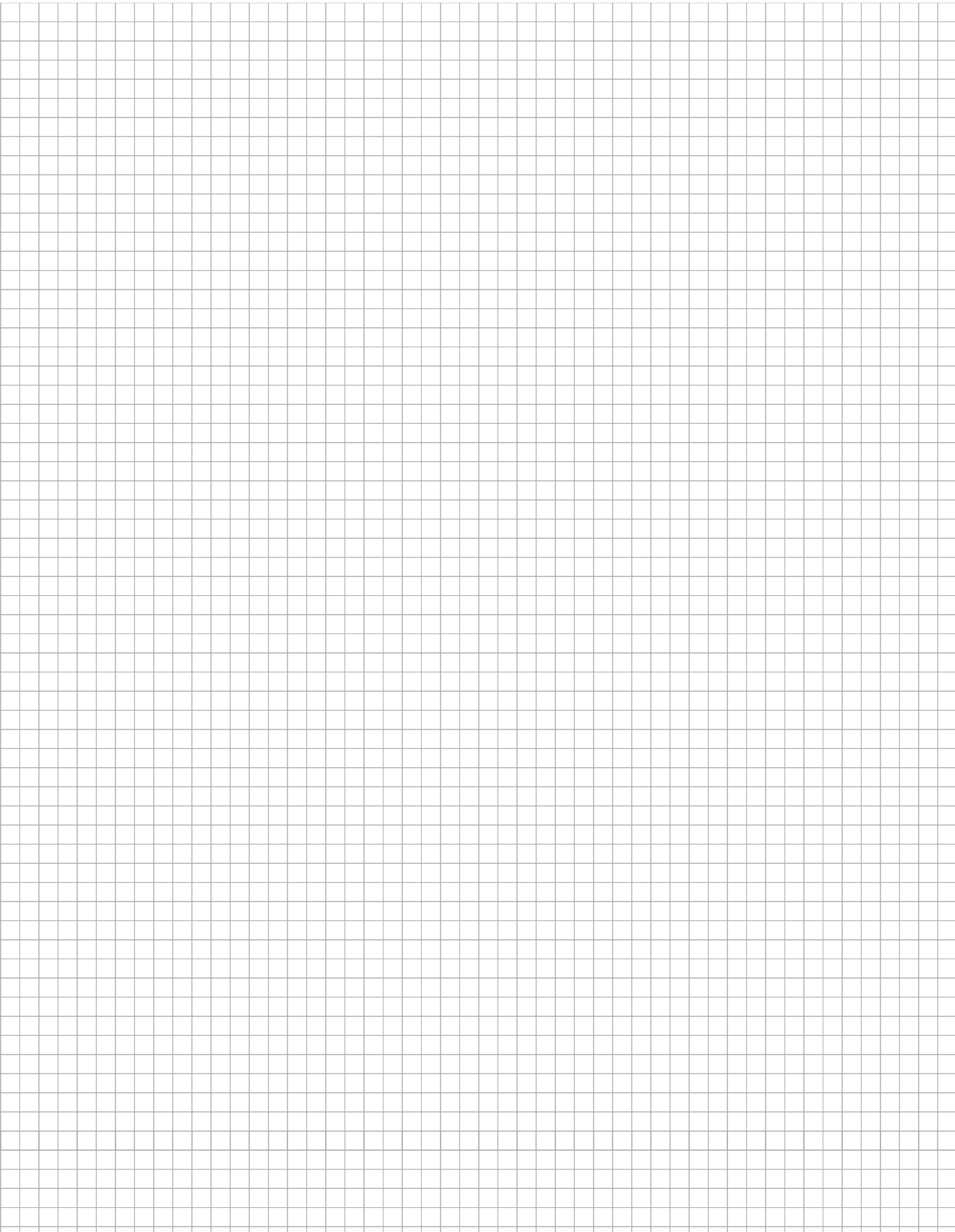
$$\underbrace{3 \cdot 4 + 6 \cdot 2}_{24} \neq 22$$

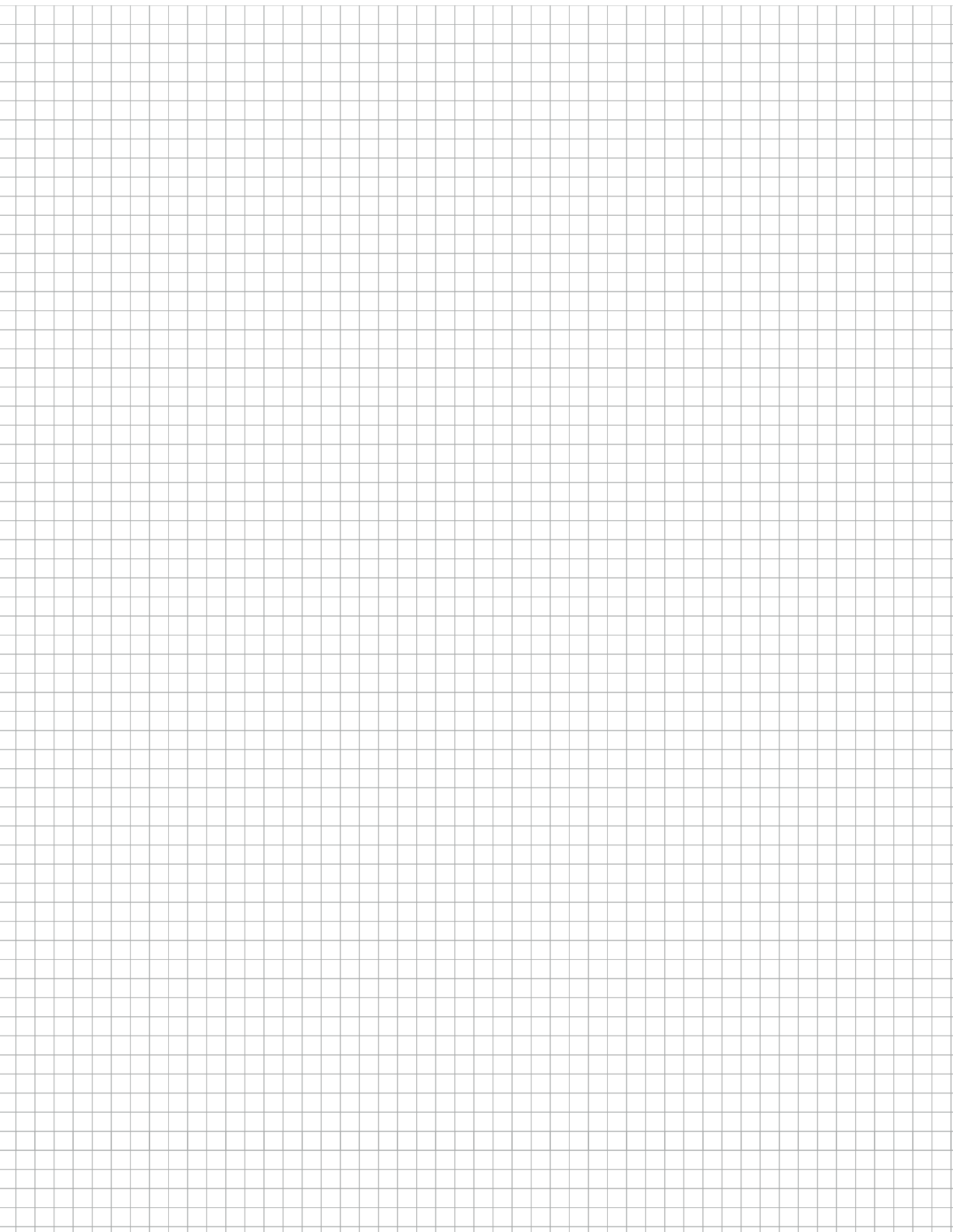
- **S'assurer, dans le cadre de problèmes concrets, que le résultat est réaliste.**

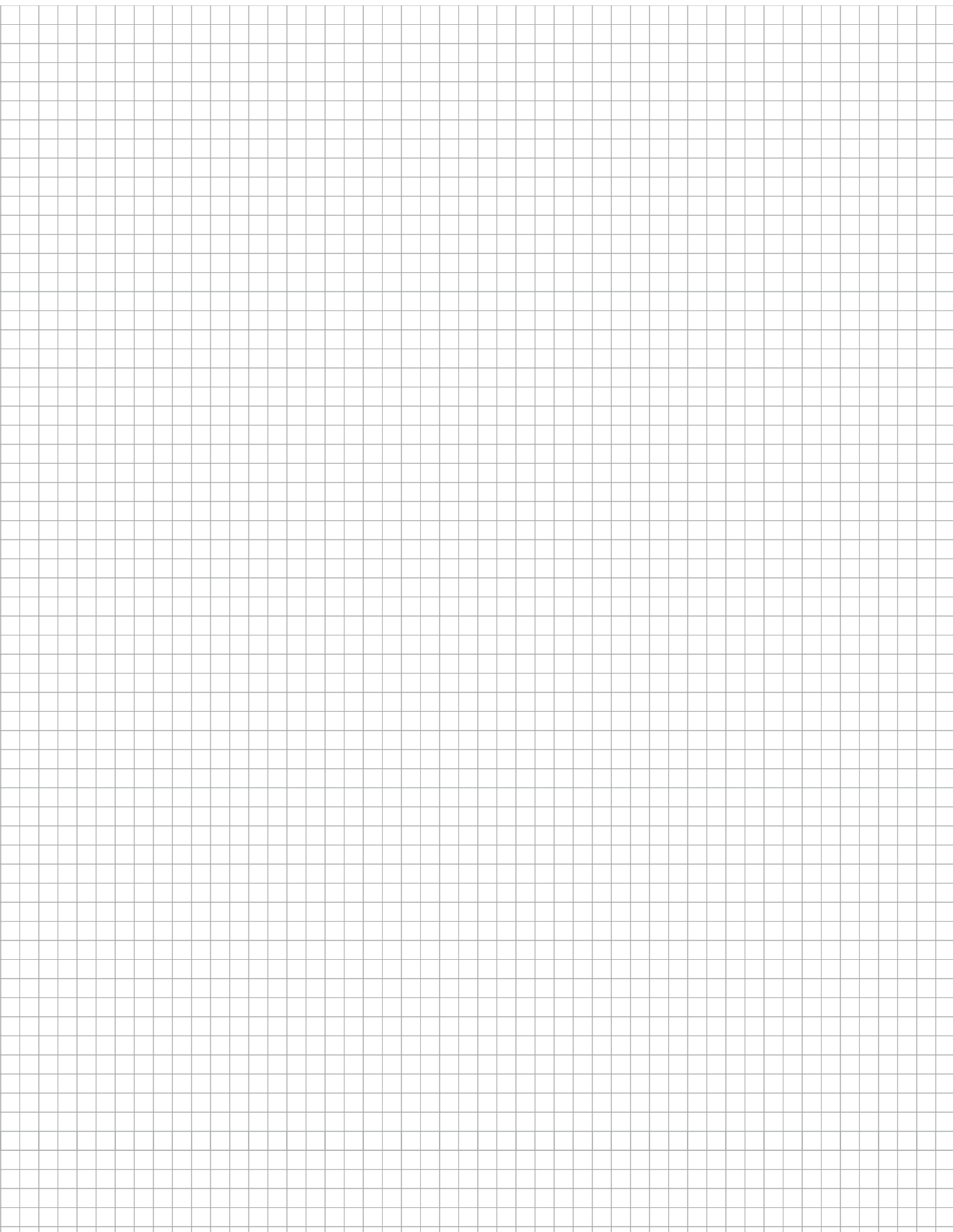
Exemple 3

Si, dans un problème, on demande de calculer la vitesse du piéton et que l'on trouve 75 km/h, on peut être sûr que le résultat est faux.



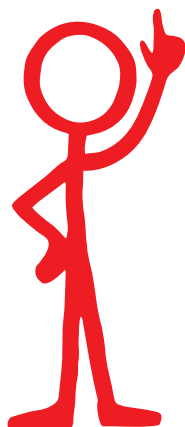






Nombres et opérations

- Généralités
- Ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$
- Ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$
- Ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$
- Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$
- Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$
- Puissances
- Racines
- Probabilités

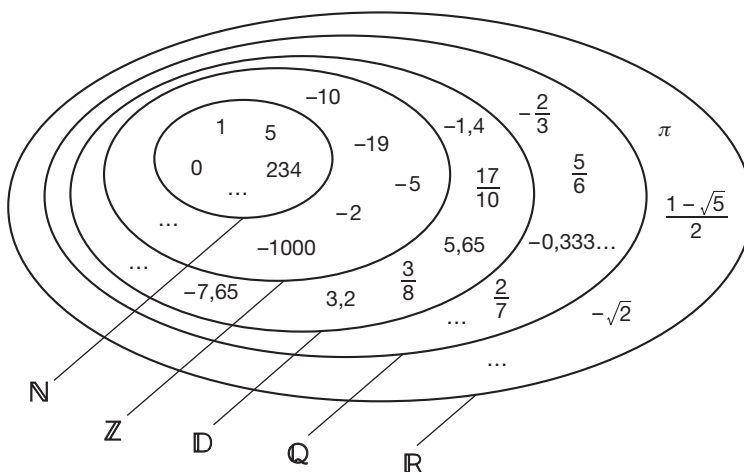


Généralités

Ensembles de nombres

Ensemble de nombres	Notation / Origine	Exemples	Représentation sur une droite
■ Nombres naturels ou entiers naturels → p. 26	$\mathbb{N}$ de l'italien <i>naturale</i>	$0; 1; 3; 5; 10; 16; \dots$	
■ Nombres entiers relatifs → p. 31	$\mathbb{Z}$ de l'allemand <i>Zahl</i> (nombre)	$\dots; -13; -2; 0; +1; +3; +4; +19; \dots$	
■ Nombres décimaux → p. 35	$\mathbb{D}$ du français <i>décimal</i>	$\dots; -7,65; -1,4; 0; 1; \frac{17}{10}; 3,2; 5,65; 18,421; \dots$	
■ Nombres rationnels → p. 41	$\mathbb{Q}$ de l'italien <i>quotiente</i>	$\dots; -10; -\frac{2}{3}; -0,2; 0; 1; \frac{5}{6}; 234; \dots$	
■ Nombres réels → p. 46	$\mathbb{R}$ de l'allemand <i>real</i>	$\dots; -19; -\frac{7}{3}; -2; -\sqrt{2}; 0; 1; \pi; \sqrt{20}; 20,4; \dots$	

Le schéma suivant montre toutes les inclusions entre ces ensembles de nombres.



Chiffres et nombres

Définitions

- Les **chiffres** sont des symboles servant à écrire les nombres dans un système de numération donné.
- Dans notre système de numération décimale, les dix chiffres sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Les **nombres** sont écrits à l'aide d'un ou de plusieurs chiffres.

Remarque

Suivant le contexte, un chiffre peut être aussi un nombre.

Exemple Lorsque l'on dit qu'il y a 5 personnes dans une salle, 5 est un nombre à un chiffre.

ETYM Chiffre : de l'arabe *sifr*, zéro.

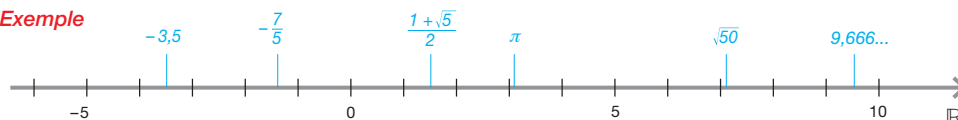
Nombre : du latin *numerus*, nombre, quantité.

Droite numérique

Définition

Une **droite numérique** est une droite possédant un sens (de gauche à droite ou de bas en haut), des graduations régulières et une origine. Chaque point est repéré par un nombre. Chaque nombre réel correspond à un point de cette droite.

Exemple



→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres réels (p. 46)

Ordre croissant et ordre décroissant

Définitions

- Ordonner des nombres en **ordre croissant** signifie qu'on les range du plus petit au plus grand. Pour cela, on utilise le signe $<$ qui signifie « plus petit que ».

Exemple $-1 < \frac{1}{2} < 2 < 5,04 < 12$

- Ordonner des nombres en **ordre décroissant** signifie qu'on les range du plus grand au plus petit. Pour cela, on utilise le signe $>$ qui signifie « plus grand que ».

Exemple $127,5 > 8 > 0,0058 > -\frac{3}{4} > -10$

Propriété

Le positionnement des nombres sur la droite numérique permet leur comparaison. Lorsque la droite est horizontale :

- un nombre est plus petit qu'un autre lorsqu'il est à sa gauche ;
- un nombre est plus grand qu'un autre lorsqu'il est à sa droite.

Exemple



Ordre croissant : $-6 < -2 < 0 < 1 < 7$

L'ensemble des diviseurs de 12: $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

Critères de divisibilité

Propriétés

Un nombre naturel est divisible par :

- 2 s'il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8 (on dit aussi que c'est un nombre pair) ;
- 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (notamment s'il se termine par 00) ;
- 5 s'il se termine par 0 ou 5 ;
- 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
- 10 s'il se termine par 0 ;
- 25 s'il se termine par 00 ; 25 ; 50 ou 75.

Exemples

1534 est divisible par 2 puisqu'il se termine par 4.

897 est divisible par 3 puisque la somme de ses chiffres est divisible par 3.

136 est divisible par 4 car 36 est divisible par 4.

10035 est divisible par 5 car il se termine par 5.

81 est divisible par 9 car la somme de ses chiffres est divisible par 9.

2550830 est divisible par 10 car il se termine par 0.

6975 est divisible par 25 puisqu'il se termine par 75.

NO

Nombre premier

Définition

Un nombre premier est un nombre naturel qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 sont des nombres premiers.

Remarques

- Il y a une infinité de nombres premiers.
- 1 n'est pas un nombre premier, car il n'a qu'un seul diviseur.
- 2 est l'unique nombre pair qui est premier.

Liste des nombres premiers inférieurs à 1000

2	101	211	307	401	503	601	701	809	907
3	103	223	311	409	509	607	709	811	911
5	107	227	313	419	521	613	719	821	919
7	109	229	317	421	523	617	727	823	929
11	113	233	331	431	541	619	733	827	937
13	127	239	337	433	547	631	739	829	941
17	131	241	347	439	557	641	743	839	947
19	137	251	349	443	563	643	751	853	953
23	139	257	353	449	569	647	757	857	967
29	149	263	359	457	571	653	761	859	971
31	151	269	367	461	577	659	769	863	977
37	157	271	373	463	587	661	773	877	983
41	163	277	379	467	593	673	787	881	991
43	167	281	383	479	599	677	797	883	997
47	173	283	389	487		683		887	
53	179	293	397	491		691			
59	181			499					
61	191								
67	193								
71	197								
73	199								
79									
83									
89									
97									

→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres naturels (p. 26), Multiple, diviseur (p. 26)

Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété

Tout nombre naturel se décompose de manière unique en un **produit de facteurs premiers**.

Exemples $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$ $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres naturels (p. 26)

Décomposer un nombre en un produit de facteurs premiers

Méthode 1

De proche en proche.

Exemple Décomposer 72 et 150 en un produit de facteurs premiers.

ÉTAPE 1 Décomposer le nombre en un produit de deux facteurs qui ne sont pas forcément des nombres premiers.	$72 = 8 \cdot 9$ $150 = 15 \cdot 10$
ÉTAPE 2 Décomposer chacun des facteurs en un produit de facteurs.	$72 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$ $150 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$
ÉTAPE 3 S'arrêter lorsque tous les facteurs de la décomposition sont des nombres premiers.	$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
ÉTAPE 4 Recourir (si nécessaire) aux puissances pour écrire le résultat.	$72 = 2^3 \cdot 3^2$ $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Méthode 2

En divisant par des nombres premiers.

Exemple Décomposer 504 en un produit de facteurs premiers.

ÉTAPE 1 Chercher un nombre premier qui est un diviseur du nombre à décomposer. Pour cela tester les premiers nombres premiers: 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; ...	504 252 126 63 21 7 1 2 2 2 3 3 7
ÉTAPE 2 Diviser le nombre à décomposer par ce nombre premier. Puis, recommencer ce travail avec le quotient obtenu.	
ÉTAPE 3 Continuer ainsi jusqu'à obtenir 1 comme quotient.	
ÉTAPE 4 Écrire le produit de tous les nombres premiers utilisés, en recourant éventuellement aux puissances.	$504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

Multiple commun, ppmc

Définition

Un multiple commun de plusieurs nombres naturels est un multiple de chacun de ces nombres.

Exemple 72 est un multiple commun de 3 ; 9 et 12, car $72 = 3 \cdot 24$; $72 = 9 \cdot 8$; $72 = 12 \cdot 6$.

Propriété

Quels que soient les nombres naturels donnés, ils ont une infinité de multiples communs.

Exemple 72 ; $72 \cdot 2 = 144$; $72 \cdot 3 = 216$; ... sont des multiples communs de 3 ; 9 et 12.

⚠ Le plus grand multiple commun de plusieurs nombres naturels n'existe pas. Par contre, il existe un plus petit multiple commun.

Définition

Le **ppmc** de plusieurs nombres naturels est le **plus petit multiple commun** non nul ($\neq 0$) de ces nombres.

Exemple 36 est le ppmc de 3 ; 9 et 12. On écrit : $\text{ppmc}(3 ; 9 ; 12) = 36$.

→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres naturels (p. 26), Multiple, diviseur (p. 26)

NO

Calculer le ppmc de plusieurs nombres

Méthode 1

Écrire les premiers multiples des nombres.

Exemple Calculer le ppmc de 10 ; 12 et 15.

ÉTAPE 1	
Écrire les premiers multiples de chacun de ces nombres.	$M_{10} = \{0 ; 10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50 ; \mathbf{60} ; 70 ; 80 ; \dots\}$ $M_{12} = \{0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; \mathbf{60} ; 72 ; \dots\}$ $M_{15} = \{0 ; 15 ; 30 ; 45 ; \mathbf{60} ; 75 ; \dots\}$
ÉTAPE 2	
Identifier le premier multiple commun non nul.	$\text{ppmc}(10 ; 12 ; 15) = 60$

Méthode 2

Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers.

Exemple Calculer le ppmc de 180 et 2625.

ÉTAPE 1	
Décomposer les nombres en un produit de facteurs premiers. → p. 28	180 90 45 15 5 1 2 2 3 3 5 2625 525 105 21 7 1 5 5 5 3 7 $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $2625 = 3 \cdot 5^3 \cdot 7$
ÉTAPE 2	
Écrire tous les facteurs premiers qui figurent au moins une fois dans l'une ou l'autre des décompositions avec leur plus grand exposant.	Les facteurs qui figurent au moins une fois dans les deux décompositions sont: 2 ; 3 ; 5 et 7. Pour 2, le plus grand exposant est 2. Pour 3, le plus grand exposant est 2. Pour 5, le plus grand exposant est 3. Pour 7, le plus grand exposant est 1.
ÉTAPE 3	
Effectuer le produit des nombres obtenus. C'est le ppmc des nombres choisis.	$ppmc(180 ; 2625) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 = 31\,500$

Comment choisir parmi ces deux méthodes

On choisit de préférence la première méthode lorsque les premiers multiples sont faciles à calculer et qu'il n'est pas nécessaire d'en calculer beaucoup.

Diviseur commun, pgdc

Définition

Un diviseur commun de plusieurs nombres naturels est un diviseur de chacun de ces nombres.

Exemple 2 est un diviseur commun de 6 ; 24 et 172, car 2 divise chacun de ces trois nombres.

Propriété

Quels que soient les nombres naturels donnés, ils ont au moins un diviseur commun. En effet, 1 est un diviseur de tous les nombres.

Définition

Le **pgdc** de plusieurs nombres naturels est le **plus grand diviseur commun** de ces nombres.

Exemple 5 est le pgdc de 10 ; 15 et 30. On écrit : $\text{pgdc}(10 ; 15 ; 30) = 5$.

→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres naturels (p. 26), Multiple, diviseur (p. 26)

NO

Calculer le pgdc de plusieurs nombres

Méthode 1

Écrire tous les diviseurs de chaque nombre.

Exemple Calculer le pgdc de 30 ; 12 et 18.

ÉTAPE 1	Écrire tous les diviseurs de chacun de ces nombres. → Recherche de tous les diviseurs d'un nombre entier (p. 26)	$D_{30} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; \mathbf{6} ; 10 ; 15 ; 30 \}$ $D_{12} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \mathbf{6} ; 12 \}$ $D_{18} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; \mathbf{6} ; 9 ; 18 \}$
ÉTAPE 2	Identifier le plus grand diviseur commun.	$\text{pgdc}(30 ; 12 ; 18) = 6$

Méthode 2

Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers.

Exemple Calculer le pgdc de 9800 et 308.

ÉTAPE 1	Décomposer les nombres en un produit de facteurs premiers.	<table><tr><td>9800</td><td>2</td><td>308</td><td>2</td></tr><tr><td>4900</td><td>2</td><td>154</td><td>2</td></tr><tr><td>2450</td><td>2</td><td>77</td><td>7</td></tr><tr><td>1225</td><td>5</td><td>11</td><td>11</td></tr><tr><td>245</td><td>5</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>49</td><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>7</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr></table> $9800 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ $308 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11$	9800	2	308	2	4900	2	154	2	2450	2	77	7	1225	5	11	11	245	5	1		49	7			7	7			1			
9800	2	308	2																															
4900	2	154	2																															
2450	2	77	7																															
1225	5	11	11																															
245	5	1																																
49	7																																	
7	7																																	
1																																		
ÉTAPE 2	Écrire tous les facteurs premiers qui figurent dans les deux décompositions avec leur plus petit exposant.	Les facteurs qui figurent dans les deux décompositions sont : 2 et 7. Pour 2, le plus petit exposant est 2. Pour 7, le plus petit exposant est 1.																																
ÉTAPE 3	Effectuer le produit des nombres obtenus. C'est le pgdc des nombres choisis.	$\text{pgdc}(9800 ; 308) = 2^2 \cdot 7 = 28$																																

Comment choisir parmi ces deux méthodes
On choisit de préférence la première méthode lorsque les diviseurs de chacun des nombres sont faciles à calculer.

Ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$

Nombres entiers relatifs

Définitions

- Un nombre entier relatif est un nombre entier muni d'un signe positif s'il est supérieur à zéro ou négatif s'il est inférieur à zéro.
- On utilise la lettre $\mathbb{Z}$ pour désigner l'ensemble de tous les nombres entiers relatifs.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; +1 ; +2 ; +3 ; +4 ; +5 ; \dots \}$$

Exemples

$(-27) ; 0 ; (+5)$ sont des nombres entiers relatifs.

(-27) est un nombre négatif et $(+5)$ un nombre positif.

Remarque

0 est à la fois positif et négatif.

NO

Distance à zéro

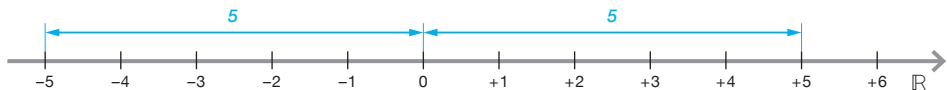
Définition

La distance à zéro d'un nombre a est la distance séparant sur la droite numérique ce nombre a de zéro.

Exemples

La distance à zéro de (-5) est 5.

La distance à zéro de $(+5)$ est 5.



→ Droite numérique (p. 25)

Nombres opposés

Définition

Deux nombres sont opposés si leur somme est égale à zéro. Ils ont donc la même distance à zéro et sont de signes différents.

Exemples

$(+3)$ et (-3) sont deux nombres opposés, car $(+3) + (-3) = 0$.

L'opposé de (-154) est $(+154)$, car $(-154) + (+154) = 0$.



[ÉTYM] Opposé: du latin *opponere*, «placer en face de».

→ Distance à zéro (p. 31)

Addition de nombres relatifs

Propriétés

Pour additionner des nombres de même signe :

- on additionne les distances à zéro des nombres ;
- on met devant le résultat le signe commun aux deux nombres.

Exemple

$$(+2) + (+7) = (+9)$$

$$(-2) + (-7) = (-9)$$

Pour additionner des nombres de signes différents :

- on soustrait la plus petite distance à zéro à la plus grande ;
- on met devant le résultat le signe du nombre ayant la plus grande distance à zéro.

Exemple

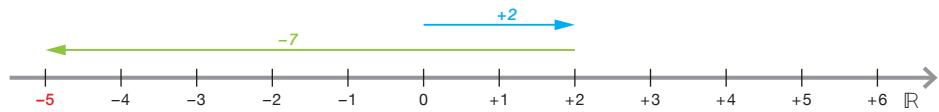
$$(+2) + (-7) = (-5)$$

$$(-2) + (+7) = (+5)$$

Remarques

- On peut visualiser l'addition de nombres relatifs à l'aide de la droite numérique.

Exemple $(+2) + (-7) = -5$



- Les propriétés ci-dessus de l'addition pour les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) sont également valables pour les nombres réels ($\mathbb{R}$).

Exemples

$$(+3,4) + (-6,5) = (-3,1)$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{6}{5}\right)$$

→ Ensembles de nombres (p. 24), Distance à zéro (p. 31), Nombres réels (p. 46)

Soustraction de nombres relatifs

Propriété

Pour soustraire un nombre, on additionne son opposé.

Exemples

$$(-9) - (-10) = (-9) + (+10) = (+1)$$

$$(+3) - (+4) = (+3) + (-4) = (-1)$$

Remarque

Cette propriété de la soustraction pour les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) est également valable pour les nombres réels ($\mathbb{R}$).

Exemples

$$(+3,4) - (-6,5) = (+3,4) + (+6,5) = (+9,9)$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(+\frac{4}{5}\right) = \left(+\frac{2}{5}\right)$$

→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres opposés (p. 31), Nombres réels (p. 46)

Écriture simplifiée d'une somme ou d'une différence de nombres relatifs

Convention d'écriture

Dans une addition de nombres relatifs, on peut supprimer :

- les signes d'addition ;
- les parenthèses autour de chaque nombre ;
- le signe d'un nombre positif écrit en début de calcul.

Exemples

$$(+6) + (-7) + (-12) = 6 - 7 - 12 = -13$$

$$(-5) + (+4) + (+8) = -5 + 4 + 8 = 7$$

Remarques

- Simplifier l'écriture permet de calculer plus facilement des sommes et des différences de nombres relatifs.
- Les conventions d'écriture ci-dessus sont également valables pour les nombres réels ($\mathbb{R}$).

⚠ S'il y a des soustractions de nombres relatifs dans l'opération proposée, on les transformera en addition de l'opposé avant de simplifier l'écriture.

Exemples

$$(+5) - (+9) + (-12) = (+5) + (-9) + (-12) = 5 - 9 - 12 = -16$$

$$(-3) + (+4) - (-8) = (-3) + (+4) + (+8) = -3 + 4 + 8 = 9$$

→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres opposés (p. 31), Nombres réels (p. 46)

NO

Effectuer un calcul comportant des sommes et des différences de nombres relatifs

Méthode

Exemple $(-25) + (-10) - (-5) - (+14) + (+68) = ?$

ÉTAPE 1	Transformer les soustractions en additions de l'opposé (propriété de la soustraction de nombres relatifs).	$(-25) + (-10) - (-5) - (+14) + (+68) =$ $(-25) + (-10) + (+5) + (-14) + (+68) =$
ÉTAPE 2	Supprimer les signes d'addition et les parenthèses en appliquant la convention d'écriture.	$-25 - 10 + 5 - 14 + 68 =$
ÉTAPE 3	Regrouper les nombres qui sont précédés du même signe, puis effectuer les calculs.	$\underbrace{5 + 68}_{73} - \underbrace{25 + 10 + 14}_{49} = 24$

Remarques

- On peut aussi faire les calculs de gauche à droite une fois l'écriture simplifiée sans passer par le regroupement.
- Cette méthode est également valable pour les nombres réels.

Multiplication de nombres relatifs

Propriété 1

Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie leurs distances à zéro et on donne au produit :

- le signe + si les deux nombres sont de même signe ;
- le signe – si les deux nombres sont de signes différents.

Exemples

$$(+2) \cdot (+4) = (+8) = 8$$

$$(-2) \cdot (-4) = (+8) = 8$$

$$(+2) \cdot (-4) = (-8) = -8$$

$$(-2) \cdot (+4) = (-8) = -8$$

Propriété 2

Quand on multiplie plusieurs nombres relatifs différents de zéro :

- si le nombre de facteurs négatifs est pair, le produit est positif ;
- si le nombre de facteurs négatifs est impair, le produit est négatif.

Exemples

Le produit $(-5) \cdot (+4) \cdot (+2) \cdot (-4) \cdot (-3)$ est négatif, car il y a trois facteurs négatifs.

Le produit $(+2) \cdot (-3) \cdot (-7) \cdot (-8) \cdot (-5)$ est positif, car il y a quatre facteurs négatifs.

Remarques

- Pour effectuer le produit de plusieurs nombres relatifs, on peut d'abord déterminer le signe du produit à l'aide de la propriété 2, puis calculer le produit des nombres sans leur signe.

Exemple

$$(-4) \cdot (-2) \cdot (+3) \cdot (-5) = (-120)$$

Il y a trois facteurs négatifs donc le produit est négatif

$$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

- Les propriétés de la multiplication pour les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) sont également valables pour les nombres réels ($\mathbb{R}$).
- Ensembles de nombres (p. 24), Distance à zéro (p. 31), Nombres réels (p. 46)

Division de nombres relatifs

Propriété

Pour diviser deux nombres relatifs, on divise leurs distances à zéro.

On donne alors au quotient :

- le signe + si les deux nombres sont de même signe ;
- le signe – si les deux nombres sont de signes différents.

Exemples

$$(+32) : (+8) = (+4) = 4$$

$$(-32) : (-8) = (+4) = 4$$

$$(+32) : (-8) = (-4) = -4$$

$$(-32) : (+8) = (-4) = -4$$

Remarque

Les propriétés de la division pour les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) sont également valables pour les nombres réels ($\mathbb{R}$).

→ Distance à zéro (p. 31)

Ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

Nombres décimaux

Définitions

- Un **nombre décimal** est le quotient d'un nombre entier relatif par une puissance de dix.
- Son **écriture décimale** possède un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule.
- On utilise la lettre $\mathbb{D}$ pour désigner l'ensemble de tous les nombres décimaux.

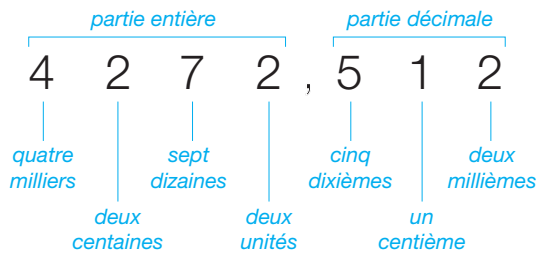
Exemples

$\frac{7}{10} = 0,7$; $1,125 = \frac{1125}{1000}$; $8,43 = \frac{843}{100}$; $-\frac{5}{2} = -\frac{25}{10} = -2,5$ sont des nombres décimaux.
 $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$; $\frac{2}{7} = 0,285714$; $\pi = 3,14159 \dots$; $-\frac{2}{7}$ ne sont pas des nombres décimaux.

Définitions

- Les **décimales** sont les chiffres figurant après la virgule.
- La **numération décimale** est la numération en base dix.

Exemple



$$4272,512 = 4000 + 200 + 70 + 2 + 0,5 + 0,01 + 0,002$$

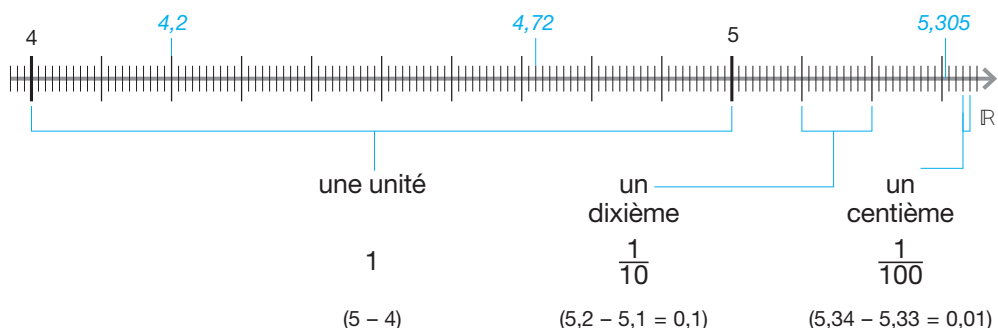
⚠ 04,50 = 4,50 = 4,5

Les zéros placés à gauche de la partie entière et ceux placés à la fin de la partie décimale ne changent pas la valeur du nombre. Ils ne sont généralement pas notés.

ÉTYM Décimal : du latin *decimus*, dixième.

→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres entiers relatifs (p. 31), Puissance de dix (p. 47)

Représentation de nombres décimaux sur une droite graduée



Approximation d'un nombre décimal

Définition

Donner une **approximation** ou une **valeur approchée** d'un nombre décimal, c'est trouver une valeur proche de ce nombre à une précision choisie. Cette valeur approchée peut, par exemple, être un **arrondi** ou une **troncature**.

Arrondi

Définition

L'arrondi d'un nombre est la valeur approchée la plus proche possible de ce nombre, étant donné la précision choisie.

On arrondit :

- vers le haut (par excès) lorsque le chiffre suivant la précision demandée est supérieur ou égal à 5 (5 à 9) ;
- vers le bas (par défaut) lorsque le chiffre suivant la précision demandée est inférieur à 5 (0 à 4).

Exemples

3,168 arrondi au centième donne 3,17.

3,163 arrondi au centième donne 3,16.

3,165 arrondi au centième donne, par convention, 3,17.

Troncature

Définition

La troncature d'un nombre est la valeur approchée inférieure à ce nombre, étant donné la précision choisie. Tronquer signifie «couper». Tronquer l'écriture d'un nombre, c'est la couper avec la précision choisie.

Exemples

Nombre	Précision choisie	Valeur approchée	
		arrondi	troncature
0,468	... au centième	0,47	0,46
1,841	... au dixième	1,8	1,8
12,35	... au dixième	12,4	12,3
5,8	... à l'unité	6	5
125	... à la dizaine	130	120

Remarque

Le choix de la précision d'une approximation dépend du contexte de la situation et de la taille des nombres.

Exemple La distance parcourue par un piéton arrondie au millimètre près n'a pas vraiment de sens.

Addition

Définitions

- L'**addition** est l'opération qui associe, à deux nombres a et b , un troisième noté $a + b$.
- Le résultat d'une **addition** s'appelle une **somme** et les nombres que l'on additionne des **termes**.

Exemple

$$14,8 + 6,4 = 21,2$$

termes
somme

Additionner des nombres décimaux positifs en colonnes

Méthode

Exemple 255,45 + 33,9 + 7,2 = ?

ÉTAPE 1	Tout d'abord, calculer une approximation du résultat, ce qui permettra de vérifier que la réponse finale est plausible.	$255,45 + 33,9 + 7,2 \approx ?$ $260 + 30 + 10 = 300$																																			
ÉTAPE 2	Écrire les termes de la somme en alignant les unités.																																				
ÉTAPE 3	Effectuer l'addition en colonne en commençant par la droite. S'il y a des retenues, les noter au haut de la colonne précédente.	<table><tr><td>..</td><td>centaines</td><td>dizaines</td><td>unités</td><td>dixièmes</td><td>centièmes</td><td>..</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td>5</td><td>5,</td><td>4</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>+</td><td></td><td>3</td><td>3,</td><td>9</td><td></td><td></td></tr><tr><td>+</td><td></td><td></td><td>7,</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>2</td><td>9</td><td>6,</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr></table>	..	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	..		2	5	5,	4	5		+		3	3,	9			+			7,	2				2	9	6,	5	5	
..	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	..																															
	2	5	5,	4	5																																
+		3	3,	9																																	
+			7,	2																																	
	2	9	6,	5	5																																
ÉTAPE 4	Vérifier que la somme corresponde à l'approximation.	$296,55 \approx 300$																																			

NO

Soustraction

Définitions

- La **soustraction** est l'opération qui associe, à deux nombres a et b , un troisième noté $a - b$.
- Le résultat d'une **soustraction** s'appelle une **différence** et les nombres que l'on soustrait des **termes**.

Exemple

$$\begin{array}{rcl} 43 & - & 21,2 \\ \hline & & 21,8 \end{array}$$

termes différence

Soustraire des nombres décimaux positifs en colonnes

Méthode

Exemple 528,94 - 40,8 = ?

ÉTAPE 1	Tout d'abord, calculer une approximation du résultat, ce qui permettra de vérifier que la réponse finale est plausible.	$528,94 - 40,8 \cong ?$ $530 - 40 = 490$																																			
ÉTAPE 2	Écrire les termes de la différence en alignant les unités.																																				
ÉTAPE 3	Effectuer la soustraction en colonne en commençant par la droite. S'il y a des emprunts, les noter comme dans l'exemple ci-contre.	<table><tr><td>...</td><td>centaines</td><td>dizaines</td><td>unités</td><td>dixièmes</td><td>centièmes</td><td>...</td></tr><tr><td></td><td>4</td><td>12</td><td>8,</td><td>9</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td></td><td>5</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>-</td><td></td><td>4</td><td>0,</td><td>8</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>4</td><td>8</td><td>8,</td><td>1</td><td>4</td><td></td></tr></table>	...	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	...		4	12	8,	9	4			5	2					-		4	0,	8				4	8	8,	1	4	
...	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	...																															
	4	12	8,	9	4																																
	5	2																																			
-		4	0,	8																																	
	4	8	8,	1	4																																
ÉTAPE 4	Vérifier que la différence corresponde à l'approximation.	$488,14 \cong 490$																																			

Multiplication

Définitions

- La **multiplication** est l'opération qui associe, à deux nombres a et b , un troisième noté $a \cdot b$.
- Le résultat d'une **multiplication** s'appelle un **produit** et les nombres que l'on multiplie des **facteurs**.

Exemple

$$\begin{array}{ccc} 8,2 & \cdot & 5 \\ \swarrow & & \searrow \\ \text{facteurs} & & \text{produit} \end{array} = 41$$

Remarque

Pour éviter la confusion entre le symbole « $\times$ » de la multiplication et la lettre « x » utilisée en algèbre, on utilise le symbole « $\cdot$ » pour indiquer la multiplication.

NO

Multiplier des nombres décimaux positifs en colonnes

Méthode

Exemple $15,82 \cdot 5,3 = ?$

ÉTAPE 1	Tout d'abord, calculer une approximation du résultat, ce qui permettra de vérifier que la réponse finale est plausible.	$15,82 \cdot 5,3 \approx ?$ $16 \cdot 5 = 80$
ÉTAPE 2	Effectuer la multiplication en colonnes sans tenir compte des virgules.	$\begin{array}{r} \overset{2}{1} \overset{4}{5}, \overset{1}{8} 2 \\ 15,82 \\ \hline 4746 \\ + 79100 \\ \hline 83846 \end{array}$
ÉTAPE 3	Additionner le nombre de décimales présentes dans chaque facteur et placer la virgule en conséquence dans le produit.	
ÉTAPE 4	Vérifier que le produit corresponde à l'approximation.	$83,846 \approx 80$

Division

Définitions

- La **division** est l'opération qui, à deux nombres a et b ($b \neq 0$), associe un troisième c tel que $a = b \cdot c$. On note ce nombre $a : b$. Il est appelé quotient de a par b .
- Le résultat d'une **division** s'appelle le **quotient**, le nombre a se nomme le **dividende** et le nombre b le **diviseur**.

Exemple

$$\begin{array}{ccc} 278 & : & 4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{dividende} & & \text{diviseur} \end{array} = \begin{array}{ccc} 69,5 & \text{car} & 69,5 \cdot 4 = 278 \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{quotient} \end{array}$$

Propriété

Le quotient ne change pas si l'on multiplie le dividende et le diviseur de la division par un même nombre non nul.

Exemple

$$\begin{array}{lcl} 35,2 : 6,4 & = & 352 : 64 \\ 5,5 & = & 5,5 \end{array}$$

Diviser un nombre décimal positif par un nombre décimal positif

Méthode

Exemple $195,04 : 5,3 = ?$

ÉTAPE 1 Tout d'abord, calculer une approximation du résultat, ce qui permettra de vérifier que la réponse finale est plausible.	$195,04 : 5,3 \approx ?$ $200 : 5 = 40$
ÉTAPE 2 Multiplier le diviseur par 10, 100, 1000, ... de manière que le diviseur soit un nombre naturel. Multiplier le dividende par le même nombre pour ne pas changer le quotient. → Division (p. 38)	$195,04 : 5,3 = 1950,4 : 53$
ÉTAPE 3 Effectuer la division jusqu'à la virgule. Mettre alors cette dernière après le dernier chiffre du quotient et continuer la division.	$ \begin{array}{r} 1950,4 \\ 53 \overline{) 1950,4} \\ \underline{159} \\ 360 \\ \underline{318} \\ 424 \\ \underline{424} \\ 000 \end{array} $
ÉTAPE 4 Continuer la division jusqu'à ce que le reste soit nul ou lorsque le niveau de précision demandé soit atteint.	
ÉTAPE 5 Vérifier que le quotient corresponde à l'approximation.	$36,8 \approx 40$

NO

Propriétés de l'addition et de la multiplication

Addition

Propriété 1

Lorsque l'on effectue une addition de deux termes, on peut l'effectuer dans l'ordre que l'on veut.

L'addition est commutative :

$$a + b = b + a$$

Exemple $40 + 146 = 146 + 40$

Propriété 2

Lorsque l'on effectue une addition de plusieurs termes, on peut grouper ces termes comme on le veut.

L'addition est associative :

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

Exemple $41,3 + 15,9 + 4,1 =$
 $41,3 + (15,9 + 4,1) = 41,3 + 20$

Propriété 3

Dans une suite d'additions, on peut effectuer les calculs dans l'ordre que l'on veut en utilisant la commutativité et l'associativité.

Cette propriété permet dans certains cas de simplifier les calculs.

Exemple $137 + 89 + 63 = (137 + 63) + 89 =$
 $200 + 89 = 289$

Multiplication

Lorsque l'on effectue une multiplication de deux facteurs, on peut l'effectuer dans l'ordre que l'on veut.

La multiplication est commutative :

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Exemple $10 \cdot 5 = 5 \cdot 10$

Lorsque l'on effectue une multiplication de plusieurs facteurs, on peut grouper les facteurs comme on le veut.

La multiplication est associative :

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Exemple $12 \cdot 25 \cdot 4 = 12 \cdot (25 \cdot 4) = 12 \cdot 100$

Dans une suite de multiplications, on peut effectuer les calculs dans l'ordre que l'on veut en utilisant la commutativité et l'associativité.

Cette propriété permet dans certains cas de simplifier les calculs.

Exemple $25 \cdot 91 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 91 =$
 $100 \cdot 91 = 9100$

Propriété 4

Lorsque l'on additionne 0 à un nombre, on obtient ce nombre.
0 est l'élément neutre pour l'addition: $a + 0 = a$

Exemple $128,09 + 0 = 128,09$

Lorsque l'on multiplie un nombre par 1, on obtient ce nombre.
1 est l'élément neutre pour la multiplication: $a \cdot 1 = a$

Exemple $4235,2 \cdot 1 = 4235,2$

Lorsque l'on multiplie un nombre par 0, on obtient 0.
0 est l'élément absorbant pour la multiplication: $a \cdot 0 = 0$

Exemple $78,206 \cdot 0 = 0$

Propriété 5

Lorsque l'on multiplie une somme ou une différence par un nombre, on peut multiplier chaque terme de cette somme ou différence par ce nombre.

La multiplication est distributive sur l'addition et la soustraction: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ et $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Exemples

$$12 \cdot (100 + 1) = 12 \cdot 100 + 12 \cdot 1 = 1200 + 12 = 1212$$

$$34 \cdot (10 - 1) = 34 \cdot 10 - 34 \cdot 1 = 340 - 34 = 306$$

⚠ La soustraction et la division ne sont ni associatives ni commutatives.

Exemples

$$\begin{array}{l} (45 - 25) - 10 \neq 45 - (25 - 10) \\ \begin{array}{c} \underbrace{45 - 25}_{20} - 10 \neq 45 - \underbrace{25 - 10}_{15} \\ \underbrace{20 - 10}_{10} \neq \underbrace{45 - 15}_{30} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (100 : 50) : 2 \neq 100 : (50 : 2) \\ \begin{array}{c} \underbrace{100 : 50}_2 : 2 \neq 100 : \underbrace{50 : 2}_{25} \\ \underbrace{2 : 2}_1 \neq \underbrace{100 : 25}_4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 40 - 60 \neq 60 - 40 \\ \underbrace{40 - 60}_{-20} \neq \underbrace{60 - 40}_{20} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 20 : 4 \neq 4 : 20 \\ \underbrace{20 : 4}_5 \neq \underbrace{4 : 20}_{0,2} \end{array}$$

⚠ En mathématiques, la division par 0 est impossible, car elle n'a pas de sens.

Priorités des opérations

Convention

Dans une série d'opérations, on effectue d'abord les opérations entre parenthèses.

Dans les parenthèses ou lorsqu'il n'y a plus de parenthèses, on effectue :

- d'abord les puissances et les racines;
- ensuite les multiplications et les divisions de gauche à droite;
- enfin les additions et les soustractions.

Exemples

$$12 \cdot (5 + 2) = 12 \cdot 7 = 84$$

$$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

$$4 + 2 \cdot 3 = 4 + 6 = 10$$

$$12 - 5 + 7 = 7 + 7 = 14$$

$$6 : 3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$$

Effectuer un calcul avec ou sans parenthèses

Méthode

Exemple $7 + 3 \cdot (4^2 + 20 : 4)$

ÉTAPE 1 Repérer s'il y a des parenthèses. Si oui, effectuer les calculs prioritaires à l'intérieur.	$7 + 3 \cdot (4^2 + 20 : 4)$ $= 7 + 3 \cdot (16 + 5)$
ÉTAPE 2 Terminer le calcul entre parenthèses et écrire le résultat en enlevant les parenthèses.	$= 7 + 3 \cdot 21$
ÉTAPE 3 Effectuer l'opération prioritaire et écrire le résultat.	$= 7 + 63$
ÉTAPE 4 Achever le calcul en effectuant les opérations de gauche à droite.	$= 70$

NO

Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Nombres rationnels

Définitions

- Un **nombre rationnel** est le quotient de deux nombres entiers relatifs a et b ($b \neq 0$). Il peut s'écrire sous la forme d'une **fraction** $\frac{a}{b}$, où a est le **numérateur** et b le **dénominateur**. Son écriture décimale est finie ou périodique.
- On utilise la lettre $\mathbb{Q}$ pour désigner l'ensemble de tous les nombres rationnels.

$$\frac{3}{4}$$

NUMÉRATEUR (ou dividende)
barre de fraction
DÉNOMINATEUR (ou diviseur)

Exemples

-2 ; $-\frac{7}{5}$; 0 ; $\frac{1}{4}$; $0,5$; $\frac{2}{3}$; $8,4\overline{5}$; ... sont des nombres rationnels.

Par contre : π ; $\sqrt{2}$; ... ne sont pas des nombres rationnels.

Remarques

- Les nombres décimaux sont inclus dans les nombres rationnels. La réciproque n'est pas vraie.
- Il faut faire la différence entre une fraction et une écriture fractionnaire.
Une fraction est le rapport de deux nombres entiers relatifs écrit sous forme fractionnaire ($\frac{a}{b}$ avec a et b appartenant à $\mathbb{Z}$).
Une écriture fractionnaire est le rapport de deux nombres quelconques écrit sous forme fractionnaire ($\frac{a}{b}$ quels que soient a et b).

Exemples

$\frac{3}{5}$; $-\frac{7}{3}$ sont des fractions.

$\frac{2,4}{5}$; $\frac{3}{-5,15}$; $\frac{3}{5}$; $-\frac{7}{3}$ sont des écritures fractionnaires.

→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres entiers relatifs (p. 31), Nombres décimaux (p. 35)

Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale

Méthode En divisant le numérateur par le dénominateur.

Exemple $\frac{7}{8} = ?$ et $\frac{13}{11} = ?$

ÉTAPE 1 Effectuer la division.	$\frac{7}{8} = 7 : 8 = 0,875$ $\frac{13}{11} = 1,1818...$
ÉTAPE 2 Vérifier que la division se termine ou que l'on retrouve un reste déjà rencontré.	7 70 -64 60 -56 40 -40 0 8 0,875 13 -11 20 -11 90 -88 2 11 1,18

Remarque
Pour certaines fractions, il est possible, par amplification ou par simplification, d'obtenir une fraction égale dont le dénominateur est une puissance de 10.

Exemple
 $\frac{3}{5} = ?$
 $\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{6}{10} = 0,6$

Passer d'une écriture décimale finie à une écriture fractionnaire

Méthode

Exemple $3,15 = ?$

ÉTAPE 1 Écrire le nombre sous forme de fraction (par amplification).	$3,15 = \frac{3,15}{1} = \frac{315}{100}$
ÉTAPE 2 Rechercher la fraction irréductible (par simplification).	$\frac{315}{100} = \frac{315 : 5}{100 : 5} = \frac{63}{20}$ $3,15 = \frac{63}{20}$

Remarque
Pour mettre un nombre entier sous forme de fraction, il suffit de mettre 1 comme dénominateur. On peut ensuite amplifier cette fraction pour obtenir un autre nombre comme dénominateur.

Exemples
 $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{20}{5} = ...$
 $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{12}{12} = ...$

Amplification et simplification de fractions

Propriété

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre entier non nul, on obtient une fraction égale à la première.

On dit que l'on a **amplifié** la fraction par le nombre en question.

Quels que soient les nombres a , b et k ($b \neq 0$ et $k \neq 0$), on a : $\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b}$

Exemples

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Diagramme illustrant l'amplification de $\frac{2}{3}$ par 2 : deux flèches courbes, l'une du numérateur 2 à 4 (multiplier par 2) et l'autre du dénominateur 3 à 6 (multiplier par 2).

$$\frac{3}{20} = \frac{15}{100}$$

Diagramme illustrant l'amplification de $\frac{3}{20}$ par 5 : deux flèches courbes, l'une du numérateur 3 à 15 (multiplier par 5) et l'autre du dénominateur 20 à 100 (multiplier par 5).

$$\frac{4}{9} = \frac{12}{27}$$

Diagramme illustrant l'amplification de $\frac{4}{9}$ par 3 : deux flèches courbes, l'une du numérateur 4 à 12 (multiplier par 3) et l'autre du dénominateur 9 à 27 (multiplier par 3).

Propriété

Si l'on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un diviseur commun au numérateur et dénominateur, on obtient une fraction égale à la première. On dit que l'on a **simplifié** la fraction par le diviseur commun.

Quels que soient les nombres a , b et k diviseur commun de a et b ($b \neq 0$), on a : $\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$

Exemples

$$\frac{84}{70} = \frac{12}{10}$$

Diagramme illustrant la simplification de $\frac{84}{70}$ par 7 : deux flèches courbes, l'une du numérateur 84 à 12 (diviser par 7) et l'autre du dénominateur 70 à 10 (diviser par 7).

$$\frac{48}{36} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Diagramme illustrant la simplification de $\frac{48}{36}$ par 6, puis par 2 : deux flèches courbes pour la première étape (48 à 8 et 36 à 6) et deux autres flèches courbes pour la seconde étape (8 à 4 et 6 à 3).

$$\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

Diagramme illustrant la simplification de $\frac{27}{36}$ par 9 : deux flèches courbes, l'une du numérateur 27 à 3 (diviser par 9) et l'autre du dénominateur 36 à 4 (diviser par 9).

Remarque

Une **fraction irréductible** est une fraction que l'on ne peut plus simplifier.

Exemples

$\frac{1}{4}$; $\frac{11}{5}$; $-\frac{3}{7}$ sont des fractions irréductibles.

Par contre, les fractions $\frac{12}{4}$; $\frac{11}{55}$; $-\frac{30}{70}$ ne sont pas irréductibles.

Addition et soustraction de fractions

Propriété

Pour calculer la somme ou la différence de deux fractions ayant le même dénominateur, on additionne les numérateurs et on garde le **dénominateur commun**.

Quels que soient les nombres entiers a , b et c ($c \neq 0$),

$$\text{on a : } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemples

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3} \qquad \frac{7}{5} - \frac{4}{5} = \frac{7-4}{5} = \frac{3}{5}$$

Remarque

Si les deux fractions à additionner n'ont pas le même dénominateur, il faut les remplacer par deux fractions égales qui ont le même dénominateur.

Exemple

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$$

NO

Additionner et soustraire des fractions

Méthode

Exemple 1 $\frac{5}{6} + \frac{2}{6} = ?$

ÉTAPE 1	
Ces fractions ont-elles le même dénominateur ?	Oui
ÉTAPE 2	
Appliquer la propriété énoncée précédemment : additionner les numérateurs et garder le dénominateur commun.	$\frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5+2}{6} = \frac{7}{6}$

Exemple 2 $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = ?$

ÉTAPE 1	
Ces fractions ont-elles le même dénominateur ?	Non
ÉTAPE 2	
Chercher un dénominateur commun. Pour cela, calculer par exemple le produit des deux dénominateurs ou chercher le ppmc de ces deux nombres.	$\text{ppmc}(4; 6) = 12$
ÉTAPE 3	
Amplifier chaque fraction afin d'obtenir le dénominateur commun que l'on vient de trouver.	$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12}$
ÉTAPE 4	
Appliquer la propriété énoncée précédemment : soustraire les numérateurs et garder le dénominateur commun.	$\frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$

Remarque

Il est généralement souhaitable de donner la réponse finale sous forme de fraction irréductible.

Multiplication de fractions

Propriété

Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Quels que soient les nombres entiers a , b , c et d ($b \neq 0$ et $d \neq 0$),

$$\text{on a : } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Exemples

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35} \quad \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot 3 = \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \frac{3}{1} = -\frac{15}{7}$$

Remarque

Il peut être très utile de simplifier les fractions avant d'effectuer les produits.

Exemple

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{12}{14} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}} \cdot \overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{2}{\cancel{9}} \cdot \underset{3}{\cancel{14}}} = \frac{1 \cdot \overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot 2} = \frac{1 \cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{3 \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

NO

Calculer la fraction d'un nombre

En revenant au sens de la fraction.

Exemple

Pour calculer les $\frac{2}{5}$ de 15,

- on cherche la valeur de $\frac{1}{5}$ de 15 $\rightarrow 15 : 5 = 3$
- on multiplie le résultat par 2 $\rightarrow 3 \cdot 2 = 6$

En utilisant la propriété «calculer $\frac{a}{b}$ de c , c'est calculer $\frac{a}{b} \cdot c$ »

Exemple

Pour calculer les $\frac{3}{4}$ des $\frac{7}{5}$, on fait : $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$

Nombres inverses

Définition

Deux nombres non nuls sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Exemples

- $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ sont inverses l'un de l'autre, car $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$
- 4 et $\frac{1}{4}$ sont inverses l'un de l'autre, car $4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 1}{4} = 1$
- $-\frac{1}{5}$ est l'inverse de (-5) , car $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-5) = \frac{(-1) \cdot (-5)}{5} = 1$

Division de fractions

Propriété

Pour diviser deux fractions, on multiplie la première par l'inverse de la seconde. Quels que soient les nombres entiers a , b , c et d ($b \neq 0$; $c \neq 0$ et $d \neq 0$),

$$\text{on a : } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$$

Exemples

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21} \quad \frac{9}{14} : \frac{3}{7} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{14}}} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{7}}}{3} = \frac{3}{2} \quad -\frac{8}{5} : 4 = -\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}} = -\frac{2}{5}$$

Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Nombres réels

Définitions

- Un **nombre réel** est un nombre dont l'écriture décimale est formée d'une partie entière et d'une partie décimale finie ou infinie.
- On utilise la lettre $\mathbb{R}$ pour désigner l'ensemble de tous les nombres réels.

Exemples $2,57$; -9 ; $3,14159\dots$; $0,123456789101112\dots$; $\frac{2}{5} = 0,4$; 0 ; 5 ; ...

Conséquences

- Les nombres naturels, relatifs, décimaux et rationnels sont des nombres réels.
- Les nombres qui ont une écriture décimale infinie non périodique sont appelés nombres irrationnels. Ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction. Les nombres irrationnels sont des nombres réels.

Exemples $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$; $\pi = 3,14159265\dots$; $1,110\,100\,100\,10000\dots$

- Les nombres réels permettent de repérer n'importe quel point sur une droite graduée.

NO

Puissances

Puissance d'exposant positif

Définition

La **puissance** d'un nombre est le résultat de la multiplication répétée de ce nombre avec lui-même.

Notation

Soient n un nombre naturel ($n \neq 0$) et a un nombre réel, alors :

$$\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{a^n}_{\substack{\text{base} \\ \text{exposant}}}$$

a^n se lit « a exposant n » ou « a puissance n ». C'est une puissance de a . a s'appelle la base et n l'exposant.

Exemple $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$

Remarques

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)
- a^2 se lit généralement « a au carré» et a^3 « a au cube».
- Le carré d'un nombre entier est aussi appelé carré parfait.

Exemples 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; ... sont des carrés parfaits.

Puissance d'exposant négatif

Définition Soient n un nombre naturel et a un nombre réel différent de 0.
Le nombre a^{-n} désigne l'inverse du nombre a^n .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemples

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001 \qquad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Puissance de dix

Définition Soit n un nombre naturel.
On appelle puissance de dix le nombre noté 10^n ou 10^{-n} .

Propriété 1 Quel que soit l'entier positif n :

$$10^n = \underset{(n \text{ fois})}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10} = \underset{(\text{un } 1 \text{ suivi de } n \text{ zéros})}{1\,000 \dots 0}$$

Exemple $10^6 = 1\,000\,000$ (un 1 suivi de 6 zéros)

Propriété 2 Quel que soit l'entier positif n :

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1\,000 \dots 0} = \underset{(n \text{ chiffres après la virgule})}{0,000 \dots 1}$$

Exemple $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0,0001$ (4 chiffres après la virgule)

Puissance	Écriture décimale	Nom	Préfixe	Symbole
...				
10^{12}	1 000 000 000 000	billion	téra	T
10^9	1 000 000 000	milliard	giga	G
10^6	1 000 000	million	méga	M
10^3	1 000	mille	kilo	k
10^2	100	cent	hecto	h
10^1	10	dix	déca	da
10^0	1	un		
10^{-1}	0,1	dixième	déci	d
10^{-2}	0,01	centième	centi	c
10^{-3}	0,001	millième	milli	m
10^{-6}	0,000 001	millionième	micro	μ
10^{-9}	0,000 000 001	milliardième	nano	n
10^{-12}	0,000 000 000 001	billionième	pico	p
...				

Exemples

$1 \text{ GW} = 10^9 \text{ W}$ $1 \text{ Mo} = 10^6 \text{ o}$

$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ $1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$

$1 \text{ mg} = 0,001 \text{ g}$ $1 \text{ μs} = 10^{-6} \text{ s}$

Propriétés des puissances

Soit m et n deux nombres entiers et a et b deux nombres réels ($b \neq 0$).

Propriété 1 Produit de puissances de même base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Exemple $9^2 \cdot 9^3 = 9^{2+3} = 9^5$

Propriété 2 Quotient de puissances de même base $a^m : a^n = a^{m-n}$

Exemple $6^5 : 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$

Propriété 3 Puissance d'une puissance $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemple $(10^2)^3 = 10^{2 \cdot 3} = 10^6$

NO

Propriété 4 Puissance d'un produit $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Exemple $(10 \cdot 4)^2 = 10^2 \cdot 4^2$

Propriété 5 Puissance d'un quotient $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemple $\left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{7^3}{4^3}$

⚠ La puissance est une opération étroitement liée à la multiplication.
Les règles de calculs ci-dessus ne fonctionnent pas pour l'addition
et la soustraction :

$$a^m + a^n \neq a^{m+n} \quad \text{et} \quad a^m - a^n \neq a^{m-n}$$

Exemples

$$\begin{array}{rcl} 5^2 \cdot 4^2 & = & (5 \cdot 4)^2 \\ 25 \cdot 16 & = & 20^2 \\ 400 & = & 400 \end{array}$$

par contre

$$\begin{array}{rcl} 5^2 + 4^2 & \neq & (5 + 4)^2 \\ 25 + 16 & \neq & 9^2 \\ 41 & \neq & 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 10^3 \cdot 10^1 & = & 10^{3+1} = 10^4 \\ 1000 \cdot 10 & = & 10000 \end{array}$$

par contre

$$\begin{array}{rcl} 10^3 + 10^1 & \neq & 10^{3+1} = 10^4 \\ 1000 + 10 & \neq & 10000 \end{array}$$

Remarque Ces propriétés peuvent aisément être retrouvées en revenant à la définition de la puissance.

Exemples

$$2^4 \cdot 2^3 = 2^7$$

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ facteurs}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{7 \text{ facteurs}}$$

Notation scientifique

Définition

Un nombre décimal positif est écrit en **notation scientifique** s'il est écrit sous la forme $a \cdot 10^n$ où :

- a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ (c'est-à-dire ayant un seul chiffre non nul devant la virgule);
- n est un nombre entier relatif.

Exemples

Les nombres suivants sont écrits en notation scientifique :
 $1,25 \cdot 10^5$ $4 \cdot 10^{-3}$ $8,561 \cdot 10^2$ $7,2 \cdot 10^{-4}$
Par contre : $0,253 \cdot 10^5$ ou $42,1 \cdot 10^{-3}$ ne sont pas écrits en notation scientifique.

Remarques

- La notation scientifique est particulièrement intéressante lorsque l'on traite de très petits ou de très grands nombres pour les rendre plus facilement lisibles et plus simple à écrire.

Exemples

Diamètre d'un noyau d'atome $\cong 0,000\,000\,000\,000\,001\text{ m} = 1 \cdot 10^{-15}\text{ m}$
Masse de la Terre $\cong 5\,970\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\text{ kg} = 5,97 \cdot 10^{24}\text{ kg}$

- Lorsqu'un résultat dépasse la capacité d'affichage d'une calculatrice, celle-ci affiche le résultat en notation scientifique.

⚠ $1,2^5 \neq 1,2 \cdot 10^5$

→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres décimaux (p. 35)

NO

Écrire un nombre décimal positif en notation scientifique

Méthode

Exemple Écrire 0,000012 en notation scientifique.

ÉTAPE 1	
Noter le coefficient a ($1 \leq a < 10$) de la puissance de 10.	$1,2 \cdot 10^{\cdots}$
ÉTAPE 2	
Déterminer le signe de l'exposant de 10. Si le nombre est plus grand que 1, l'exposant est un entier positif. Si le nombre est plus petit que 1, l'exposant est un entier négatif.	$0,000\,012 < 1$, alors l'exposant est un entier négatif.
ÉTAPE 3	
Déterminer la valeur de cet exposant en comptant de combien de rangs il est nécessaire de déplacer la virgule.	Ici, la virgule doit se déplacer de 5 rangs vers la droite (0,00001,2). L'exposant sera donc -5. 
ÉTAPE 4	
Écrire le nombre en notation scientifique.	$0,000\,012 = 1,2 \cdot 10^{-5}$

Racines

Racine carrée

Définition

Soit a un nombre réel positif. On appelle **racine carrée** de a , notée $\sqrt{a}$, le nombre positif dont le carré est égal à a .
La racine carrée de a est la solution positive de l'équation $x^2 = a$.

Exemples $\sqrt{81} = 9$ car $9^2 = 81$ et 9 est positif. $\sqrt{2,25} = 1,5$, car $1,5^2 = 2,25$ et 1,5 est positif.

⚠ $\sqrt{81} \neq -9$ même si $(-9)^2 = 81$.

Remarques

- Un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{R}$.

Exemple $\sqrt{-9}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

- $\sqrt{0} = 0$
- Si a est positif, $\sqrt{a^2} = a$.

→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres réels (p. 46)

NO

Racine cubique

Définition

Soit a un nombre réel. On appelle **racine cubique** de a , notée $\sqrt[3]{a}$, le nombre dont le cube est égal à a .

Exemples $\sqrt[3]{-125} = -5$, car $(-5)^3 = -125$. $\sqrt[3]{27} = 3$, car $3^3 = 27$.

Remarques

- $\sqrt[3]{0} = 0$
- La racine cubique d'un nombre négatif existe, contrairement à la racine carrée d'un tel nombre.

→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres réels (p. 46)

Propriétés des racines

Propriétés

Soient a et b , deux nombres réels positifs.

$$\blacksquare \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\blacksquare \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

Exemples $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{72}{50}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}$$

Conséquence $\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ pour tout nombre a et b positif.

Exemple $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

⚠ $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ ($a > 0$ et $b > 0$)

Exemple

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$$

$$4 + 3 \neq \sqrt{25}$$

$$7 \neq 5$$

Remarque

Ces propriétés sont également valables pour les racines cubiques.

→ Ensembles de nombres (p. 24), Nombres réels (p. 46)

NO

Simplifier des sommes contenant des racines carrées

Méthode

Exemple 1 $3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 6\sqrt{7} = ?$

ÉTAPE 1 Les nombres sous la racine sont-ils les mêmes ?	Oui.
ÉTAPE 2 Additionner les coefficients placés devant la racine carrée (distributivité), puis noter le facteur entier avant la racine.	$3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 6\sqrt{7} = (3 + 5 - 6) \cdot \sqrt{7}$ $= 2\sqrt{7}$

Exemple 2 $\sqrt{8} + \sqrt{18} = ?$

ÉTAPE 1 Les nombres sous la racine sont-ils les mêmes ?	Non.
ÉTAPE 2 Décomposer les nombres sous les racines en un produit pour faire apparaître, si possible, un carré parfait et un facteur commun aux deux termes.	$\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2}$
ÉTAPE 3 Appliquer la propriété du produit des racines carrées.	$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2}$ $= 2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2}$
ÉTAPE 4 Utiliser la distributivité et réduire l'écriture.	$= (2 + 3) \cdot \sqrt{2}$ $= 5\sqrt{2}$

Remarque

Il n'est pas toujours possible de simplifier des sommes de racines carrées.

Exemple $2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$

Probabilités

Série statistique et fréquence

Série statistique

Définition

Une série statistique est un ensemble de valeurs numériques.

Exemples

Les notes obtenues par une classe à un test de mathématiques, le nombre de frères et sœurs d'une population donnée, le nombre d'habitants des villes d'un canton, les salaires des employés d'une entreprise, etc. sont des séries statistiques.

Fréquence

NO

Définition

On appelle fréquence d'une valeur d'une série statistique le quotient

$$\frac{\text{Nombre d'apparitions de cette valeur}}{\text{Nombre de valeurs de la série}}$$

Ce quotient est compris entre 0 et 1. Il peut aussi s'exprimer sous forme d'un pourcentage.

Exemple

Un élève lance un dé seize fois de suite. Voici les nombres qu'il obtient :

2 ; 3 ; 3 ; 5 ; 6 ; 1 ; 2 ; 5 ; 6 ; 4 ; 3 ; 1 ; 4 ; 2 ; 5 ; 5.

Quelle est la fréquence du 5 ?

Le 5 apparaît 4 fois.

La fréquence du 5 est de $\frac{4}{16} = 0,25 = 25\%$.

Situation aléatoire, événement

Situation aléatoire

Définition

Une situation est dite **aléatoire** si elle conduit à des résultats possibles parfaitement identifiables. Par contre, on ne sait pas à l'avance quel résultat va se produire.

Exemple

On tire au hasard une boule d'un sac qui contient deux boules rouges, trois boules vertes et cinq boules jaunes. On regarde la couleur de la boule tirée.

Cette situation est une situation aléatoire, car elle conduit à des résultats possibles parfaitement identifiables : obtenir une boule rouge, une boule verte ou une boule jaune.

Par contre, avant de tirer la boule, on ne peut pas prévoir précisément quelle sera sa couleur.

Événement

Définition

Un événement d'une situation aléatoire est un ensemble contenant un ou plusieurs résultats.

Exemple On dispose des cartes ci-dessous. On tire une carte au hasard.



Probabilité d'un événement

Définition

Pour certaines situations aléatoires, on peut déterminer par un quotient la « chance » qu'un événement a de se produire. Ce quotient est appelé **probabilité de cet événement**.

Exemple

On tire au hasard une boule d'un sac qui contient deux boules rouges et trois boules blanches. On a deux chances sur cinq d'obtenir une boule rouge.

Donc la probabilité d'obtenir une boule rouge est de $\frac{2}{5} = 0,4$.

NO

Résultats équiprobables

Définition

Dans certaines situations aléatoires, tous les résultats ont la même probabilité. On dit qu'ils sont **équiprobables**.

Exemple

Lorsque l'on lance un dé usuel, numéroté de 1 à 6, parfaitement équilibré et que l'on regarde

le numéro qui apparaît, tous les numéros ont la même probabilité d'apparition.

Les résultats aléatoires de cette expérience sont équiprobables.

Lorsque le dé est pipé, ce n'est pas le cas.

Propriété

Si les résultats d'une situation aléatoire sont équiprobables, alors la probabilité d'un événement est égale au quotient :

$$\frac{\text{Nombre de résultats favorables}}{\text{Nombre de résultats possibles}}$$

Exemple

Un sac contient les jetons numérotés 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 9.

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Nombre de résultats possibles : 7

Nombre de résultats favorables : 2

$$p = \frac{2}{7}$$

Probabilité et fréquence

Propriété

Si l'on répète une situation aléatoire un très grand nombre de fois, la **fréquence d'apparition** de n'importe quel événement sera proche d'un nombre qui correspond à la **probabilité de cet événement**.

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, on répète l'expérience un très grand nombre de fois : « On tire un jeton dont on note le numéro et on le remet dans le sac. »

La fréquence d'apparition d'un nombre pair sera proche du nombre $\frac{2}{7}$, car c'est la probabilité de l'événement « obtenir un nombre pair ».

Calculer la probabilité d'un événement

Méthode 1

Utilisation du quotient
$$\frac{\text{Nombre de résultats favorables}}{\text{Nombre de résultats possibles}}$$

Exemple À l'aide d'un tableur, on tire au hasard un nombre entier compris entre 1 et 40.
Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3 ?

ÉTAPE 1 Est-ce que les résultats sont équiprobables ?	Le tirage au tableur étant effectué au hasard, les résultats sont équiprobables.
ÉTAPE 2 Si c'est le cas, la probabilité de l'événement est égale au quotient $\frac{\text{Nombre de résultats favorables}}{\text{Nombre de résultats possibles}}$	Nombre de résultats possibles : 40 Nombre de résultats favorables : 13, car il y a 13 multiples de 3 entre 1 et 40. La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est de $\frac{13}{40}$

NO

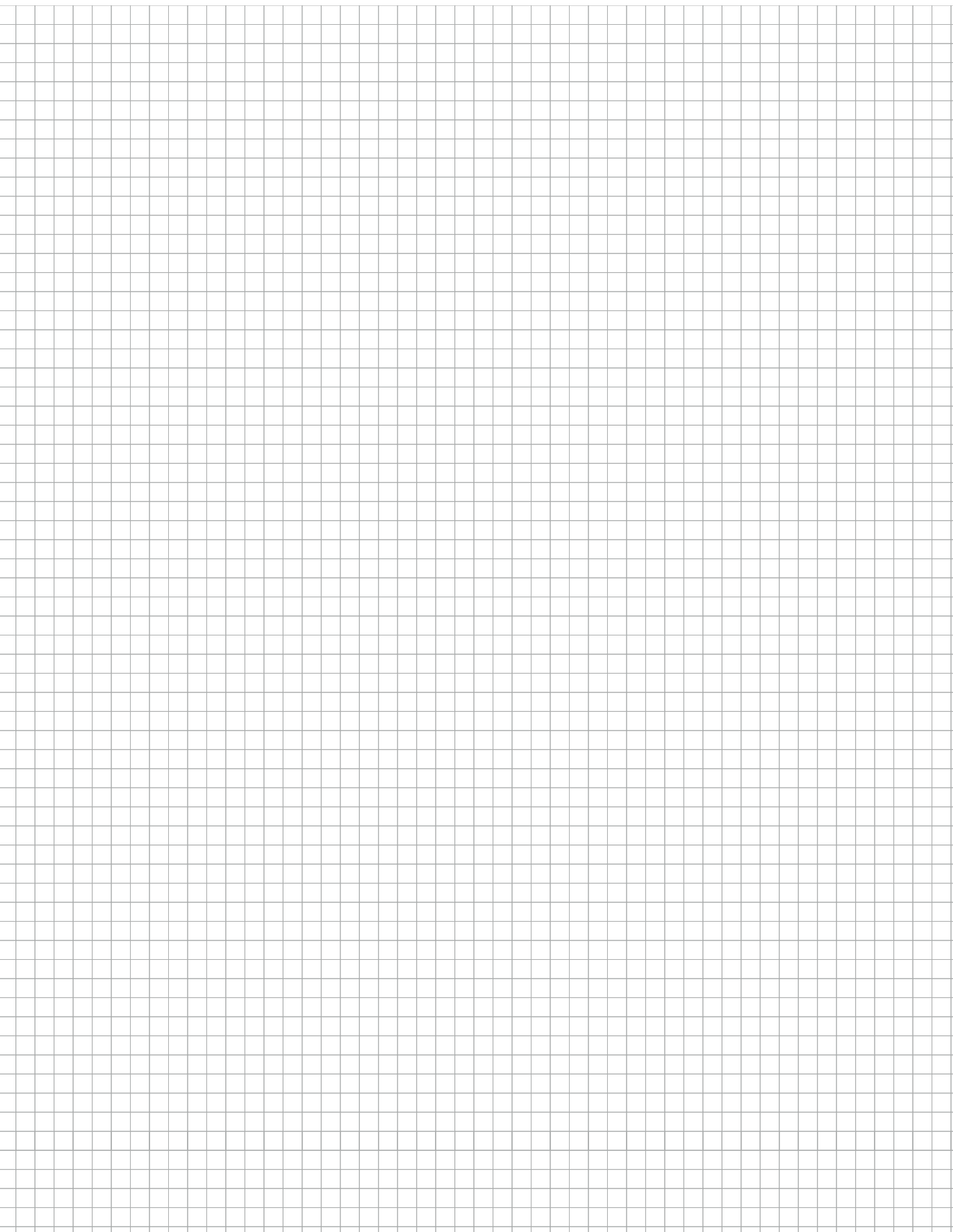
Méthode 2

Calcul de la fréquence de l'événement.

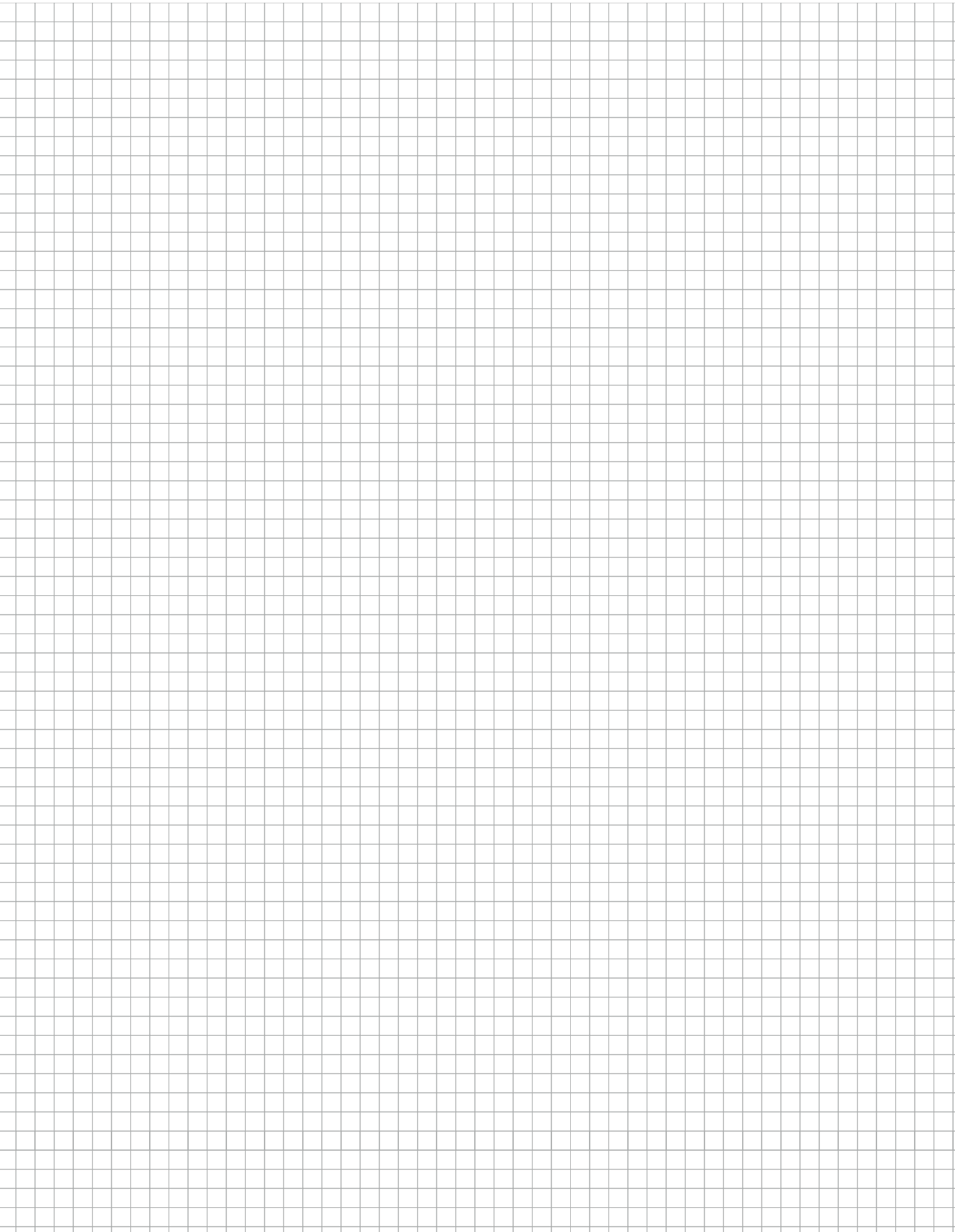
Exemple On dispose d'un dé cubique pipé (truqué) numéroté de 1 à 6. Comment peut-on calculer la probabilité de l'apparition du 6 ?

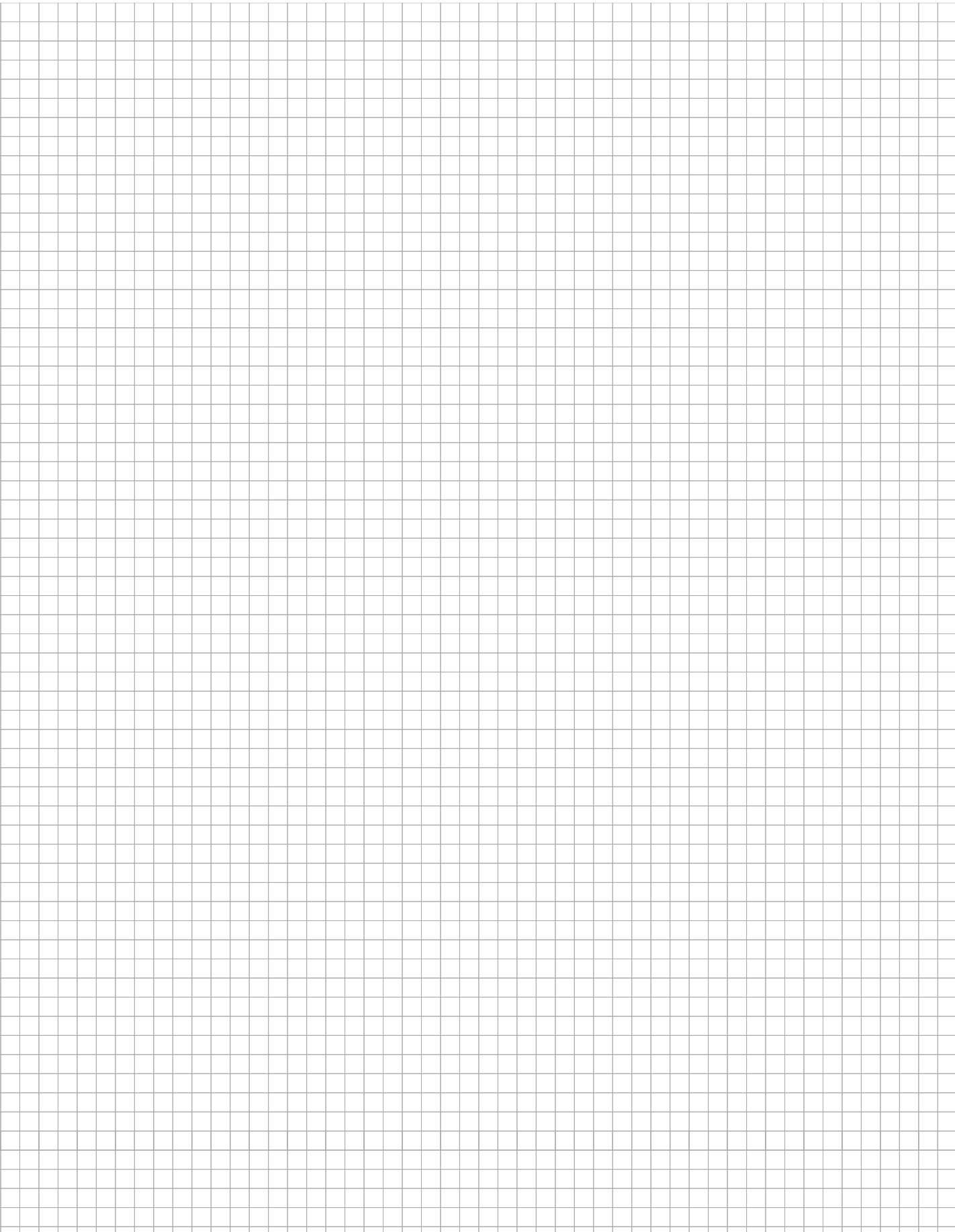
ÉTAPE 1 Est-ce que la probabilité de chaque résultat est la même ?	La probabilité de chaque résultat n'est pas la même, car le dé est pipé. On ne peut donc pas utiliser le rapport : $\frac{\text{Nombre de résultats favorables}}{\text{Nombre de résultats possibles}}$
ÉTAPE 2 Effectuer un très grand nombre de lancers et calculer la fréquence de l'événement.	Pour trouver la probabilité de l'événement « tirer un 6 » on lance un très grand nombre de fois le dé et on note chaque fois le résultat obtenu. On calcule ensuite la fréquence de l'événement en divisant le nombre de fois que l'on a obtenu le 6 par le nombre total de lancers.

Choix de la méthode
La première méthode n'est utilisable que si les résultats sont équiprobables.









Fonctions et algèbre

- Fonctions
- Proportionnalité
- Diagrammes
- Calcul littéral
- Équations



Fonctions

Généralités

Définition

Une **fonction** est une **relation** qui associe à chaque élément d'un ensemble de départ (E) un et un seul élément d'un ensemble d'arrivée (F).

Si f désigne cette fonction, on note :

$$f: E \longrightarrow F$$

Si x est un élément de E, on désigne par $f(x)$ l'élément de F qui est associé à x .

On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f et l'on note :

$$f: x \longmapsto f(x)$$

Exemple

Soit la fonction f qui, à un nombre x , lui associe le nombre $x^2 + 1$.

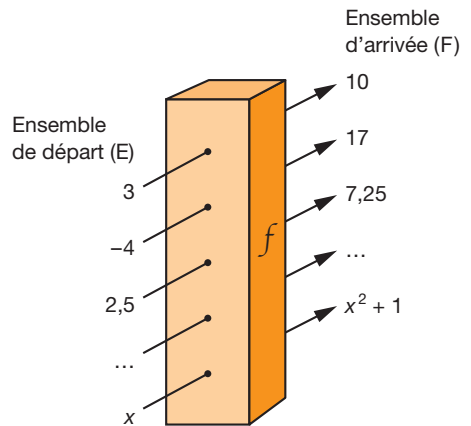
On note : $f: x \longmapsto x^2 + 1$

Par la fonction f , le nombre 3 est associé à 10.

En effet, si $x = 3$, $f(x) = 3^2 + 1 = 10$

On peut alors écrire cela de différentes façons :

$f: 3 \longmapsto 10$; $f(3) = 10$; l'image de 3 est 10.



FA

Représentation graphique

Définition

La représentation graphique d'une fonction f dans un repère du plan est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$.

Pour tracer la courbe représentative d'une fonction, il faut :

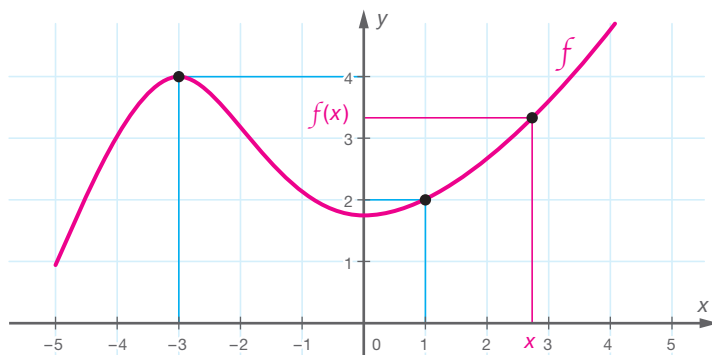
- Déterminer, si nécessaire, sa nature (fonction affine, quadratique, etc.) afin d'anticiper la forme de sa représentation graphique.
- Trouver les coordonnées d'un certain nombre de points que l'on peut rassembler dans un tableau de valeurs.
- Construire un repère en choisissant des graduations adaptées aux coordonnées calculées précédemment.
- Placer les points dans le repère.
- Les relier lorsque c'est pertinent.

Remarque La représentation graphique permet de lire les images de certaines valeurs de x .

Exemple

Soit la représentation graphique de la fonction f .

Sur cette représentation, on peut lire les images de certaines valeurs de x , par exemple, l'image de (-3) est 4, celle de 1 est 2.



→ Fonction affine (p. 62), Fonction quadratique (p. 67)

Définir une fonction

Il existe différentes façons de définir une fonction f .

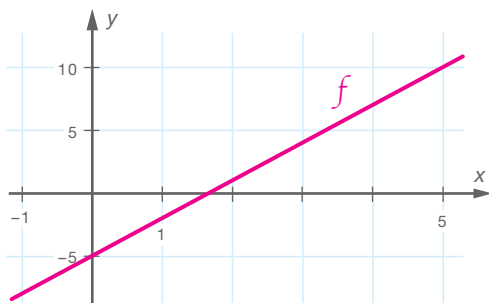
Considérons par exemple la fonction f qui associe à tout nombre son triple diminué de 5. On peut la définir de plusieurs manières :

- **Par un tableau de valeurs**

Élément de l'ensemble de départ	20	1	4,5	...	x
Image dans l'ensemble d'arrivée	55	-2	8,5	...	$3x - 5$

FA

- **Par une représentation graphique**



- **Par une expression fonctionnelle**

$$f: x \mapsto 3x - 5$$

ou $f(x) = 3x - 5$

ou $y = 3x - 5$

Dans cette écriture, x représente un nombre de l'ensemble de départ et $3x - 5$ son image dans l'ensemble d'arrivée.

→ Fonctions (p. 60), Représentation graphique (p. 60)

Fonction affine

Définition

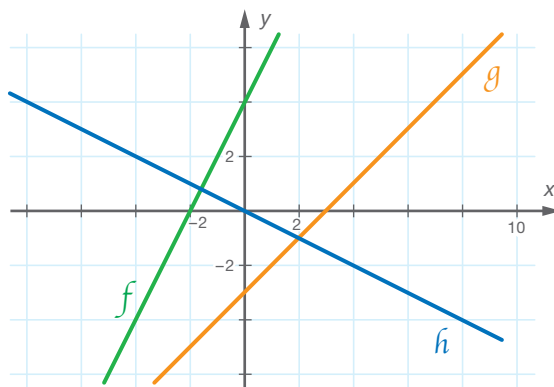
Une **fonction affine** est une fonction de la forme $x \mapsto ax + b$ ($a ; b \in \mathbb{R}$).
La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.

Exemples

$$f: x \mapsto 2x + 4$$

$$g: x \mapsto x - 3$$

$$h: x \mapsto -0,5x$$



Pente de la droite représentant une fonction affine

Propriété 1

Pour calculer la **pente** p d'une droite qui passe par les points $M(x_1 ; y_1)$ et $N(x_2 ; y_2)$, on utilise la formule $p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

FA

Remarque

La pente d'une droite peut être négative, contrairement à la pente d'un terrain, d'une route, etc., qui est toujours positive. Pour exprimer le fait de monter ou de descendre, notamment dans les courses de montagne, on utilise les expressions « dénivelé positif » et « dénivelé négatif ».

Propriétés 2

Dans l'expression fonctionnelle $x \mapsto ax + b$,

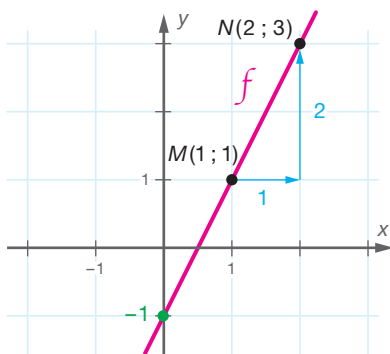
- le nombre a est la **pente** de la droite ;
- le nombre b est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe vertical (**axe des ordonnées**). On l'appelle l'**ordonnée à l'origine**.

Exemples

$$f: x \mapsto 2x - 1$$

La pente de la droite est 2.

L'ordonnée à l'origine est -1.

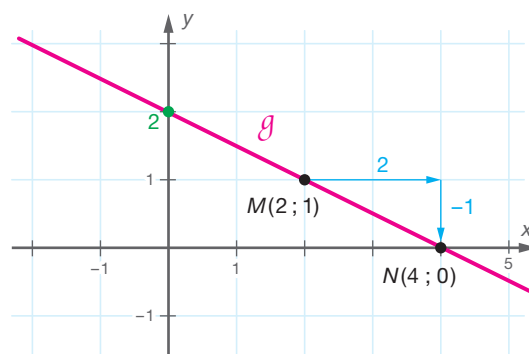


$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$g: x \mapsto -0,5x + 2$$

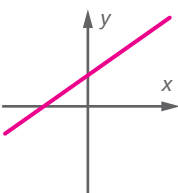
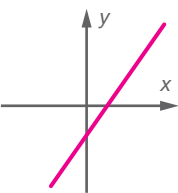
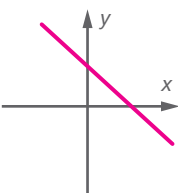
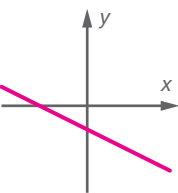
La pente de la droite est -0,5.

L'ordonnée à l'origine est 2.



$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{4 - 2} = \frac{-1}{2} = -0,5$$

Généralités

Pente positive		Pente négative	
			
$a > 0$ et $b > 0$	$a > 0$ et $b < 0$	$a < 0$ et $b > 0$	$a < 0$ et $b < 0$

Construire la représentation graphique d'une fonction affine

Méthode 1

À l'aide des coordonnées de deux points.

Exemple Construire la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 0,5x - 3$

ÉTAPE 1

Déterminer la nature de la fonction et anticiper sa représentation graphique.

$f: x \mapsto 0,5x - 3$ est de la forme $x \mapsto ax + b$ ($a; b \in \mathbb{R}$).

C'est une fonction affine, donc sa représentation graphique est une droite.

ÉTAPE 2

Trouver, à l'aide de l'expression fonctionnelle, les coordonnées de deux points appartenant à la droite.

Remarque

Pour une question de précision ou de contrôle, il peut être utile de trouver les coordonnées d'un troisième point de la droite.

ÉTAPE 3

Placer ces deux ou trois points dans le graphique et tracer la droite qui passe par ces points.

x	0	4
$0,5x - 3$	$0,5 \cdot 0 - 3 = -3$	$0,5 \cdot 4 - 3 = -1$

The figure shows a Cartesian coordinate system with a grid. The x-axis and y-axis are labeled. The origin is marked with 0. The x-axis has a tick mark at 4, and the y-axis has a tick mark at -3. A pink line, labeled with a pink italicized f , passes through two points marked with black dots. The first point is labeled $M(0; -3)$ and is located at the intersection of the y-axis and the line. The second point is labeled $N(4; -1)$ and is located at the intersection of the vertical line $x=4$ and the pink line. The line extends across the grid, passing through the points $(-2, -4)$ and $(6, 0)$.

Méthode 2

À l'aide de la pente et de l'ordonnée à l'origine.

Exemple Construire la représentation graphique de la fonction

$$f: x \mapsto 0,5x - 3$$

ÉTAPE 1

Déterminer la nature de la fonction et anticiper sa représentation graphique.

$f: x \mapsto 0,5x - 3$ est de la forme
 $x \mapsto ax + b$ ($a; b \in \mathbb{R}$).

C'est bien une fonction affine, donc sa représentation graphique est une droite.

ÉTAPE 2

Déterminer l'ordonnée à l'origine et placer le point correspondant.

Le point $M(0; -3)$ appartient à la droite représentant la fonction.

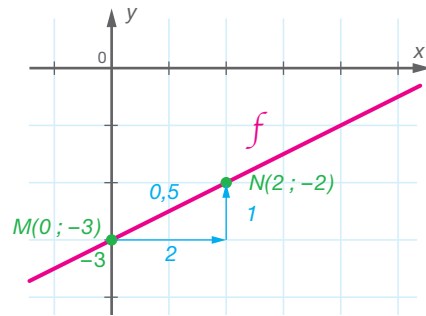
Ordonnée à l'origine: -3 .

ÉTAPE 3

Déterminer la pente, puis à partir du point précédemment placé et en utilisant la pente de la droite, placer un deuxième point. Tracer ensuite la droite qui passe par ces points.

Remarque

Pour vérifier que la représentation graphique est correcte, on peut déterminer les coordonnées d'un point à l'aide de l'expression fonctionnelle et vérifier qu'il appartient bien à la droite.

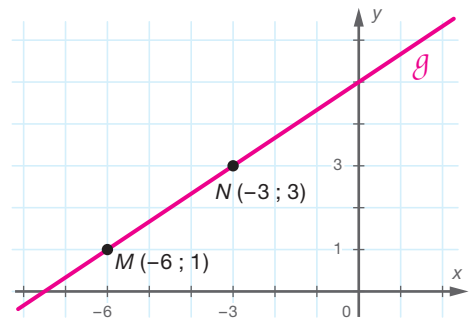


FA

Déterminer la pente d'une droite à partir de sa représentation graphique

Méthode

Exemple Déterminer la pente de la droite g .



ÉTAPE 1

Trouver les coordonnées de deux points de la droite g . Choisir si possible des points dont les coordonnées sont entières.

Par exemple, les points $M(-6; 1)$ et $N(-3; 3)$.

ÉTAPE 2

Calculer la différence des ordonnées de ces deux points, puis la différence des abscisses de ces deux points.

$$y_2 - y_1 = 3 - 1 = 2$$

$$x_2 - x_1 = (-3) - (-6) = 3$$

⚠ Bien garder le même ordre des points pour calculer ces deux différences.

ÉTAPE 3

Utiliser la formule du calcul de la pente.

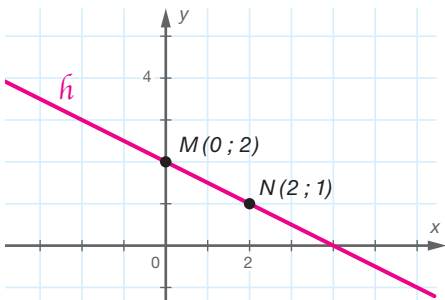
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{3}$$

La pente de la droite g vaut $\frac{2}{3}$.

Déterminer l'expression fonctionnelle d'une fonction affine à partir de sa représentation graphique

Méthode

Exemple Déterminer l'expression fonctionnelle de la fonction affine représentée par la droite $\hat{f}_1$.



ÉTAPE 1	Noter l'expression fonctionnelle d'une fonction affine sous sa forme généralisée.	$\hat{f}_1 : x \longmapsto ax + b \quad (a ; b \in \mathbb{R})$
ÉTAPE 2	Chercher l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe vertical pour trouver la valeur de b (ordonnée à l'origine).	Point d'intersection : $(0 ; 2)$. Donc ici $b = 2$.
ÉTAPE 3	Trouver les coordonnées d'un deuxième point de la droite $\hat{f}_1$. Choisir, si possible, un point dont les coordonnées sont entières.	Par exemple le point $(2 ; 1)$.
ÉTAPE 4	Calculer la pente de la droite $\hat{f}_1$ à l'aide des coordonnées des deux points précédemment déterminées.	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 2}{2 - 0} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ Donc ici, $a = -\frac{1}{2}$
ÉTAPE 5	Noter l'expression fonctionnelle de cette fonction affine.	$\hat{f}_1 : x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 2$

Cas particuliers de la fonction affine

Définitions

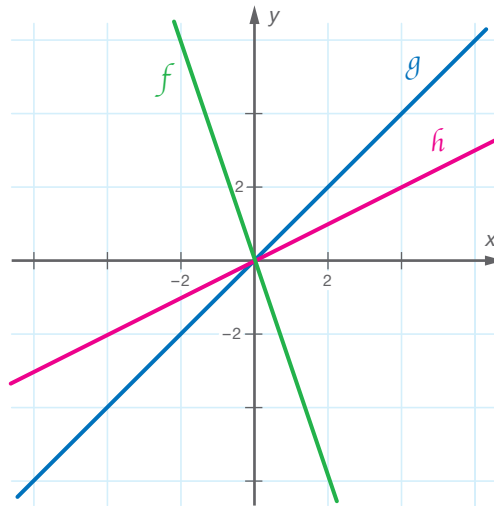
- Une **fonction linéaire** est une fonction affine pour laquelle $b = 0$. Son expression fonctionnelle est de la forme $x \mapsto ax$ ($a \in \mathbb{R}$). La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine des axes.
- Le nombre réel a s'appelle le **facteur de linéarité** (ou coefficient de linéarité). Il représente la pente de la droite.

Exemples

$$f: x \mapsto -3x$$

$$g: x \mapsto x$$

$$h: x \mapsto 0,5x$$



FA

Remarque

Toute relation de proportionnalité entre deux grandeurs peut être représentée par une fonction linéaire.

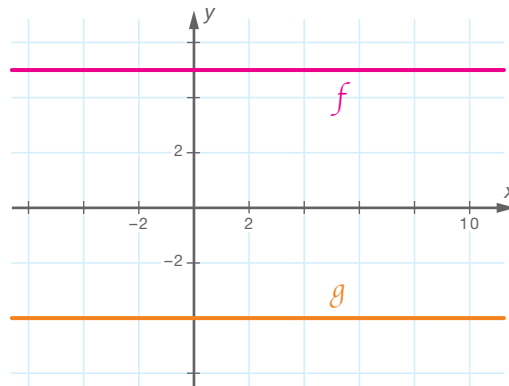
Définition

Une **fonction constante** est une fonction affine dont l'expression fonctionnelle est de la forme $x \mapsto b$ ($b \in \mathbb{R}$). Sa pente est nulle ($a = 0$). La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemples

$$f: x \mapsto 5$$

$$g: x \mapsto -4$$



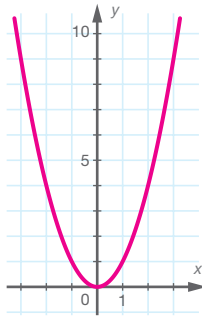
→ Fonctions (p. 60), Représentation graphique (p. 60), Fonction affine (p. 62), Proportionnalité (p. 69), Pente (p. 74)

Fonction quadratique

Définitions

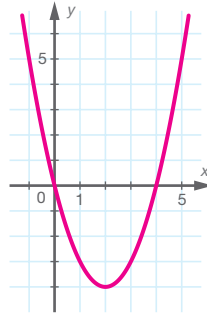
- Une **fonction quadratique** est une fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
- La représentation graphique d'une fonction quadratique est une **parabole**.

Exemples



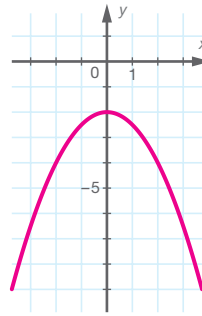
$$x \mapsto x^2$$

($a = 1$; $b = 0$; $c = 0$)



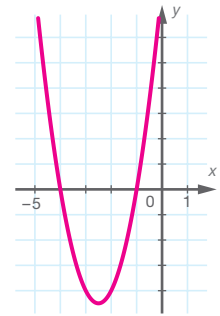
$$x \mapsto x^2 - 4x$$

($a = 1$; $b = -4$; $c = 0$)



$$x \mapsto -0,5x^2 - 2$$

($a = -0,5$; $b = 0$; $c = -2$)



$$x \mapsto 2x^2 + 10x + 8$$

($a = 2$; $b = 10$; $c = 8$)

ETYM Quadratique: du latin *quadratus*, carré.

Fonction cubique

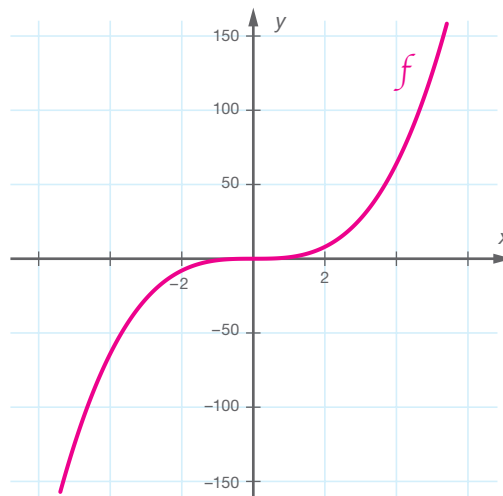
FA

Définition

Une **fonction cubique** est une fonction de la forme $x \mapsto ax^3$ ($a \neq 0$; $a \in \mathbb{R}$).

Exemple

$$f: x \mapsto x^3$$



Fonction racine carrée

Définition La **fonction racine carrée** est une fonction de la forme $x \mapsto \sqrt{x}$ ($x \geq 0$).

Exemple

$$f: x \mapsto \sqrt{x}$$



Fonction homographique

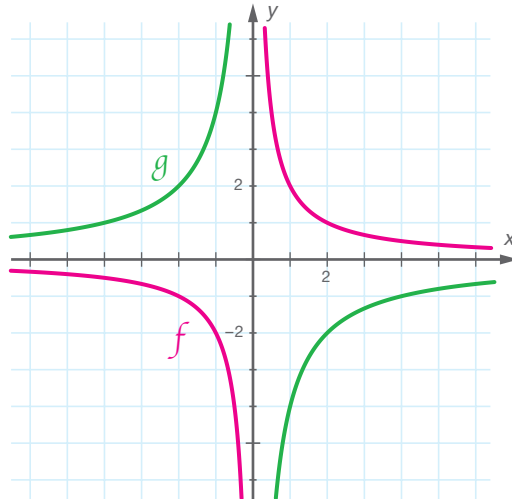
Définitions

- Les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$; $x \neq 0$; $a \in \mathbb{R}$) sont des **fonctions homographiques**.
- Leur représentation graphique est une **hyperbole**.
- Une hyperbole comporte deux **branches**.

Exemples

$$f: x \mapsto \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$g: x \mapsto \frac{-4}{x} \quad (x \neq 0)$$



Proportionnalité

Généralités

Définition

Deux grandeurs sont proportionnelles si l'on peut calculer les valeurs de l'une en multipliant (ou en divisant) les valeurs de l'autre par un même nombre non nul. Ce nombre est appelé **facteur de proportionnalité** (ou facteur de linéarité).

Remarque

Le tableau présentant des valeurs de grandeurs proportionnelles est appelé **tableau de proportionnalité**.

Exemples

- À une même pompe, le prix à payer et la quantité d'essence achetée sont proportionnels. En effet, pour obtenir le prix à payer on multiplie la quantité d'essence (en l) par le prix d'un litre. On dit aussi que le prix à payer est proportionnel à la quantité d'essence achetée ou que la quantité d'essence est proportionnelle au prix à payer.
- Le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur de son côté.

Longueur du côté	3	6	c
Périmètre	12	24	4c

·4

Le facteur de proportionnalité est 4.

- Les grandeurs composées suivantes correspondent toutes à des situations de proportionnalités : pourcentage, échelle, vitesse moyenne, masse volumique.

FA

Contre-exemples

- L'âge d'une personne n'est pas proportionnel à sa taille. En effet, il n'y a pas de facteur de proportionnalité qui permette de passer de l'âge de la personne à sa taille.
- L'aire d'un carré n'est pas proportionnelle à la longueur de son côté.

Côté du carré	2	3	c
Aire du carré	4	9	c ²

·2

·3

Il n'y a pas de facteur de proportionnalité permettant de passer du côté du carré à son aire.

Remarque

La fonction associée à une situation de proportionnalité est une fonction linéaire.

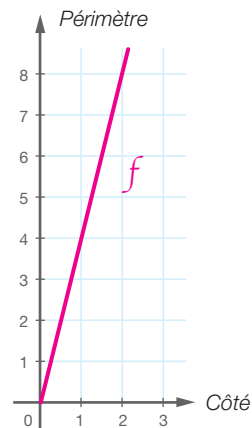
Exemple

Le périmètre d'un carré et la longueur d'un de ses côtés est une situation de proportionnalité (cf. ci-contre).

Elle peut être représentée par la fonction qui associe $f: c \mapsto 4c$.

C'est bien une fonction linéaire.

Sa représentation est dans ce cas une demi-droite qui passe par l'origine du repère puisqu'il n'y a que des valeurs positives.



Propriété 1 Dans un tableau de proportionnalité, il y a **égalité des rapports**. Une égalité de deux rapports est une proportion.

Grandeur 1	x	y	z
Grandeur 2	x'	y'	z'



c est le facteur de proportionnalité.

On a : $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = c$

Exemple

Dans le tableau de proportionnalité suivant, exprimant le prix des abricots en fonction du poids, on a bien l'égalité des rapports.

Quantité d'abricots en kg	4	7	13
Prix en francs	20	35	65



On a : $\frac{20}{4} = \frac{35}{7} = \frac{65}{13} = 5$

Propriété 2 Si les grandeurs 1 et 2 sont proportionnelles, on peut utiliser la **propriété de la somme** illustrée par le tableau ci-dessous.

Grandeur 1	x	y	x + y
Grandeur 2	x'	y'	x' + y'

Exemple

Dans le tableau de proportionnalité suivant exprimant la hauteur d'une pile de pièces de 50 centimes en fonction du nombre de pièces, la propriété de la somme est bien vérifiée.

Nombre de pièces	8	20	28
Hauteur de la pile en mm	10	25	35

FA

Propriété 3 Les grandeurs 1 et 2 sont proportionnelles, on peut utiliser la **propriété du produit** illustrée par le tableau ci-dessous.

Grandeur 1	x	kx
Grandeur 2	x'	kx'

Exemple

Dans le tableau de proportionnalité suivant exprimant la hauteur d'une pile de pièces 50 centimes en fonction du nombre de pièces, la propriété du produit est bien vérifiée.

Nombre de pièces	8	40	120
Hauteur de la pile en mm	10	50	150

Remarque Pour savoir si deux grandeurs sont proportionnelles on peut :

- Chercher s'il existe un facteur de proportionnalité.
- Représenter graphiquement la situation pour voir s'il s'agit d'une droite passant par l'origine.

→ Fonction linéaire (p. 66), Pourcentage (p. 72), Échelle (p. 73), Pente (p. 74), Vitesse moyenne (p. 75), Masse volumique (p. 76), Débit (p. 77)

Résoudre un problème de proportionnalité

Pour toutes ces méthodes, il faut s'assurer avant tout qu'il y a bien proportionnalité entre les deux grandeurs en jeu de l'énoncé, ce qui est bien le cas dans les exemples qui suivent.

Méthode 1

À l'aide de la propriété du produit.

Exemple 5 croissants coûtent 6 francs.
Quel est le prix de 15 croissants ?

ÉTAPE 1 Peut-on trouver facilement la grandeur cherchée à l'aide de la propriété du produit ?	Oui, $15 = 3 \cdot 5$ 15 croissants coûtent trois fois plus cher que 5 croissants.
ÉTAPE 2 Appliquer la propriété du produit des grandeurs.	Prix de 15 croissants (en francs): $3 \cdot 6 = 18$

Méthode 2

À l'aide de la propriété de la somme.

Exemple 5 croissants coûtent 6 francs et 6 croissants coûtent 7.20 francs.
Quel est le prix de 11 croissants ?

ÉTAPE 1 Peut-on trouver la grandeur cherchée à l'aide de la propriété de la somme ?	Oui, $11 = 5 + 6$ Le prix de 11 croissants est la somme du prix de 5 croissants et du prix de 6 croissants.
ÉTAPE 2 Appliquer la propriété de la somme des grandeurs.	Prix de 11 croissants (en francs): $6 + 7,2 = 13,2$

Méthode 3

À l'aide du retour à l'unité.

Exemple 5 croissants coûtent 6 francs.
Quel est le prix de 3 croissants ?

ÉTAPE 1 Chercher la valeur de l'unité pour l'une des deux grandeurs.	On calcule le prix de 1 croissant. $6 : 5 = 1,2$ 1 croissant coûte 1.20 franc.
ÉTAPE 2 Multiplier la valeur de l'unité par la quantité recherchée.	Prix de 3 croissants (en francs): $3 \cdot 1,2 = 3,6$

FA

Méthode 4

À l'aide du facteur de proportionnalité.

Exemple 5 croissants coûtent 6 francs.
Quel est le prix de 7 croissants ?

ÉTAPE 1 Faire un tableau de proportionnalité et chercher le facteur de proportionnalité.	Le facteur de proportionnalité est: $\frac{6}{5} = 1,2$ <table><tr><td>Nombre de croissants</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>Prix des croissants</td><td>6</td><td></td></tr></table>	Nombre de croissants	5	7	Prix des croissants	6	
Nombre de croissants	5	7					
Prix des croissants	6						
ÉTAPE 2 Compléter le tableau en utilisant le facteur de proportionnalité.	<table><tr><td>Nombre de croissants</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>Prix des croissants</td><td>6</td><td>$7 \cdot 1,2 = 8,4$</td></tr></table> Donc le prix de 7 croissants est de 8.40 francs.	Nombre de croissants	5	7	Prix des croissants	6	$7 \cdot 1,2 = 8,4$
Nombre de croissants	5	7					
Prix des croissants	6	$7 \cdot 1,2 = 8,4$					

Méthode 5

À l'aide de la propriété de l'égalité des rapports.

Exemple 5 croissants coûtent 6 francs.
Quel est le prix de 9 croissants ?

ÉTAPE 1 Écrire une proportion en utilisant la propriété de l'égalité des rapports.	$\frac{5}{6} = \frac{9}{x}$
ÉTAPE 2 Appliquer la propriété de l'égalité des rapports et résoudre l'équation. Remarque Pour écrire la proportion correctement, on peut s'aider d'un tableau de proportionnalité.	$\frac{5}{6} = \frac{9}{x}$ $5 \cdot x = 9 \cdot 6$ donc $x = \frac{54}{5} = 10,8$ Donc le prix de 9 croissants est de 10.80 francs.

Pourcentage

Définition

Un **pourcentage** est un facteur de proportionnalité entre deux grandeurs, une «**partie**» et un «**tout**» qui est fixé à 100.

Par conséquent, ce facteur s'exprime sous la forme d'une **fraction dont le dénominateur est égal à 100**.

Notation

$\frac{20}{100}$ est un pourcentage qui se note 20 % et qui se lit «vingt pour-cent».

$$20\% = \frac{20}{100} = 0,20$$

Exemple

Dire qu'il y a 20 % de chocolat dans un gâteau signifie :

- Qu'il y a proportionnalité entre la masse de chocolat (*la partie*) et la masse de gâteau (*le tout*).
- Qu'il y a 20 g de chocolat pour 100 g de gâteau. Par conséquent, $20\% = \frac{20}{100} = 0,20$ est le facteur de proportionnalité qui permet de passer du *tout* à sa *partie*.

Remarques

- Pour calculer le pourcentage d'un nombre, on peut utiliser un tableau de proportionnalité, mais comme on connaît le facteur de proportionnalité (le pourcentage), on peut directement multiplier ce nombre par le pourcentage.

Exemple

Dans un pot de yoghourt de 180 grammes, il y a 4 % de matières grasses.

Quelle est la quantité de matières grasses, en grammes, dans ce pot ?

$$180 \cdot \frac{4}{100} = 180 \cdot 0,04 = 7,2$$

La quantité de matières grasses de ce pot est de 7,2 g.

- Le tout peut aussi être fixé à 1000. On parle alors de ‰ (pour-mille).

Exemple

Le taux de natalité en Suisse en 2016 était de 10,5‰.

→ Proportionnalité (p. 69)

FA

Déterminer un pourcentage

Méthode

À l'aide de la propriété du produit.

Exemple Dans un village de 600 habitants, il y a 210 habitants de langue française. Quel est le pourcentage d'habitants de langue française dans ce village ?

ÉTAPE 1	
Identifier la «partie» et le «tout».	La «partie» : les habitants de langue française. Le «tout» : les habitants du village.
ÉTAPE 2	
Chercher le facteur de proportionnalité en divisant la partie par le tout.	$\frac{210}{600} = 0,35$
ÉTAPE 3	
Écrire le résultat sous forme d'une fraction dont le dénominateur est 100.	$0,35 = \frac{35}{100}$
ÉTAPE 4	
Conclure.	Le pourcentage d'habitants de langue française dans ce village est de 35 %.

Échelle

Définition

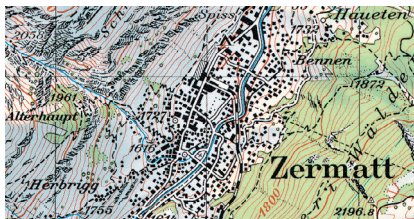
Lorsque les dimensions d'une reproduction (plan, carte, maquette, dessin, photo, etc.) et les dimensions réelles sont proportionnelles, on appelle échelle le rapport d'une longueur mesurée sur le plan par la longueur réelle correspondante, exprimée dans la même unité.

$$\text{Échelle} = \frac{\text{Longueur mesurée sur la reproduction (plan, carte, etc.)}}{\text{Longueur réelle}}$$

Remarques

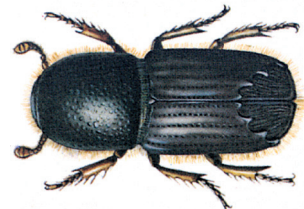
- Si l'échelle est inférieure à 1, la reproduction est une réduction de la réalité.
- Si elle est supérieure à 1, la reproduction est un agrandissement de la réalité.
- L'échelle n'a pas d'unité, c'est un facteur de proportionnalité.

Exemples



$$\text{Échelle: } 1:50\,000 \text{ ou } \frac{1}{50\,000}$$

La carte topographique est une réduction de la réalité. Chaque dimension réelle a été divisée par 50 000.



$$\text{Échelle: } 10:1 \text{ ou } \frac{10}{1}$$

Le dessin du coléoptère est un agrandissement de la réalité. Chaque dimension réelle a été multipliée par 10.

- Une échelle peut être exprimée de plusieurs manières:

- Par un quotient
- Par un dessin
- Par une indication du type

Exemples

$$1:50\,000 \text{ ou } \frac{1}{50\,000}$$



«2 cm sur la carte correspondent à 1 km en réalité»

- L'échelle permet de mettre en relation la distance mesurée sur une carte, un dessin, etc. avec la distance réelle. Il est donc possible de calculer l'une de ces grandeurs quand on connaît les deux autres.

→ Proportionnalité (p. 69), Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule (p. 97)

Déterminer l'échelle d'une reproduction de la réalité

Méthode

Exemple Sur une carte, une distance de 3 km est représentée par une distance de 12 cm. Quelle est l'échelle de cette carte ?

ÉTAPE 1 Écrire la formule de l'échelle.	$\text{Échelle} = \frac{\text{Longueur mesurée sur la carte}}{\text{Longueur réelle}}$
ÉTAPE 2 Exprimer les longueurs dans la même unité.	$3 \text{ km} = 300\,000 \text{ cm}$
ÉTAPE 3 Appliquer la formule et exprimer l'échelle sous la forme d'une fraction dont : • le numérateur est égal à 1 dans le cas d'une réduction ; • le dénominateur est égal à 1 dans le cas d'un agrandissement.	$\text{Échelle} = \frac{12}{300\,000} = \frac{1}{25\,000}$
ÉTAPE 4 Conclure.	L'échelle de la carte est 1:25 000.

Pente

Définition

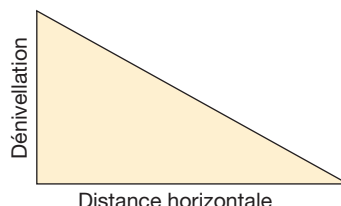
La **pente moyenne** d'un terrain, d'une route, etc. est le rapport de la dénivellation (différence d'altitude) par la distance horizontale, exprimée dans la même unité.

$$\text{Pente} = \frac{\text{Dénivellation}}{\text{Distance horizontale}}$$

Remarques

- Une pente s'exprime généralement à l'aide d'un pourcentage.

Quand une pente est constante, il y a proportionnalité entre la dénivellation et la distance horizontale.



- La pente n'a pas d'unité, c'est un facteur de proportionnalité.

Exemple

Le panneau ci-contre indique que, en moyenne, sur ce tronçon de route pour une distance horizontale de 100 m, la dénivellation est de 10 m.

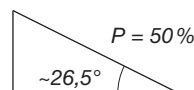
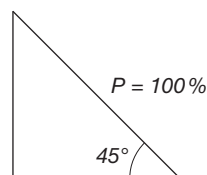


- La pente peut aussi s'exprimer en degrés.

⚠ Il n'y a pas proportionnalité entre la pente exprimée en pour-cent et en degré.

Exemple

Une pente de 100 % correspond à un angle de 45°, mais une pente de 50 % ne correspond pas à un angle de 22,5°, mais à un angle d'environ 26,5°.



- La pente permet de mettre en relation la dénivellation et la distance horizontale d'une route. Il est donc possible de calculer l'une de ces grandeurs quand on connaît les deux autres.

→ Proportionnalité (p. 69), Pourcentage (p. 72), Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule (p. 97), Degré (angle) (p. 115)

FA

Déterminer la pente moyenne

Méthode

Exemple À l'aide d'une carte, on constate que sur une distance horizontale de 2,5 km, la dénivellation d'une route est de 150 m. Quelle est la pente moyenne de ce tronçon de route ?

ÉTAPE 1	Écrire la formule de la pente.	$\text{Pente} = \frac{\text{Dénivellation}}{\text{Distance horizontale}}$
ÉTAPE 2	Exprimer les longueurs dans la même unité.	$2,5 \text{ km} = 2500 \text{ m}$
ÉTAPE 3	Appliquer la formule et exprimer la pente sous forme d'un pourcentage.	$\text{Pente} = \frac{150}{2500} = 0,06 = 6\%$
ÉTAPE 4	Conclure.	La pente moyenne est de 6 %.

Vitesse moyenne

Définition

La **vitesse moyenne** v d'un mobile est le rapport entre la distance parcourue d et la durée du parcours t , appelé aussi temps du parcours.

$$v = \frac{d}{t}$$

Unités usuelles : km/h et m/s.

Remarques

- Quand la vitesse est constante, il y a proportionnalité entre la distance parcourue et le temps de parcours.

Exemple

Une voiture qui roule à la vitesse moyenne de 70 km/h signifie qu'en une heure elle parcourt 70 km. Donc en 2 heures elle parcourt 140 km.

- Dans le langage courant, on parle tout autant de durée de parcours que de temps de parcours d'où le t dans la formule.
- La vitesse permet de mettre en relation la distance parcourue et le temps de parcours. Il est donc possible de calculer l'une de ces grandeurs quand on connaît les deux autres.

Exemples de quelques vitesses

- Vitesse maximale de chute libre (parachutiste) : de l'ordre de 70 m/s soit environ 250 km/h.
- Vitesse du son dans l'air : 343 m/s soit environ 1200 km/h.
- Vitesse de la lumière dans le vide : 300 000 km/s.

→ Proportionnalité (p. 69), Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule (p. 97)

FA

Déterminer la vitesse moyenne

Méthode

Exemple Un piéton parcourt 7 km en 1 h 24 min
Quelle est sa vitesse moyenne en km/h ?

ÉTAPE 1	Écrire la formule de la vitesse.	$v = \frac{\text{Distance parcourue}}{\text{Durée de parcours}} = \frac{d}{t}$
ÉTAPE 2	Exprimer la distance et le temps dans les unités demandées.	$d = 7 \text{ km}$ $t = 1 \text{ h } 24 \text{ min} = 1,4 \text{ h}$
ÉTAPE 3	Appliquer la formule.	$v \text{ en km/h} = \frac{7}{1,4} = 5$
ÉTAPE 4	Conclure.	La vitesse moyenne du piéton est de 5 km/h.

Masse volumique

Définition

La **masse volumique moyenne** ρ d'un objet ou d'une substance est égale au rapport de sa masse m et son volume V .

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Unités usuelles : kg/m^3 ou g/cm^3 .

Remarques

- Quand l'objet ou la substance est homogène, il y a proportionnalité entre sa masse et son volume.

Exemple

Si l'on dit qu'un objet ou une substance a une masse volumique de 15 g/cm^3 , cela signifie que 1 cm^3 de cet objet ou de cette substance a une masse de 15 g.

Donc pour 10 cm^3 , cet objet ou cette substance a une masse de 150 g.

- La masse volumique permet de mettre en relation la masse et le volume d'un objet. Il est donc possible de calculer l'une de ces grandeurs quand on connaît les deux autres.

Exemples de masses volumiques

- Eau pure : $1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ kg/l}$
- Air (à 0°) : $1,29 \text{ kg/m}^3 = 1,29 \text{ g/l}$
- Fer : 7690 kg/m^3
- Sapin : 500 kg/m^3

→ Proportionnalité (p. 69), Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule (p. 97)

FA

Déterminer la masse volumique d'un objet

Méthode

Exemple Une plaque de granit de $2,5 \text{ m}^3$ a une masse de 6,5 t. Quelle est la masse volumique de ce granit en kg/m^3 ?

ÉTAPE 1	Écrire la formule de la masse volumique.	$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volume}} = \frac{m}{V}$
ÉTAPE 2	Exprimer la masse et le volume dans les unités demandées.	$6,5 \text{ t} = 6500 \text{ kg}$
ÉTAPE 3	Appliquer la formule.	$\rho \text{ en kg/m}^3 = \frac{6500}{2,5} = 2600$
ÉTAPE 4	Conclure.	La masse volumique du granit est de 2600 kg/m^3 .

Débit

Définition

Le **débit moyen d** d'un liquide (ou d'une matière) qui s'écoule est égal au rapport du volume V de liquide (ou de la quantité de matière) par la durée de l'écoulement t .

$$d = \frac{V}{t}$$

Les unités usuelles de débit dépendent de la matière qui s'écoule :

- s'il s'agit de liquide, on utilise souvent le m^3/s , le l/s ;
- s'il s'agit d'information (comme pour internet), on utilise le kb/s ou Kbps qui est le kilobit par seconde.

Remarques

- Quand le débit est constant, il y a proportionnalité entre le volume et la durée de l'écoulement.

Exemple

Le débit moyen du Rhône est de $165 \text{ m}^3/\text{s}$ à l'entrée du lac Léman.

Cela signifie qu'en une seconde, il s'écoule 165 m^3 d'eau soit $165\,000 \text{ l}$.

Donc en 10 secondes, il s'écoulera $1\,650\,000$ litres d'eau.

- Le débit permet de mettre en relation le volume d'un écoulement et une durée. Il est donc possible de calculer l'une de ces grandeurs quand on connaît les deux autres.

→ Proportionnalité (p. 69), Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule (p. 97)

FA

Déterminer le débit

Méthode

Exemple Un robinet remplit un jerrican de 20 l en 2 minutes 13 secondes. Quel est le débit de ce robinet en l/s ?

ÉTAPE 1	Écrire la formule du débit.	$d = \frac{\text{Volume}}{\text{Durée de l'écoulement}} = \frac{V}{t}$
ÉTAPE 2	Exprimer le volume et la durée dans les unités demandées.	$t = 2 \text{ min } 13 \text{ s} = 133 \text{ s}$
ÉTAPE 3	Appliquer la formule.	$d \text{ en l/s} = \frac{20}{133} \approx 0,15$
ÉTAPE 4	Conclure.	Le débit de ce robinet est de $0,15 \text{ l/s}$.

Diagrammes

Diagramme

Définition

Un **diagramme** est une représentation graphique d'une ou plusieurs séries de données.

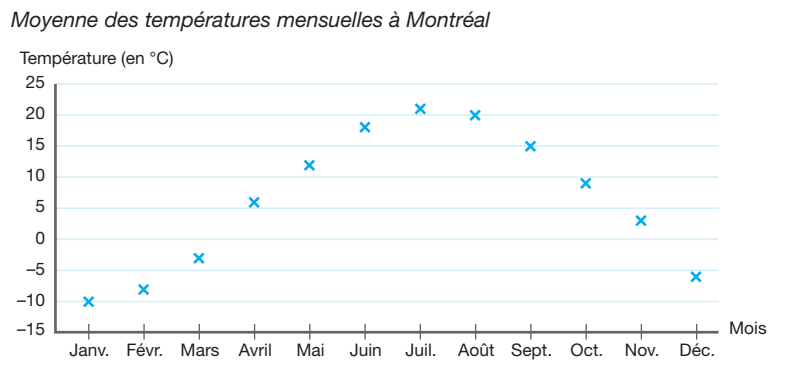
Il permet de visualiser les informations recueillies ou les prévisions d'évolution d'un phénomène.

Il existe plusieurs types de diagrammes.

Le diagramme cartésien

Le diagramme cartésien est constitué d'un ensemble de points dont les coordonnées correspondent aux données à représenter.

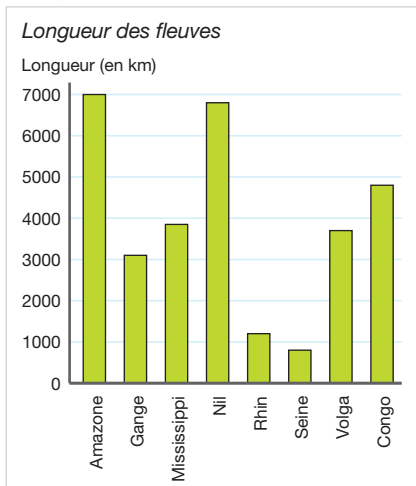
Exemple



Le diagramme en colonnes

Dans un diagramme en colonnes, toutes les colonnes ont la même largeur; les hauteurs des colonnes sont proportionnelles aux mesures des grandeurs représentées.

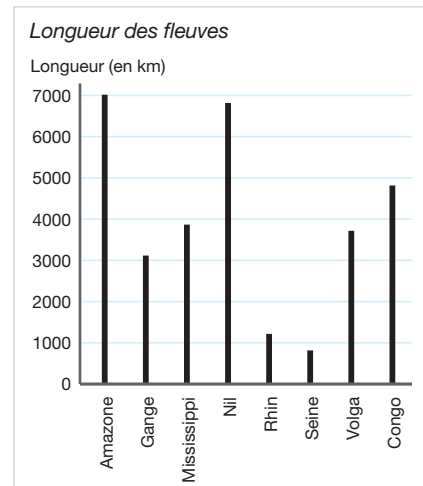
Exemple



Le diagramme en bâtons

Dans un diagramme en bâtons, les hauteurs des bâtons sont proportionnelles aux mesures des grandeurs représentées.

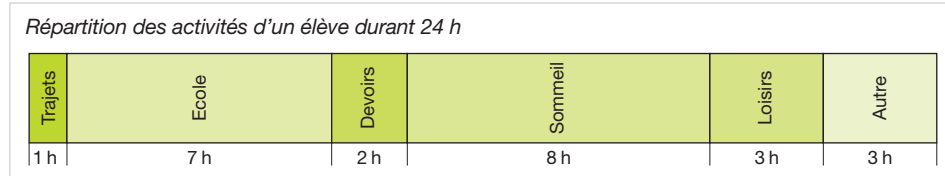
Exemple



Le diagramme en barre

Dans un diagramme en barre, les longueurs des parties sont proportionnelles aux mesures des grandeurs représentées.

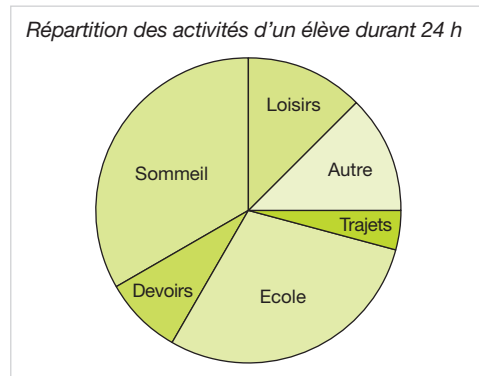
Exemple



Le diagramme circulaire

Dans un diagramme circulaire, le rayon du cercle peut être choisi arbitrairement; les mesures des angles des différentes parties sont proportionnelles aux mesures des grandeurs représentées.

Exemple



FA

Remarque

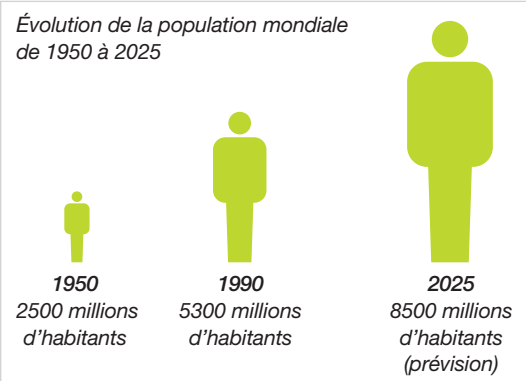
Le diagramme en barre et le diagramme circulaire servent à représenter les parties (ici la durée de chaque activité) par rapport à un tout (ici 24 h).

Le diagramme figuratif

Dans un diagramme figuratif, l'une des dimensions des figures est proportionnelle aux mesures des grandeurs représentées.

Exemple

Dans le diagramme figuratif ci-contre, il y a proportionnalité entre la hauteur des personnages et la population mondiale.



Remarque

Un diagramme figuratif est généralement ambigu, car il incite à comparer les aires des figures et non leurs longueurs uniquement.

ÉTYM Diagramme : du grec *diagramma*, figure dessinée, dessin.

→ Représentation graphique (p. 60), Proportionnalité (p. 69), Aire des surfaces usuelles (p. 179)

Construire un diagramme circulaire

Méthode

Exemple Représenter la situation suivante à l'aide d'un diagramme circulaire.
On a demandé aux élèves d'une même classe d'un collège quel était leur sport préféré. Voici les réponses obtenues :

Sport	Ski	Football	Basket	Tennis	Volley	Natation
Nb. de voix	8	5	4	3	2	2

ÉTAPE 1

Trouver l'effectif total.

Le nombre total des voix exprimées :
 $8 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 = 24$

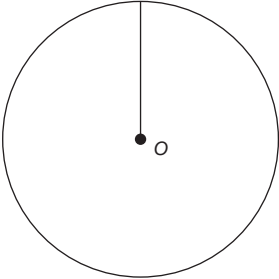
ÉTAPE 2

À l'aide d'un tableau de proportionnalité, calculer la valeur des angles en jeu.
(Vérifier que la somme des angles soit égale à 360°.)

		S	F	B	T	V	N
Nb. de voix	24	8	5	4	3	2	2
Mesure de l'angle en °	360	120	75	60	45	30	30

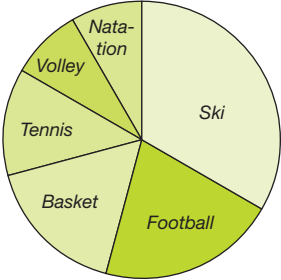
ÉTAPE 3

Construire un cercle de centre O et tracer un rayon.



ÉTAPE 4

À l'aide d'un rapporteur, construire successivement les différents secteurs de centre O en jou et les nommer.



→ Proportionnalité (p. 69), Mesurer un angle à l'aide d'un rapporteur (p. 116)

Calcul littéral

Expression littérale

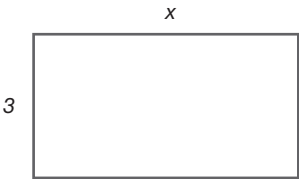
Définition Une **expression littérale** est une expression mathématique qui contient une ou plusieurs lettres appelées **variables**, **inconnues** ou **indéterminées**, suivant le contexte.

Exemples
 x ; $2 \cdot (y + 5)$; $4,8 - a + b$; $\frac{x^2}{3} + 3x$; $\frac{1}{z}$; $2y$; ... sont des expressions littérales.

- Les expressions littérales sont utiles pour :
- établir des formules, des expressions fonctionnelles dans ce cas, la lettre est appelée «**variable**» ;
 - résoudre des problèmes à l'aide d'équations dans ce cas, la lettre est appelée «**inconnue**» ;
 - prouver des conjectures sur les nombres dans ce cas, la lettre est appelée «**indéterminée**».

Remarque Une expression littérale «en fonction de x » est une expression qui contient la lettre x .

Exemple
Les expressions littérales $2 \cdot (x + 3)$ ou $3 + 3 + x + x$ expriment le périmètre du rectangle en «fonction de x ».



FA

Alléger l'écriture d'expressions littérales

Des conventions d'écriture, des propriétés et des définitions permettent d'alléger les écritures des expressions littérales.

Conventions d'écritures	Exemples
On peut supprimer le signe de la multiplication entre: • Un nombre et une lettre lorsque le nombre est devant la lettre. • Un nombre et une parenthèse lorsque le nombre est devant la parenthèse. • Une lettre et une parenthèse lorsque la lettre est devant la parenthèse.	$5 \cdot y = 5y$ $3 \cdot (x + y) = 3(x + y)$ $a \cdot (b + 5) = a(b + 5)$
Propriétés et définitions	
$1 \cdot a = a$ $a \cdot a = a^2$	$0 \cdot a = 0$ $a \cdot a \cdot a = a^3$
	$(-1) \cdot a = -a$

Égalité de deux expressions littérales

Définition

Deux expressions littérales sont égales si elles donnent le même résultat quelle que soit la valeur numérique attribuée à chacune des lettres qui figurent dans ces deux expressions.

Conséquences • Pour prouver que deux expressions littérales sont égales, on les réduit à l'aide des propriétés des opérations et des règles de priorité jusqu'à obtenir des expressions littérales identiques.

Exemple

Soit $A = 5m + 11 + 2(m - 3)$ et $B = 7m + 5$.

Ces deux expressions sont égales, en effet :

$$A = 5m + 11 + 2(m - 3)$$

$$A = 5m + 11 + 2m - 6$$

$$A = 5m + 2m + 11 - 6$$

$$A = 7m + 5$$

On peut donc conclure que $A = B$.

- Pour prouver que deux expressions littérales ne sont pas égales, il suffit de trouver une valeur numérique pour laquelle ces expressions donnent des résultats différents.

Exemple

$A = 5 + 3x$ et $B = 8x$ ne sont pas des expressions littérales égales, car pour $x = 4$,

A vaut $5 + 3 \cdot 4 = 17$ et B vaut $8 \cdot 4 = 32$.

FA

Monôme

Définitions

- Un **monôme** est une expression littérale qui est égale au produit d'un nombre réel par une ou des lettres dont le ou les exposants sont des entiers naturels.
- Le nombre est appelé **coefficient du monôme**.
- Le produit des lettres est appelé **partie littérale du monôme**.

Exemples

Monôme	$4x^2y$	$5x$	7	y	$\frac{a^2b}{4}$	$-\frac{z}{2}$
Coefficient	4	5	7	1 (car $y = 1y$)	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
Partie littérale	x^2y	x	Par exemple x^0 car $7 = 7x^0$	y	a^2b	z

Par contre, $\frac{5}{x}$; $\sqrt{x}$; $x + 5$ ne sont pas des monômes.

Degré d'un monôme

Définition

Le **degré d'un monôme** est égal à la somme des exposants de sa partie littérale.

Exemples

Le degré du monôme $5x^2$ est 2.

Le degré du monôme $4x^2y$ est $2 + 1 = 3$; en effet, $4x^2y = 4x^2y^1$.

Le degré du monôme 7 est 0 ; en effet, $7 = 7x^0$, par exemple.

Multiplication de monômes

Définition

Pour multiplier deux monômes, on multiplie leurs coefficients entre eux et leurs parties littérales entre elles.

Exemples

$$\begin{aligned} 3x \cdot 5y^2 &= 3 \cdot x \cdot 5 \cdot y^2 \\ &= 3 \cdot 5 \cdot x \cdot y^2 \\ &= 15xy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x^3y^2 \cdot 4x^2y &= -2 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot y \\ &= -2 \cdot 4 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot y \\ &= -8x^5y^3 \end{aligned}$$

Monômes semblables

Définition

Deux monômes sont **semblables** s'ils ont la **même partie littérale**.

Exemples

- $5x^2y$ et $-3x^2y$ sont des monômes semblables, car ils ont la même partie littérale : x^2y .
- $-7x$ et x sont des monômes semblables, car ils ont la même partie littérale : x .

Contre-exemples

- $5x^2$ et $5x$ ne sont pas des monômes semblables, car ils n'ont pas la même partie littérale : x^2 n'étant pas égal à x .
- $7x^2y$ et $7xy^2$ ne sont pas des monômes semblables, car ils n'ont pas la même partie littérale : x^2y n'étant pas égal à xy^2 .

Addition ou soustraction de monômes semblables

Définition

Pour additionner (ou soustraire) deux monômes semblables :

- On additionne (ou soustrait) leurs coefficients.
- On conserve la partie littérale.

Exemples

$$\begin{aligned} 4x^2 + 7x^2 &= (4 + 7) \cdot x^2 \\ &= 11x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2y - 9x^2y &= (2 - 9)x^2y \\ &= -7x^2y \end{aligned}$$

⚠ La somme $4 + 5x^2$ ne peut pas être réduite, car les monômes 4 et $5x^2$ ne sont pas des monômes semblables.

Polynôme

Définition

Un **polynôme** est une **somme de monômes**.

Ces monômes sont appelés les **termes** du polynôme.

Exemples

$\frac{y}{2} + 4$; $-x^2 + 1,5z$; $4xy^2 - 2y$; $5x^3$; ... sont des polynômes.

Par contre, $\frac{5}{x}$ n'est pas un polynôme, car $\frac{5}{x}$ n'est pas un monôme.

Remarque

Un polynôme peut être composé d'un seul ou de plusieurs monômes.

Exemples

$x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ est un polynôme formé de quatre termes.

$3x^2y$ est un polynôme formé d'un seul terme, c'est aussi un monôme.

$x - y$ est un binôme.

$x^2 + 2x + 1$ est un trinôme.

→ Monôme (p. 82)

Réduction d'un polynôme

Définition

Pour réduire un polynôme, on additionne (ou soustrait) ses monômes semblables.

Exemples

$$2x^2 - 4x + 5x^2 + x = 2x^2 + 5x^2 - 4x + x = \underline{7x^2 - 3x}$$

forme réduite

$$w^2 + 3 + 5w - 2w^2 - 8 + w = w^2 - 2w^2 + 5w + w + 3 - 8 = \underline{-w^2 + 6w - 5}$$

forme réduite

→ Monômes semblables (p. 83)

Degré d'un polynôme

Définition

Le **degré d'un polynôme** est le degré le plus élevé de ses monômes une fois ce polynôme réduit.

Exemples

$x + \frac{x^2}{5}$ est un polynôme de degré 2 (le monôme de plus haut degré est $\frac{x^2}{5}$).

$-2a^3 + a^3b - 4,4$ est un polynôme de degré 4 (le monôme de plus haut degré est a^3b).

Définition

Ordonner un polynôme par rapport à l'une de ses lettres, c'est le réduire puis écrire ses monômes dans l'ordre croissant ou décroissant de leur degré.

Exemples

$5m^2 + 2m - 1$ est un polynôme ordonné dans l'ordre décroissant des puissances de m .

$-2 + a^3 + 2ab - a^2b^3 + b^4$ est un polynôme ordonné dans l'ordre croissant des puissances de b .

$x^3 + 1 + x^2 + x$ est un polynôme qui n'est pas ordonné.

→ Ordre croissant et ordre décroissant (p. 25), Degré d'un monôme (p. 82)

FA

Addition de polynômes

Définition

Pour additionner deux polynômes, on additionne chaque terme de ces polynômes.

Propriété

Dans une expression littérale, on peut supprimer les parenthèses si elles ne sont précédées d'aucun signe ou du signe « + » et qu'elles ne sont pas suivies d'un signe « • », « : » ou d'une parenthèse.

Exemples

$$\begin{aligned} & (5x^2 - x) + (2x^2 + 9x - 10) \\ &= 5x^2 - x + 2x^2 + 9x - 10 && \text{Suppression des parenthèses précédées du signe +.} \\ &= 7x^2 + 8x - 10 && \text{Réduction du polynôme.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x + (-2x + 2) \\ &= 3x - 2x + 2 && \text{Suppression des parenthèses précédées du signe +.} \\ &= x + 2 && \text{Réduction du polynôme.} \end{aligned}$$

⚠ Dans l'expression $3x + (5x - 2) \cdot 3$, on ne peut pas enlever les parenthèses avant d'avoir développé le produit $(5x - 2) \cdot 3$ (priorité des opérations).

→ Priorités des opérations (p. 40), Polynôme (p. 83)

Polynômes opposés

Définition

Deux polynômes opposés sont deux polynômes dont la somme est égale à zéro.

Exemples

$6x^2$ et $-6x^2$ sont deux polynômes opposés, car $6x^2 + (-6x^2) = 6x^2 - 6x^2 = 0$

$y^2 + 5y - 12$ et $-y^2 - 5y + 12$ sont opposés, car $(y^2 + 5y - 12) + (-y^2 - 5y + 12)$
 $= y^2 + 5y - 12 - y^2 - 5y + 12 = 0$

Soustraction de polynômes

Définition

Pour soustraire un polynôme, on additionne son opposé.

Exemples

$$\begin{aligned} & 4y^3 - 2y + 5 - (3y^2 - 2y - 4) \\ &= 4y^3 - 2y + 5 + (-3y^2 + 2y + 4) \\ &= 4y^3 - 2y + 5 - 3y^2 + 2y + 4 \\ &= 4y^3 - 3y^2 + 9 \end{aligned}$$

Addition de l'opposé.

Suppression des parenthèses précédées du signe +.

Addition des monômes semblables.

Conséquence Soustraire un polynôme, c'est soustraire chaque terme de ce polynôme.

Exemples

$$\begin{aligned} & -6x^2 - 5x - 8 - (-3x^2 + 10x - 16) \\ &= -6x^2 - 5x - 8 - (-3x^2) - (+10x) - (-16) \\ &= -6x^2 - 5x - 8 + 3x^2 - 10x + 16 \\ &= -3x^2 - 15x + 8 \end{aligned}$$

→ Polynômes opposés (p. 85)

FA

Expression littérale : somme ou produit ?

Définitions

Pour savoir si une expression littérale est une **somme** ou un **produit**, on regarde dans cette expression la dernière opération à effectuer en respectant les règles de priorité des opérations.

- Si c'est une **addition** ou une soustraction, l'expression est une **somme**.
- Si c'est une **multiplication** ou une division, l'expression est un **produit**.

Exemples

$10 + 3x \cdot 5$ est une somme, car on doit d'abord effectuer la multiplication et donc la dernière opération à effectuer est une addition.

$(10 + 3x) \cdot 5$ est un produit, la dernière opération à effectuer est une multiplication.

Multiplication de polynômes

Propriété 1 Pour multiplier un monôme par un polynôme, on distribue ce monôme sur chacun des termes du polynôme.

Exemples

$$2a \cdot (a - x) = 2a \cdot a - 2a \cdot x = 2a^2 - 2ax$$

$$-2a \cdot (ab - xy + z) = (-2a) \cdot ab - (-2a) \cdot xy + (-2a) \cdot z = -2a^2b + 2axy - 2az$$

Propriété 2 Pour multiplier un polynôme par un polynôme, on multiplie chaque terme du premier par chaque terme du second puis on réduit la somme obtenue lorsque c'est possible.

Exemple

$$\begin{aligned} (y - 2) \cdot (2x + y - 5) &= y \cdot 2x + y \cdot y + y \cdot (-5) + (-2) \cdot (2x) + (-2) \cdot y + (-2) \cdot (-5) \\ &= y \cdot 2x + y \cdot y - y \cdot 5 - 2 \cdot 2x - 2y + 2 \cdot 5 \\ &= 2xy + y^2 - 5y - 4x - 2y + 10 \\ &= 2xy + y^2 - 7y - 4x + 10 \end{aligned}$$

Conséquence Quels que soient les monômes a , b , c et d ,
 $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$.
 Cette égalité est appelée **double distributivité**.

→ Monôme (p. 82), Polynôme (p. 83)

FA

Produits remarquables

Propriétés Quels que soient les monômes a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemples

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$(2y - 1)^2 = 4y^2 - 4y + 1$$

$$\left(\frac{x}{3} - 5\right)\left(\frac{x}{3} + 5\right) = \frac{x^2}{9} - 25$$

Remarque Ces produits remarquables appelés aussi **identités remarquables** ne sont que des cas particuliers de la double distributivité.

Il est important de les repérer surtout lorsque l'on doit factoriser une expression.

Exemple

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Développement d'un produit

Définition

Développer un produit, c'est le transformer en une somme.
On utilise alors la distributivité ou les produits remarquables.
Une fois le produit développé, on réduit le polynôme lorsque c'est possible.

Exemples

Avec la distributivité: $5xy(2x - 1 + 4y) = 10x^2y - 5xy + 20xy^2$
 $(2a + 3)(a^2 - 2a) = 2a^3 - 4a^2 + 3a^2 - 6a = 2a^3 - a^2 - 6a$

Avec un produit remarquable: $(2x + 3y)(2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

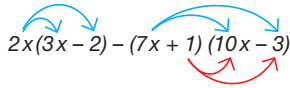
→ Réduction d'un polynôme (p. 84), Produits remarquables (p. 86)

Développer et réduire une expression littérale

Méthode 1

En utilisant la distributivité simple et double.

Exemple Développer et réduire l'expression $2x(3x - 2) - (7x + 1)(10x - 3)$

ÉTAPE 1 Utiliser la distributivité pour développer chacun des produits.	 $2x(3x - 2) - (7x + 1)(10x - 3)$ $= (2x \cdot 3x - 2x \cdot 2) - (7x \cdot 10x - 7x \cdot 3 + 1 \cdot 10x - 1 \cdot 3)$
ÉTAPE 2 Supprimer les parenthèses autour des polynômes en utilisant les propriétés de l'addition et de la soustraction de polynômes.	$= (6x^2 - 4x) - (70x^2 - 21x + 10x - 3)$ $= 6x^2 - 4x - 70x^2 + 21x - 10x + 3$
ÉTAPE 3 Réduire le polynôme en additionnant les monômes semblables.	$= -64x^2 + 7x + 3$

FA

Méthode 2

En utilisant un produit remarquable.

Exemple Développer et réduire l'expression $(5x - 2y)^2$

ÉTAPE 1 Identifier le produit remarquable à utiliser.	Il s'agit d'élever au carré une différence; le produit remarquable adéquat est donc : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ avec } a = 5x \text{ et } b = 2y$
ÉTAPE 2 Développer l'expression en utilisant cette formule.	$(5x - 2y)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 2y + (2y)^2$ $= 25x^2 - 20xy + 4y^2$

Remarque

Ces méthodes peuvent se combiner.

Exemples

Développer et réduire

$$2(2x + 3)(2x - 3) = 2(4x^2 - 9)$$

$$= 8x^2 - 18$$

Utilisation d'un produit remarquable.
Distributivité.

→ Réduction d'un polynôme (p. 84), Produits remarquables (p. 86)

Calculer la valeur numérique d'une expression littérale connaissant la valeur de la lettre

Méthode

Exemple Calculer la valeur de l'expression $3x + 6x^2 - x(5 + x)$ pour $x = 4$

ÉTAPE 1 Développer et réduire l'expression littérale.	$3x + 6x^2 - x(5 + x) = 3x + 6x^2 - 5x - x^2$ $= -2x + 5x^2$
ÉTAPE 2 Remplacer la lettre par la valeur numérique choisie en rajoutant, si nécessaire, les signes opératoires de la multiplication.	$\text{pour } x = 4$ $-2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2$
ÉTAPE 3 Effectuer les calculs en respectant les règles de priorité.	$= -8 + 5 \cdot 16$ $= -8 + 80$ $= 72$

→ Priorités des opérations (p. 40), Développer et réduire une expression littérale (p. 87)

Factorisation d'une expression littérale

Définition

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

Exemple

$$12a^2 - 8a + 20ab$$

$$= 4a \cdot 3a - 4a \cdot 2 + 4a \cdot 5b$$

$$= 4a(3a - 2 + 5b)$$

Somme de 3 monômes.

Produit d'un monôme ($4a$) et d'un polynôme ($3a - 2 + 5b$).

→ Expression littérale : somme ou produit ? (p. 85)

Factoriser une expression littérale

Méthode 1

En utilisant la mise en évidence d'un monôme $ab + ac = a(b + c)$

Exemple Factoriser l'expression

$$10x^3 - 5x^2 + 5x$$

ÉTAPE 1 Vérifier que l'expression soit sous sa forme réduite.	Les termes sont : $10x^3$, $-5x^2$ et $5x$. Il n'y a aucun monôme semblable, donc l'expression est réduite.
ÉTAPE 2 Y a-t-il des facteurs communs dans chaque monôme ? Si oui, les mettre tous en évidence.	Le facteur commun à chaque monôme est $5x$. On peut donc le mettre en évidence : $10x^3 - 5x^2 + 5x$ $= 5x \cdot 2x^2 - 5x \cdot x + 5x \cdot 1$ $= 5x(2x^2 - x + 1)$
ÉTAPE 3 Contrôler qu'il n'y ait plus de facteurs communs dans la parenthèse.	Il n'y a plus de facteur commun.

Remarque

On peut vérifier la factorisation en développant le produit obtenu.

$$5x(2x^2 - x + 1) = 10x^3 - 5x^2 + 5x$$

Méthode 2

En utilisant la mise en évidence d'un polynôme.**Exemple** Factoriser l'expression

$$(5z - 6)(8z - 1) - 4z(8z - 1)$$

ÉTAPE 1	
Repérer chacun des termes de la somme.	Les termes sont: $(5z - 6)(8z - 1)$ et $4z(8z - 1)$
ÉTAPE 2	
Dans ces termes, y a-t-il un facteur commun ?	Oui: $(8z - 1)$
ÉTAPE 3	
Si oui, le mettre en évidence et additionner ou soustraire les termes semblables lorsque c'est possible.	$(5z - 6)(8z - 1) - 4z(8z - 1) = (8z - 1)(5z - 6 - 4z)$ $= (8z - 1)(z - 6)$

Méthode 3

En utilisant un produit remarquable.**Exemple** Factoriser l'expression

$$9x^2 + 12xy + 4y^2$$

ÉTAPE 1	
Repérer les termes de la somme.	Les termes sont: $9x^2$, $12xy$ et $4y^2$
ÉTAPE 2	
Dans ces termes, y a-t-il des facteurs communs à chacun d'entre eux ?	Non.
ÉTAPE 3	
Est-il possible d'utiliser un produit remarquable pour factoriser l'expression ?	Il y a trois termes. Deux d'entre eux sont des carrés: $9x^2$ et $4y^2$ On peut donc supposer que $a^2 = 9x^2$ et $b^2 = 4y^2$ donc que $a = 3x$ et $b = 2y$. Le troisième terme est-il égal à $2ab$? $2 \cdot 3x \cdot 2y = 12xy.$ Oui, on peut par conséquent écrire: $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x + 2y)^2$

FA

Remarque

Ces méthodes peuvent se combiner.

Exemple

$$4x^3y - 16xy = 4xy(x^2 - 4)$$

$$= 4xy(x + 2)(x - 2)$$

D'abord, mise en évidence d'un facteur commun.

Puis, utilisation d'un produit remarquable.

→ Produits remarquables (p. 86), Développer et réduire une expression littérale (p. 87)

Équations

Équation

Définitions

- Une **équation** est une **égalité conditionnelle** entre deux expressions littérales. En effet, cette égalité n'est pas forcément vraie : elle peut être vérifiée pour une, plusieurs ou aucune valeur numérique des lettres. Ces lettres sont appelées **inconnues**.
- La ou les valeurs qui vérifient l'égalité sont appelées **solutions de l'équation**. Résoudre une équation, c'est trouver l'**ensemble de ses solutions**, souvent noté **S**.

Exemples

- 16 est la solution de l'équation $4x = 64$, car $4 \cdot 16 = 64$. On note : $S = \{16\}$
- (-3) et 3 sont les solutions de l'équation $x^2 = 9$, car $(-3)^2 = 9$ et $3^2 = 9$
On note : $S = \{-3; 3\}$
- L'équation $a + 1 = a$ n'a pas de solution. On note alors : $S = \emptyset$ ou $S = \{ \}$
- Tous les nombres sont les solutions de l'équation $2x = 2x$. On note alors : $S = \mathbb{R}$

Remarque

La partie à gauche de l'égalité est appelée **membre de gauche** et la partie à droite, **membre de droite**.

Exemples

$x + 3,2 = 10$; $a^2 - 2a - 7 = 2a - 2$; $5x + y = 18 - x$; ... sont des équations.
membre de gauche membre de droite

FA

Équations équivalentes

Définition

Deux équations équivalentes sont deux équations qui ont le même ensemble de solutions.

Exemples

Les équations $x - 5 = 8 - x$ et $5x = 32,5$

sont équivalentes, car elles ont le même ensemble de solutions : $S = \{6,5\}$

Les équations $10 - 2y = y^2 + y$ et $y^2 + 3y - 10 = 0$

sont équivalentes, car elles ont le même ensemble de solutions : $S = \{-5; 2\}$

Les équations $5x = 15$ et $5x^2 = 15x$

ne sont pas équivalentes, parce que 0 est une solution de la deuxième équation sans en être une de la première.

Équation du premier degré à une inconnue

Définition

Une équation du premier degré d'inconnue x est une équation équivalente à une équation du type **$ax + b = cx + d$** .

Exemples

$$5x - 6 = 3x + 4$$

$$3x - 2 = 0 \quad (3x - 2 = 0x + 0)$$

$$5x + 8 = -5 \quad (5x + 8 = 0x - 5)$$

Remarque

Une équation du premier degré à une inconnue peut avoir une, aucune ou une infinité de solutions.

→ Équations équivalentes (p. 90)

Règles d'équivalence

Pour obtenir une équation équivalente à une équation donnée, on peut :

Règle 1

Développer, réduire ou factoriser chacun des membres de cette équation.

Exemple Si $3(x-5) = 12x+9-2x$, alors $3x-15 = 10x+9$

Règle 2

Ajouter ou soustraire un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de cette équation.

Exemple Si $2x-11 = 8$, alors $2x-11+11 = 8+11$ donc $2x = 19$

Règle 3

Multiplier ou diviser par un même nombre non nul les deux membres de cette équation.

Exemple Si $3x = 21$, alors $\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$ donc $x = 7$

⚠ Si l'on divise ou multiplie par l'inconnue les deux membres d'une équation, on obtient une équation non équivalente à la première.

Exemple

L'équation $x^2 = x$ a deux solutions : 0 et 1

Si l'on divise les deux membres par x , on obtient l'équation $x = 1$ qui n'a qu'une solution : 1

→ Développer et réduire une expression littérale (p. 87),
Factorisation d'une expression littérale (p. 88), Équations équivalentes (p. 90)

FA

Résoudre une équation du premier degré à une inconnue

Méthode

Exemple Résoudre l'équation

$$2(x-1) - 4x = x-8$$

ÉTAPE 1	
Développer et réduire chacun de ses membres (règle d'équivalence 1).	$2(x-1) - 4x = x-8$ $2x-2-4x = x-8$ $-2x-2 = x-8$
ÉTAPE 2	
Appliquer la règle d'équivalence 2 pour obtenir une équation dans laquelle le terme avec l'inconnue est dans l'un des membres et le terme ne contenant pas l'inconnue dans l'autre.	$-2x-2 = x-8 \quad +2$ $-2x = x-6 \quad -x$ $-3x = -6$
ÉTAPE 3	
Diviser chaque membre par le coefficient de l'inconnue (s'il n'est pas égal à 1 ou 0) pour trouver la solution (règle d'équivalence 3).	$-3x = -6 \quad :(-3)$ $x = 2$
ÉTAPE 4	
Écrire l'ensemble de solutions.	$S = \{2\}$

Remarque

Le ou les nombres trouvés sont une ou des solutions si, en remplaçant l'inconnue par ce ou ces nombres, l'équation initiale est vérifiée.

2 est bien solution de l'équation $2(x-1) - 4x = x-8$, car :

$$2(2-1) - 4 \cdot 2 = 2-8$$

$$-6 = -6$$

→ Développer et réduire une expression littérale (p. 87), Règles d'équivalence (p. 91)

Équation du premier degré à deux inconnues

Définitions

- Une **équation du premier degré à deux inconnues** x et y est une équation équivalente à une équation de la forme :
 $ax + by = c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ et $b \neq 0$)
- Une solution d'une équation à deux inconnues x et y est un couple de nombres $(x ; y)$ qui vérifient cette équation.

Exemple

Le couple $(1 ; 2)$ est une solution de l'équation à deux inconnues $2x + 3y = 8$, car : $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ x & y \end{matrix}$

Dans cette équation, il y a une infinité d'autres couples solution. Par exemple $(4 ; 0)$; $(2 ; \frac{4}{3})$; ...

→ Équations équivalentes (p. 90)

Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Définitions

- Deux équations du premier degré à deux inconnues considérées simultanément forment un système d'équations.
 Un **système d'équations** du premier degré à deux inconnues x et y est équivalent à un système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c & (a, b, c \in \mathbb{R}) \\ a'x + b'y = c' & (a, b, c \in \mathbb{R}) \end{cases}$$
- Résoudre ce système, c'est trouver l'**ensemble des couples de nombres** qui vérifient simultanément les deux équations.

Exemple

$$\begin{cases} 3x - y = -10,5 \\ x + 4y = 16 \end{cases}$$

est un système du premier degré de deux équations à deux inconnues dont l'ensemble de solutions est $S = \{(-2 ; 4,5)\}$

En effet :
$$\begin{cases} 3 \cdot (-2) - 4,5 = -10,5 \\ (-2) + 4 \cdot 4,5 = 16 \end{cases}$$

Remarques

- La résolution algébrique d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues consiste à revenir à une équation à une inconnue.
- Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues peut avoir une, aucune ou une infinité de solutions.

Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Méthode 1 Par substitution.

Exemple Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x + 6y = -12 \end{cases}$$

ÉTAPE 1	À l'aide des règles d'équivalence, exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir d'une des équations.	$\begin{cases} 4x + y = 5 & \text{①} \\ 3x + 6y = -12 & \text{②} \end{cases}$ Dans ce système, le plus simple est d'exprimer y en fonction de x à l'aide de la première équation. $4x + y = 5 \quad \text{①}$ $y = 5 - 4x$
ÉTAPE 2	Remplacer, dans la deuxième équation, l'inconnue isolée par l'expression obtenue.	$\begin{array}{l} 3x + 6(5 - 4x) = -12 \\ 3x + 30 - 24x = -12 \\ 30 - 21x = -12 \end{array} \quad \left \begin{array}{l} \\ \\ -30 \end{array} \right.$
ÉTAPE 3	Résoudre l'équation à une inconnue ainsi obtenue à l'aide des règles d'équivalence.	$\begin{array}{l} -21x = -42 \\ x = 2 \end{array} \quad \left \begin{array}{l} \\ :(-21) \end{array} \right.$
ÉTAPE 4	Calculer la valeur numérique de la deuxième inconnue en remplaçant la lettre par la valeur trouvée dans la première équation.	$\begin{array}{l} y = 5 - 4x \\ y = 5 - 4 \cdot 2 \\ y = -3 \end{array}$
ÉTAPE 5	Écrire l'ensemble de solutions.	$S = \{ (2 ; -3) \}$

Remarque

Les nombres trouvés pour chacune des deux inconnues sont solutions si, en remplaçant les inconnues par ces nombres, les deux équations initiales sont vérifiées.
Le couple $(2 ; -3)$ est solution du système, car :

$$\begin{cases} 4 \cdot 2 + (-3) = 5 \\ 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) = -12 \end{cases}$$

Méthode 2

Par combinaison linéaire.

Exemple Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 5x = 2y + 1 \end{cases}$$

ÉTAPE 1 À l'aide des règles d'équivalence, transformer les deux équations pour les ramener à un système de la forme : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 5x = 2y + 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$
ÉTAPE 2 Multiplier ou diviser les deux membres de la première équation par un même nombre et ceux de la deuxième équation par un même nombre de telle façon que les coefficients d'une des inconnues soient opposés. Additionner les deux équations membre à membre, pour que l'une des inconnues disparaisse.	$\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} \\ + \begin{cases} 4x + 6y = 54 \\ 15x - 6y = 3 \end{cases} \\ \hline 19x + 0y = 57 \end{array}$
ÉTAPE 3 Résoudre une équation à une inconnue ainsi obtenue à l'aide des règles d'équivalence.	$\begin{array}{l} 19x = 57 \\ x = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} : 19 \end{array}$
ÉTAPE 4 Remplacer la lettre par sa valeur dans une des équations du système et déterminer la deuxième inconnue.	$\begin{array}{l} 2 \cdot 3 + 3y = 27 \\ 3y = 21 \\ y = 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} -6 \\ : 3 \end{array}$
ÉTAPE 5 Noter l'ensemble de solutions.	$S = \{ (3 ; 7) \}$

Remarque

Les nombres trouvés pour chacune des deux inconnues sont solutions si, en remplaçant les inconnues par ces nombres, les deux équations initiales sont vérifiées.

Le couple (3 ; 7) est solution du système, car :

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 27 \\ 5 \cdot 3 = 2 \cdot 7 + 1 \end{cases}$$

→ Règles d'équivalence (p. 91)

Équation du deuxième degré à une inconnue

Définition

Une **équation du deuxième degré** d'inconnue x est une équation qui est équivalente à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R} ; a \neq 0$).

Exemples

$7x^2 + x - 10 = 0$

$-3x^2 + 84 = 0$

$x^2 + 8x = -5$

→ Équations équivalentes (p. 90)

Résolution d'une équation du deuxième degré à une inconnue

Propriété 1 Pour qu'un produit de facteur soit nul, il faut et il suffit qu'un des facteurs soit nul. Quels que soient les nombres n et m , si $n \cdot m = 0$ signifie que $n = 0$ ou $m = 0$ ($n, m \in \mathbb{R}$).

Exemple

Si $(2x - 3)(x + 2) = 0$, alors $2x - 3 = 0$ ou $x + 2 = 0$.

Définition Le **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est le nombre Δ défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$).

Propriétés 2 Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$).

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation a **deux solutions** :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\text{formule de Viète})$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation a **une seule solution** :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \quad (\text{formule de Viète})$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a **pas de solution** :

$$S = \emptyset$$

Exemples

- $6x^2 + x - 2 = 0$
 $a = 6$; $b = 1$; $c = -2$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49$
 $\Delta > 0$, cette équation possède deux solutions.
Comme $\sqrt{49} = 7$, alors
 $S = \left\{ \frac{-1+7}{12} ; \frac{-1-7}{12} \right\}$
 $S = \left\{ \frac{1}{2} ; -\frac{2}{3} \right\}$
- $\frac{x^2}{2} - 4x + 8 = 0$
 $a = \frac{1}{2}$; $b = -4$; $c = 8$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 16 - 16 = 0$
 $\Delta = 0$, cette équation possède une seule solution.
 $x = \frac{-(-4)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{1} = 4$
 $S = \{4\}$
- $x^2 + 2x + 2 = 0$
 $a = 1$; $b = 2$; $c = 2$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$
 $\Delta < 0$, cette équation n'a pas de solution.
 $S = \emptyset$

Remarque Résolution de l'équation $x^2 = n$ ($n \in \mathbb{R}$)

- Si $n > 0$ l'équation possède deux solutions opposées $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$.
- Si $n = 0$ l'équation a une seule solution $\sqrt{0} = 0$.
- Si $n < 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Résoudre une équation du deuxième degré à une inconnue

Méthode 1

Par factorisation.

Exemple Résoudre l'équation $x^2 = -5x$

ÉTAPE 1	S'assurer que l'équation est écrite sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Si ce n'est pas le cas, effectuer la ou les transformations nécessaires.	$\begin{array}{rcl} x^2 & = & -5x \\ x^2 + 5x & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} + 5x \\ \hline \end{array}$
ÉTAPE 2	Factoriser le membre contenant l'inconnue à l'aide des méthodes connues.	Par mise en évidence, on obtient : $x(x + 5) = 0$
ÉTAPE 3	Appliquer la propriété : si $a \cdot b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.	Pour que ce produit soit égal à 0, il faut que $x = 0$ ou que $x = -5$.
ÉTAPE 4	Écrire l'ensemble de solutions.	$S = \{-5; 0\}$

Remarque

Le ou les nombres trouvés sont une ou des solutions si, en remplaçant l'inconnue par ce ou ces nombres, l'équation initiale est vérifiée.

(-5) et 0 sont bien solutions de l'équation $x^2 = -5x$, car :

$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) \quad \text{et} \quad 0^2 = (-5) \cdot 0$$

→ Factorisation d'une expression littérale (p. 88)

FA

Méthode 2

À l'aide du discriminant.

Exemple Résoudre l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$

ÉTAPE 1	S'assurer que l'équation est écrite sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Si ce n'est pas le cas, effectuer la ou les transformations nécessaires.	C'est bien le cas, donc on peut passer à l'étape 2.
ÉTAPE 2	Calculer le discriminant et regarder s'il est plus grand, plus petit ou égal à 0. $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$ Le discriminant est plus grand que 0, donc l'équation a deux solutions.
ÉTAPE 3	Calculer les deux solutions avec la formule de Viète. $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 1$ $x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -3$
ÉTAPE 4	Écrire l'ensemble de solutions.	$S = \{-3; 1\}$

Remarque

Le ou les nombres trouvés sont une ou des solutions si, en remplaçant l'inconnue par ce ou ces nombres, l'équation initiale est vérifiée.

(-3) et 1 sont bien solutions de l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$, car :

$$(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 0 \quad \text{et} \quad 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$$

Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule

En mathématiques, on utilise de très nombreuses formules qui relient différentes grandeurs. Dans ces formules, si l'on ne connaît pas la valeur d'une seule des lettres, on peut la calculer.

Exemple

Dans la formule $A = L \cdot l$ qui donne l'aire d'un rectangle, si l'on connaît A et L , on peut calculer l .

Utiliser une formule pour calculer une mesure de grandeur

Méthode

Exemple 1 Calculer la petite base b d'un terrain qui a la forme d'un trapèze, sachant que sa grande base $B = 150$ m, sa hauteur $h = 200$ m et son aire $A = 2,7$ ha.

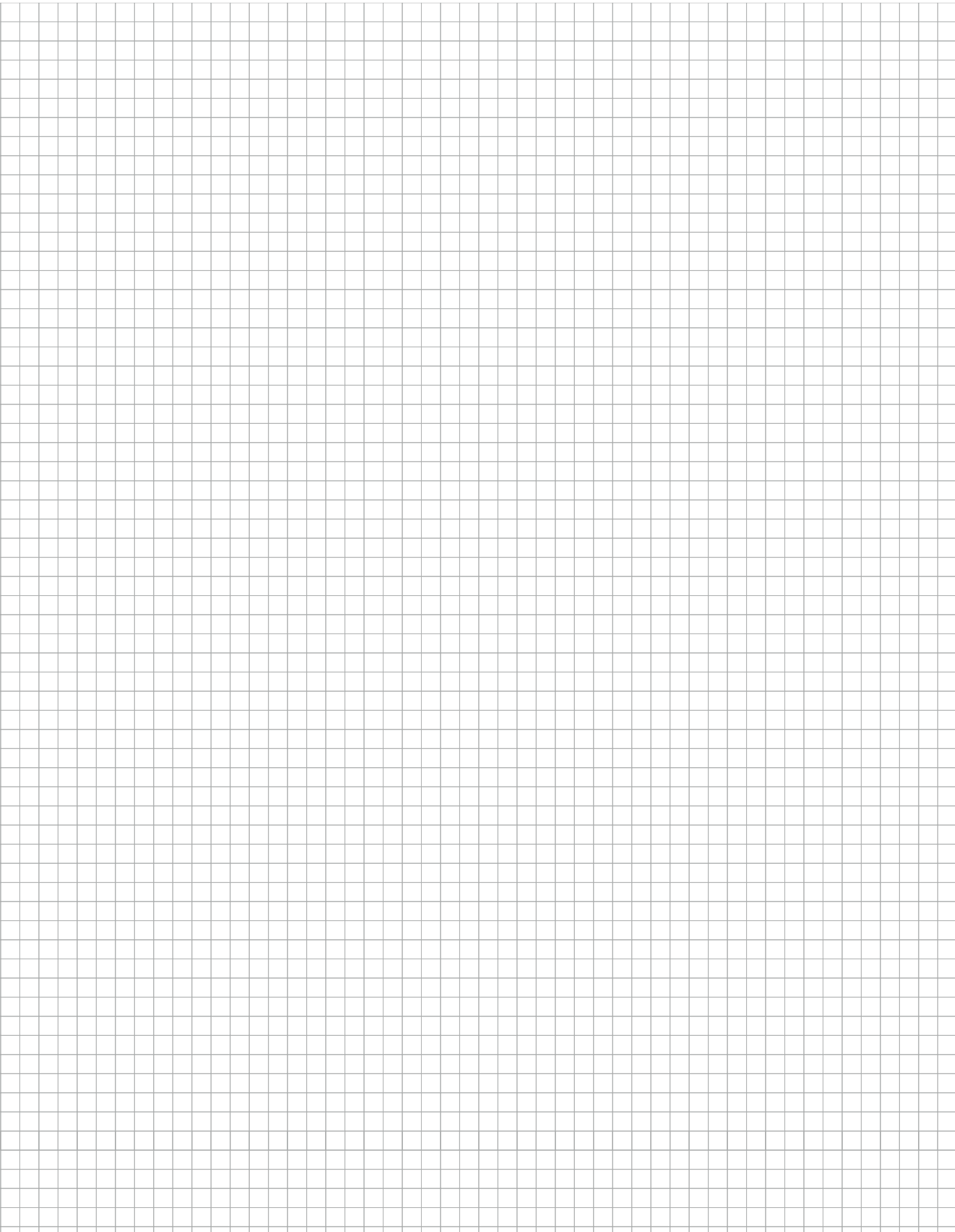
ÉTAPE 1	Écrire la formule liant les grandeurs en jeu dans la question.	$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$
ÉTAPE 2	Harmoniser les unités.	$2,7 \text{ ha} = 27\,000 \text{ m}^2$
ÉTAPE 3	Remplacer dans cette formule les lettres connues par leurs valeurs.	$27\,000 = \frac{150+b}{2} \cdot 200 \quad \cdot 2$
ÉTAPE 4	Calculer la valeur cherchée en appliquant les règles d'équivalence pour résoudre l'équation.	$\begin{array}{lcl} 54\,000 & = & (150+b) \cdot 200 \\ 54\,000 & = & 30\,000 + 200b & - 30\,000 \\ 24\,000 & = & 200b & : 200 \\ b & = & \frac{24\,000}{200} = 120 \end{array}$
ÉTAPE 5	Conclure.	Donc la petite base b est égale à 120 m.

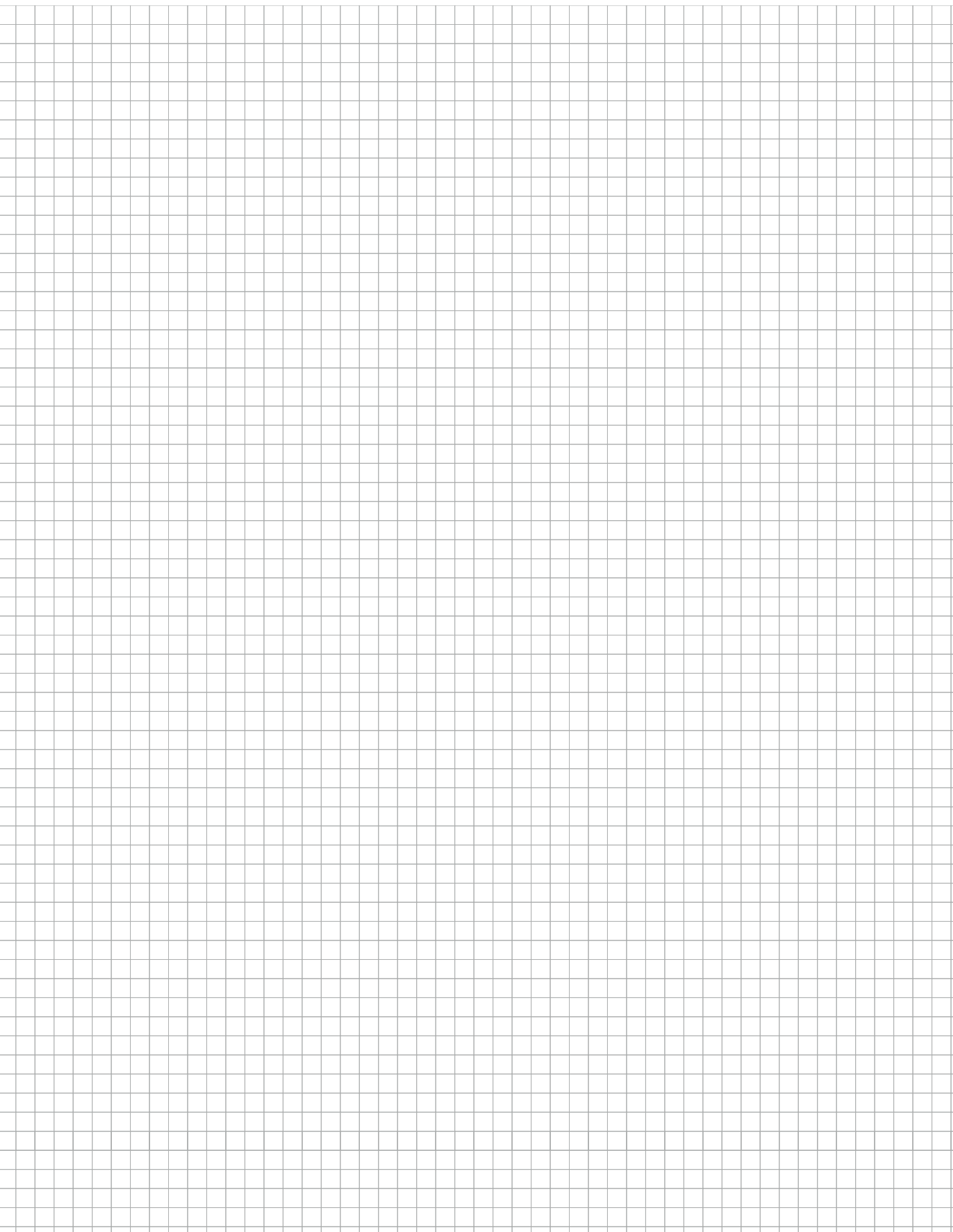
FA

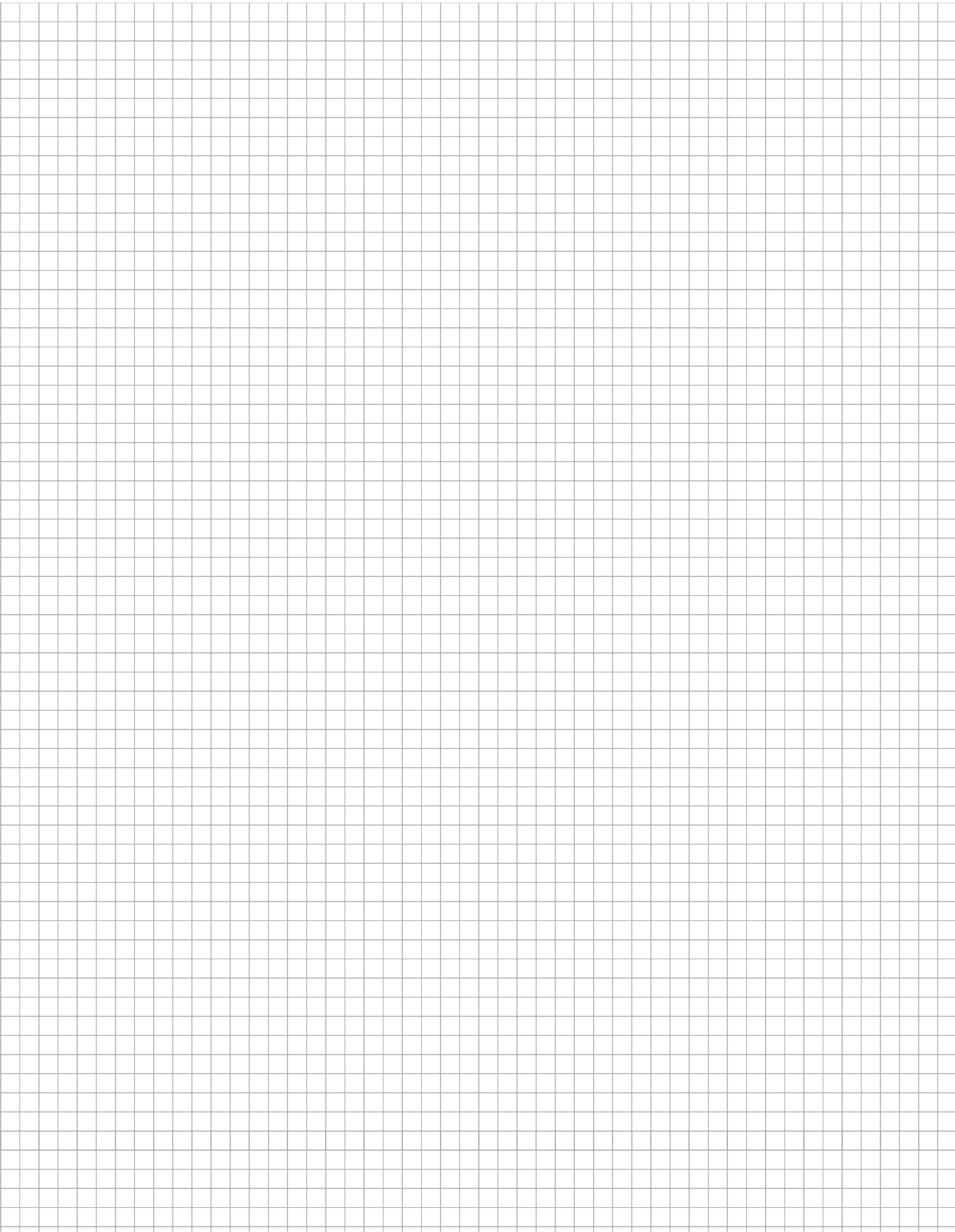
Méthode

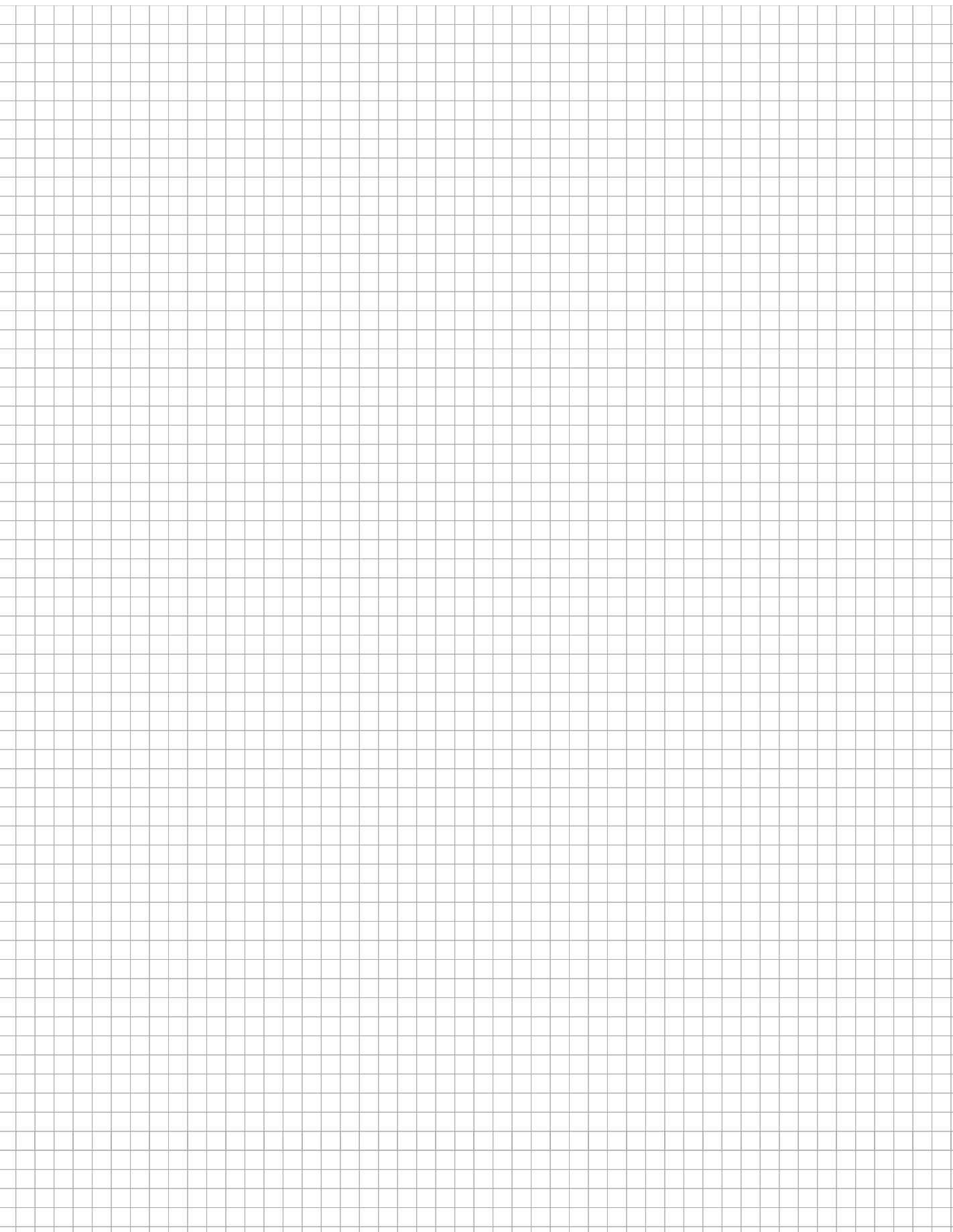
Exemple 2 Un piéton se déplace à la vitesse moyenne de 5 km/h. Quel temps va-t-il mettre pour parcourir 7000 m ?

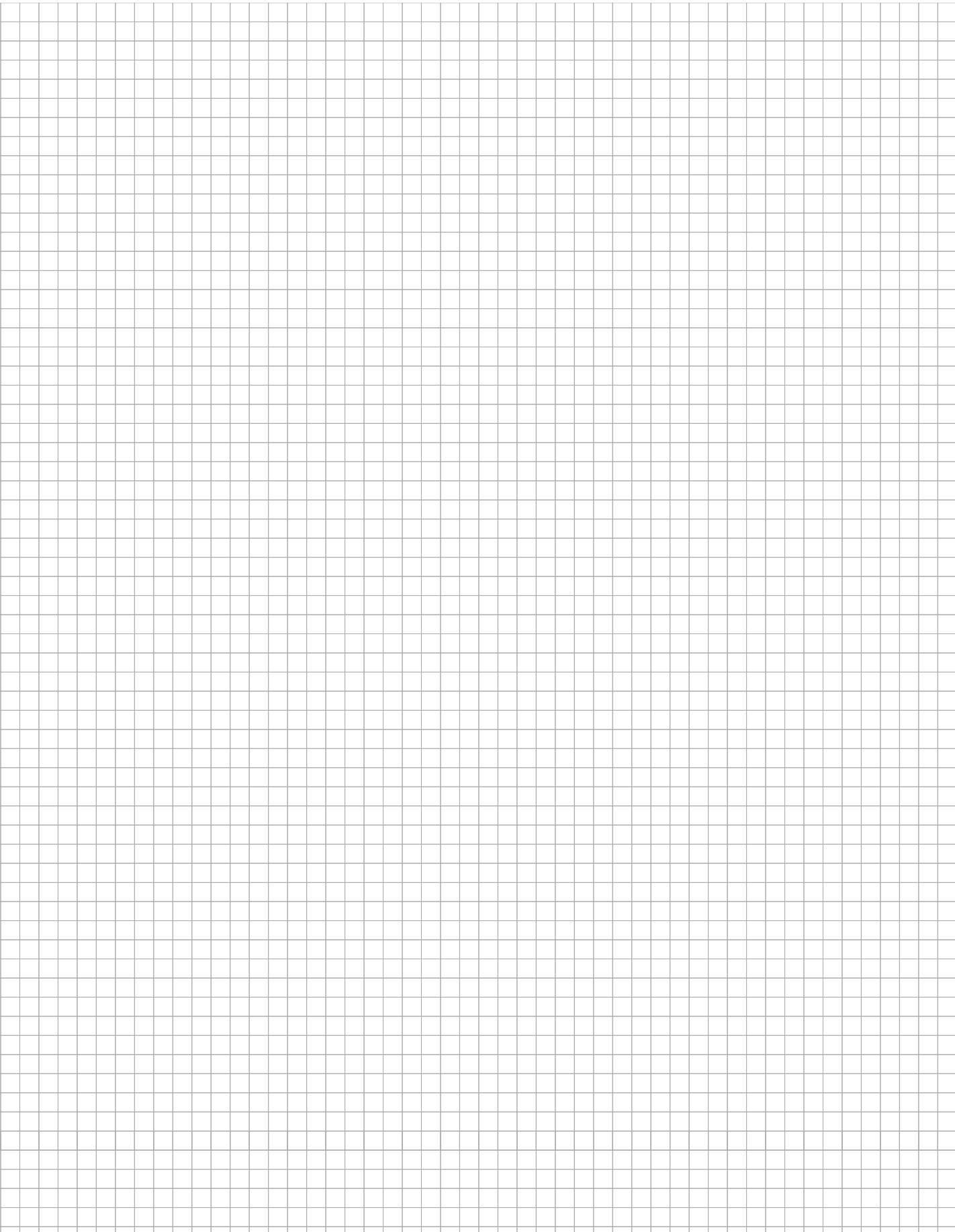
ÉTAPE 1	Écrire la formule liant les grandeurs en jeu dans la question.	$v = \frac{d}{t}$
ÉTAPE 2	Harmoniser les unités.	$7000 \text{ m} = 7 \text{ km}$ La vitesse est donnée en km/h et la distance en km. Le temps trouvé sera donc en h.
ÉTAPE 3	Remplacer dans cette formule les lettres connues par leurs valeurs.	$5 = \frac{7}{t} \quad \cdot t$
ÉTAPE 4	Calculer la valeur cherchée en appliquant les règles d'équivalence pour résoudre l'équation.	$\begin{array}{lcl} 5 \cdot t & = & 7 \\ t & = & 1,4 \end{array} \quad : 5$
ÉTAPE 5	Conclure.	Le piéton va mettre 1,4 h, ce qui correspond à 1 h 24 min.











Espace

- Figures géométriques planes
- Transformations géométriques
- Géométrie dans l'espace



Figures géométriques planes

Droite

Définition La droite AB est constituée d'une infinité de points alignés avec A et B .

Notation La droite qui passe par les points A et B est appelée droite AB .
On peut aussi la désigner par une lettre minuscule.

Exemple

La droite AB ou la droite d .



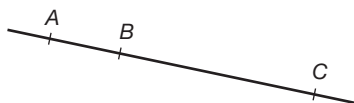
Remarque Par deux points distincts, il ne passe qu'une seule droite.
Une droite n'a ni début ni fin, sa représentation peut être prolongée à l'infini.

Points alignés

Définition Trois points (ou plus) sont alignés s'ils appartiennent à une même droite.

Exemples

○ Les points A , B et C sont alignés, car ils appartiennent à une même droite.



○ Les points D , E et F ne sont pas alignés, car ils ne se trouvent pas tous sur une même droite.

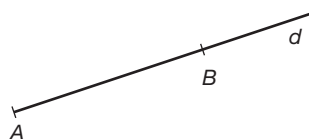


Demi-droite

Définition Une demi-droite est une portion de droite limitée par un point. Ce point est appelé l'origine de la demi-droite.

Exemple

On a représenté ci-contre la demi-droite AB , d'origine A et passant par B .
On peut aussi l'appeler demi-droite Ad .



ES

Segment

Définition Un segment est une portion de droite limitée par deux points. Ces deux points sont appelés les extrémités du segment.

Exemple

On a représenté ci-contre le segment AB , dont les extrémités sont les points A et B .



Remarque Une droite, une demi-droite et un segment sont constitués d'une infinité de points. Seul le segment a une longueur déterminée et est donc mesurable.

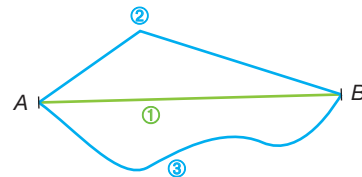
Distance entre deux points

Définition

La distance entre deux points est la longueur du plus court chemin joignant ces deux points. C'est par conséquent la longueur du segment ayant comme extrémités ces deux points.

Exemple

Le plus court chemin joignant les deux points A et B est le segment AB (le chemin ① est plus court que les chemins ② et ③).
On note $AB = 4 \text{ cm}$



Distance d'un point à une droite

Définition

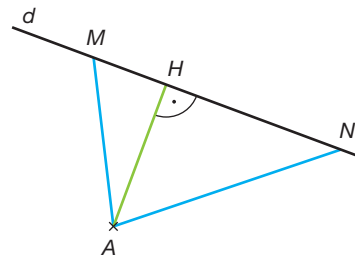
La distance d'un point à une droite est la longueur du plus court chemin de ce point à la droite.

Propriété

La distance du point A à la droite d est la longueur du segment AH perpendiculaire à la droite d .

Exemple

La distance du point A à la droite d est de 2 cm .
 $AH < AM$
 $AH < AN$



Distance entre deux droites parallèles

ES

Définition

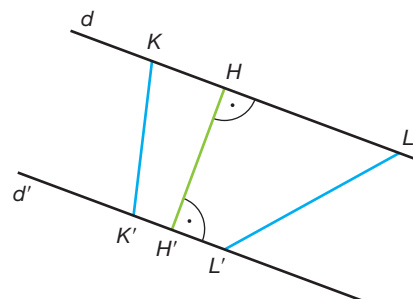
La distance entre deux droites parallèles est la longueur du plus court chemin joignant ces deux droites.

Propriété

La distance entre les droites parallèles d et d' est la longueur du segment HH' perpendiculaires aux droites d et d' .

Exemple

La distance entre les droites parallèles d et d' est 2 cm .
 $HH' < KK'$
 $HH' < LL'$



Segments isométriques

Définition

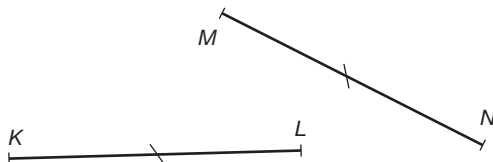
Deux segments isométriques sont des segments qui ont la même longueur.

Notation

Pour indiquer que des segments sont isométriques, on place sur chacun d'eux un même signe, par exemple un trait, un double trait, etc.

Exemple

Les segments MN et KL sont isométriques.
 $MN = KL$

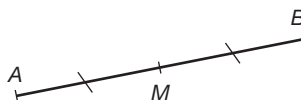


Milieu d'un segment

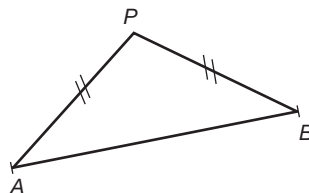
Définition

Le milieu du segment AB est le point M de ce segment, tel que $MA = MB$.

Exemple



⚠ Dans la figure ci-contre, P n'est pas le milieu du segment AB , car P n'est pas un point du segment AB .



Droites sécantes

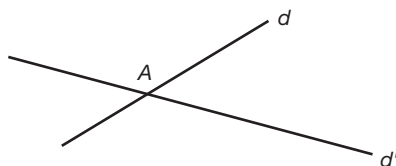
ES

Définition

Deux droites sécantes sont deux droites qui ont un seul point commun appelé point d'intersection des deux droites.

Exemple

Les droites d et d' sont sécantes.
 A est leur point d'intersection.

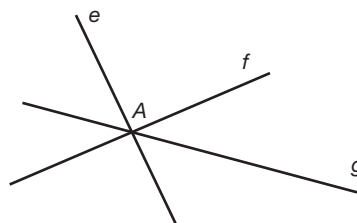


Remarque

Lorsque trois droites ou plus ont un point commun on dit qu'elles sont concourantes.

Exemple

Les droites e , f et g sont concourantes en A .



ÉTYM Sécante : du latin *secare*, couper.

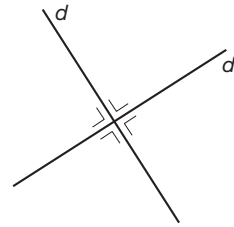
Droites perpendiculaires

Définition

Deux droites perpendiculaires sont deux droites qui se coupent à angles droits.

Exemple

Les droites d et d' sont perpendiculaires.
On note : $d \perp d'$



Remarque

Pour vérifier que deux droites sont perpendiculaires, il suffit de vérifier qu'elles forment un angle droit.

Tracer la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné

Méthode 1

En utilisant une équerre et une règle.

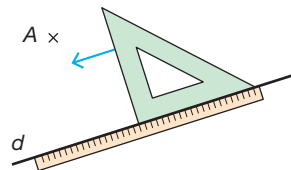
Exemple Tracer la droite perpendiculaire à d passant par A .

$A \times$



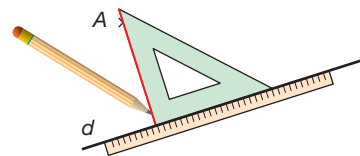
ÉTAPE 1

Placer la règle sur la droite d , puis faire glisser l'équerre sur cette règle.



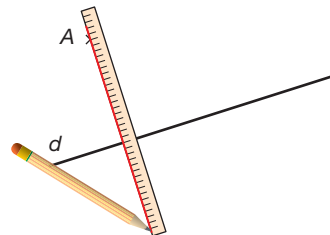
ÉTAPE 2

Arrivé au point A , tracer la perpendiculaire à d passant par A .



ÉTAPE 3

Prolonger la droite obtenue.



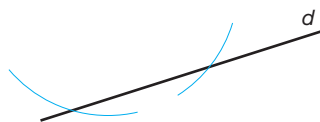
ES

Méthode 2

En utilisant un compas et une règle.

ÉTAPE 1

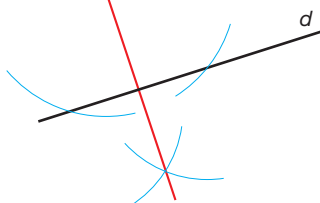
Tracer un arc de cercle de centre A qui coupe la droite d en deux points.

 $A \times$ 

ÉTAPE 2

Tracer deux arcs de cercle de même rayon et dont les centres sont les deux points ci-dessus. Ces deux arcs se coupent en un point.

La droite passant par A et ce point est la droite perpendiculaire à d passant par A .

 $A \times$ 

→ Médiatrice d'un segment (p. 110)

Droites parallèles

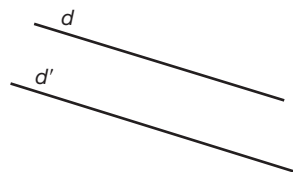
Définition

Deux droites parallèles sont deux droites qui n'ont aucun point commun ou tous les points en commun (droites confondues).

Exemple

Les droites d et d' sont parallèles.

On note : $d \parallel d'$



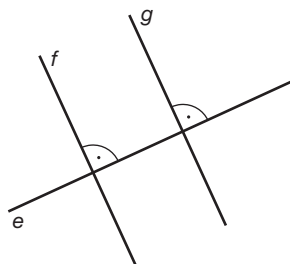
Propriétés des droites parallèles et perpendiculaires

Propriété 1

Si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles.

Exemple

Les droites f et g sont toutes les deux perpendiculaires à la droite e , donc f et g sont parallèles.



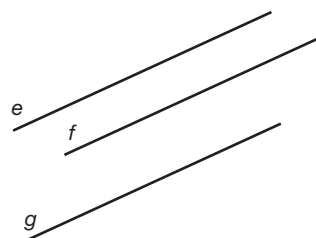
ES

Propriété 2

Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Exemple

La droite e est parallèle à f , la droite g est parallèle à f , donc e et g sont parallèles.

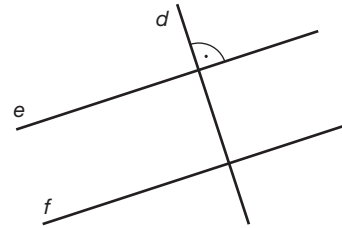


Propriété 3

Si deux droites sont parallèles et si une troisième droite est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.

Exemple

Les droites e et f sont parallèles et d est perpendiculaire à e . On peut donc affirmer que d est perpendiculaire à f .



Tracer la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné

Méthode

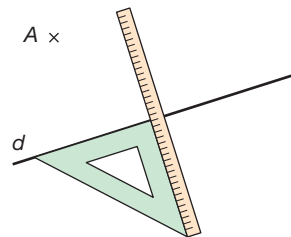
À l'aide d'une équerre et d'une règle.

Exemple Tracer la droite parallèle à d passant par A .

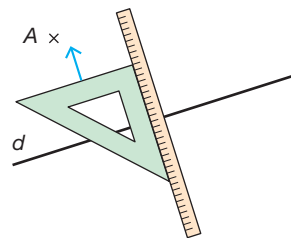
$A \times$

**ÉTAPE 1**

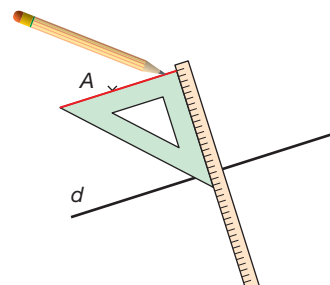
Placer un des côtés de l'angle droit de l'équerre sur la droite d et la règle contre l'autre côté de l'angle droit.

**ÉTAPE 2**

Faire glisser l'équerre le long de la règle jusqu'au point A .

**ÉTAPE 3**

Tracer la droite parallèle à d passant par A .



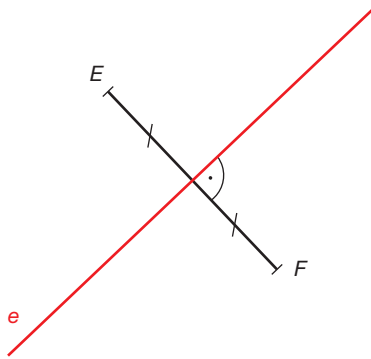
Médiatrice d'un segment

Définition

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et qui le coupe en son milieu.

Exemple

La droite e est la médiatrice du segment EF .



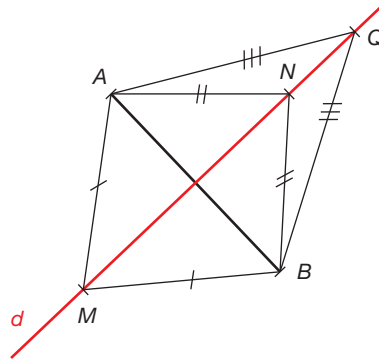
Propriétés

- La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points à égale distance des extrémités de ce segment.
- La médiatrice d'un segment est un axe de symétrie de ce segment.

Exemple

M , N et Q sont des points à égale distance de A et de B ($MA = MB$; $NA = NB$; $QA = QB$).

La droite d est la médiatrice du segment AB et donc un axe de symétrie de ce segment.



ÉTYM Médiatrice : du latin *media*, qui est au milieu.

→ Symétrie axiale (p. 144), Axe de symétrie (p. 146)

Construire la médiatrice d'un segment avec une règle non graduée et un compas

Méthode

Exemple Tracer la médiatrice d du segment AB .



ÉTAPE 1 Tracer un arc de cercle dont le centre est une extrémité du segment et dont le rayon est plus grand que la moitié du segment.	
ÉTAPE 2 Tracer un arc de cercle de même rayon dont le centre est l'autre extrémité du segment.	
ÉTAPE 3 Tracer la droite qui passe par les deux points d'intersection obtenus. C'est la médiatrice du segment.	

Remarque

Cette méthode permet de déterminer le milieu d'un segment ou de construire un angle droit sans règle graduée.

ES

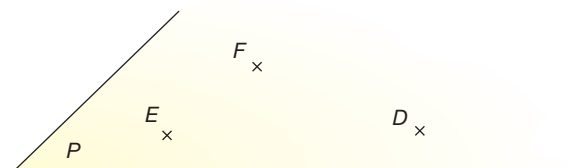
Plan

Définition

Un plan est déterminé par trois points de l'espace non alignés. Il peut être visualisé comme une feuille d'épaisseur nulle qui s'étend à l'infini.

Exemple

Les trois points D , E et F appartiennent au plan P .



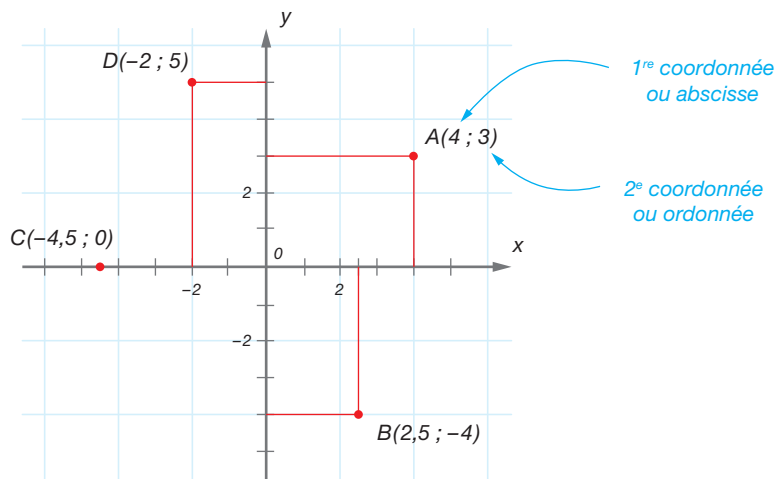
Repérage d'un point dans le plan

Définitions

Pour pouvoir repérer un point dans le plan, on peut utiliser deux axes gradués de même origine.

- Ces axes sont généralement perpendiculaires. Ils forment ce que l'on appelle un **repère**.
- Le point d'intersection des axes est appelé **origine du repère**.
- Un point est alors repéré par un couple $(x ; y)$ de nombres réels, appelé **coordonnées** du point.
- Le premier nombre du couple est appelé **abscisse**.
Il situe le point par rapport à l'axe horizontal (**axe des x**).
- Le deuxième nombre du couple est appelé **ordonnée**.
Il situe le point par rapport à l'axe vertical (**axe des y**).

Exemple

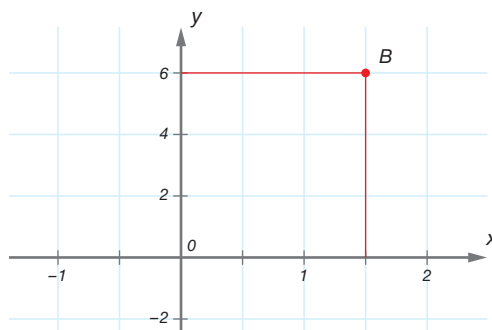


ES

⚠ Les graduations ne correspondent pas toujours à une unité. Les unités ne sont pas nécessairement de même longueur sur chacun des deux axes.

Exemple

Dans le repère ci-dessous, B a pour coordonnées $(1,5 ; 6)$.



Cercle et disque

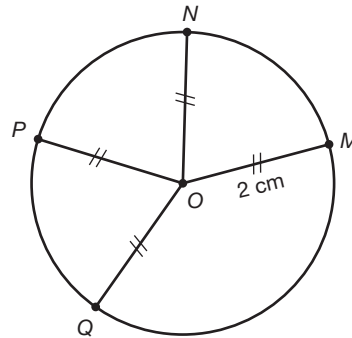
Définitions

- Un **cercle** est l'ensemble des points du plan situés à égale distance d'un point, appelé **centre**.
- Cette distance est appelée le **rayon** du cercle.

Exemple

On a tracé ci-contre le cercle de centre O et de rayon 2 cm .

$$OM = ON = OP = OQ = 2\text{ cm}$$



Remarque

Le rayon désigne aussi le segment qui joint le centre du cercle à un point du cercle.

Exemple

Le segment OM est un rayon du cercle ci-dessus.

Définitions

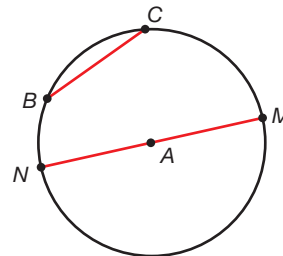
- Une **corde** d'un cercle est un segment dont les deux extrémités sont des points du cercle.
- Le **diamètre** d'un cercle est une corde qui passe par le centre du cercle. C'est la plus longue corde du cercle. Sa longueur est égale au double du rayon.

Exemple

On a tracé ci-contre un cercle de centre A .

Le segment NM est un diamètre.

Le segment BC est une corde.



ES

Définition

Un **disque** est l'ensemble des points situés à l'intérieur et sur le cercle.

Exemple

La partie du plan coloré en jaune est le disque de centre O et de rayon r .

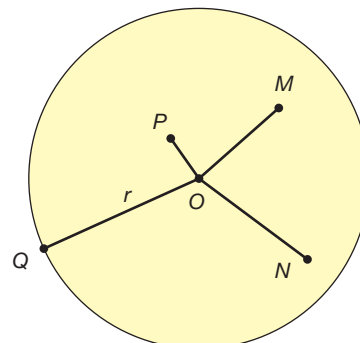
Les points M, N, O, P et Q sont des points du disque.

$$OM \leq r$$

$$ON \leq r$$

$$OP \leq r$$

$$OQ \leq r$$



Arc de cercle

Définition

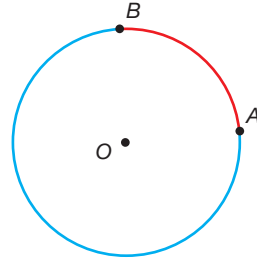
Un arc de cercle est une partie d'un cercle comprise entre deux points. Deux points d'un cercle déterminent deux arcs de cercle.

Notation

Soit A et B deux points d'un cercle. L'arc de cercle est noté $\widehat{AB}$.

Exemple

Les points A et B sur le cercle déterminent deux arcs de cercle $\widehat{AB}$: l'arc en bleu et l'arc en rouge.



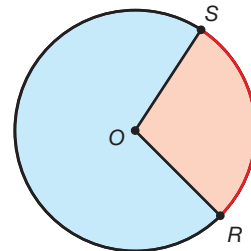
Secteur circulaire

Définition

Un secteur circulaire est une partie d'un disque limitée par deux rayons. Deux rayons d'un disque déterminent deux secteurs circulaires.

Exemple

Les rayons OR et OS déterminent deux secteurs circulaires SOR : le secteur circulaire bleu et le secteur circulaire rouge.



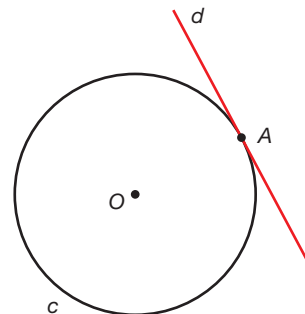
Tangente à un cercle

Définition

Une tangente à un cercle est une droite qui a un seul point commun avec ce cercle.

Exemple

La droite d est la tangente en A au cercle c .
On dit aussi que le cercle c est tangent à la droite d .



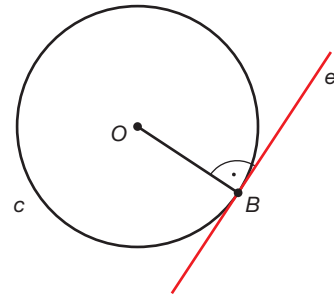
Propriété

La tangente en un point B d'un cercle de centre O est la droite perpendiculaire à la droite OB qui passe par le point B .

Cette propriété permet de tracer facilement une tangente à un cercle.

Exemple

La droite e est la tangente en B au cercle c .



ETYM Tangente: du latin *tangere*, toucher.

→ Droites perpendiculaires (p. 107)

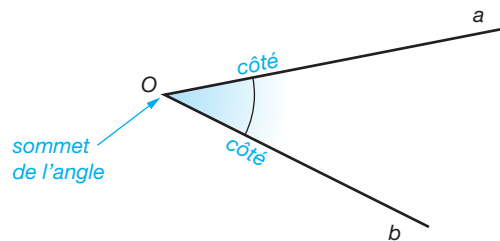
Angle

Définitions

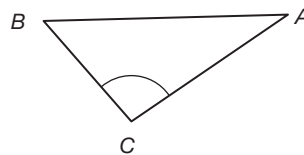
- Un angle est une portion du plan limitée par deux demi-droites de même origine.
- L'origine est appelée **sommet** de l'angle et les demi-droites sont les **côtés** de l'angle.

Notations

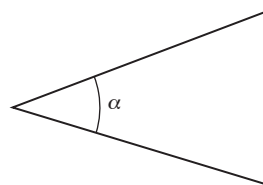
- L'angle ci-dessous est noté $\widehat{aOb}$ ou $\widehat{bOa}$.



- Dans ce triangle, l'angle de sommet C est noté $\widehat{BCA}$ ou $\widehat{ACB}$.



- Une lettre grecque peut aussi désigner un angle.

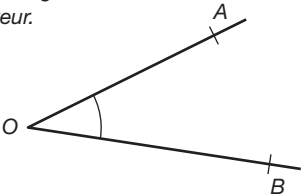
**Remarque**

L'unité usuelle de mesure des angles est le **degré**, noté par le symbole $^\circ$.

Mesurer un angle à l'aide d'un rapporteur

Méthode

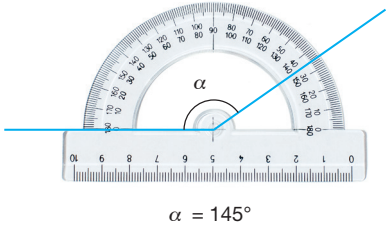
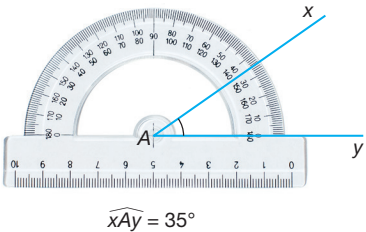
Exemple Mesurer un angle $\widehat{AOB}$ à l'aide d'un rapporteur.



ÉTAPE 1 Déterminer à vue d'œil si l'angle à mesurer est aigu ou obtus.	$\widehat{AOB} < 90^\circ \rightarrow$ angle aigu.
ÉTAPE 2 Faire coïncider le centre du rapporteur avec le sommet de l'angle O.	
ÉTAPE 3 Faire coïncider un des côtés de l'angle avec le 0° d'une des graduations.	
ÉTAPE 4 Lire la mesure de l'angle sur la graduation correspondante. Vérifier si cette mesure est cohérente avec la détermination à vue d'œil.	L'angle $\widehat{AOB}$ mesure 35°. $\widehat{AOB}$ est bien un angle aigu.

ES

⚠ Il y a souvent deux graduations sur un rapporteur. Il est donc important d'identifier d'abord si l'angle à mesurer est aigu ou obtus afin d'utiliser la bonne graduation.



→ Classement des angles (p. 117)

Classement des angles

Définitions

- Un **angle nul** est un angle dont la mesure est 0° .

Exemple

$$\alpha = 0^\circ$$

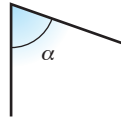


- Un **angle aigu** est un angle dont la mesure est comprise entre 0° et 90° .

Exemple

$$\alpha = 70^\circ$$

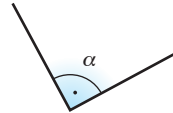
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



- Un **angle droit** est un angle dont la mesure est 90° .

Exemple

$$\alpha = 90^\circ$$



- Un **angle obtus** est un angle dont la mesure est comprise entre 90° et 180° .

Exemple

$$\alpha = 148^\circ$$

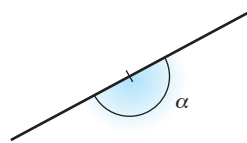
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$



- Un **angle plat** est un angle dont la mesure est 180° .

Exemple

$$\alpha = 180^\circ$$



- Un **angle rentrant** est un angle dont la mesure est comprise entre 180° et 360° .

Exemple

$$\alpha = 240^\circ$$

$$180^\circ < \alpha < 360^\circ$$



- Un **angle plein** est un angle dont la mesure est 360° .

Exemple

$$\alpha = 360^\circ$$



Angles adjacents

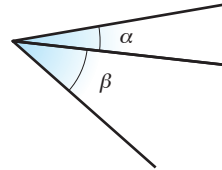
Définition

Deux angles adjacents sont deux angles qui :

- ont le même sommet ;
- ont un côté commun ;
- sont situés de part et d'autre de ce côté commun.

Exemple

Les angles α et β sont adjacents.



ÉTYM **Adjacent** : du latin *adjacere*, être situé auprès de.

Angles complémentaires

Définition

Deux angles complémentaires sont deux angles dont la somme de leurs mesures est égale à 90° .

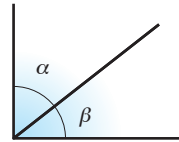
Exemple

$$\alpha = 52^\circ$$

$$\beta = 38^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Les angles α et β sont complémentaires.



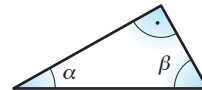
Remarque

Deux angles complémentaires ne sont pas forcément adjacents.

Exemple

Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



→ Angles adjacents (p. 118)

Angles supplémentaires

ES

Définition

Deux angles supplémentaires sont deux angles dont la somme de leurs mesures est égale à 180° .

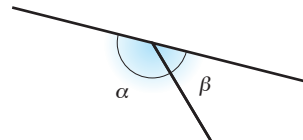
Exemple

$$\alpha = 135^\circ$$

$$\beta = 45^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Les angles α et β sont supplémentaires.



Remarque

Deux angles supplémentaires ne sont pas forcément adjacents.

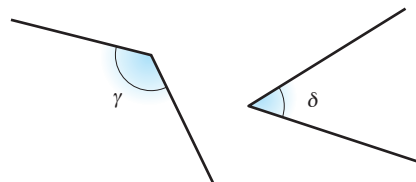
Exemple

$$\delta = 50^\circ$$

$$\gamma = 130^\circ$$

$$\delta + \gamma = 180^\circ$$

Les angles δ et γ sont supplémentaires mais pas adjacents.



→ Angles adjacents (p. 118)

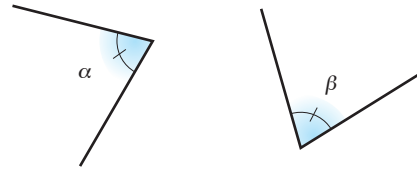
Angles isométriques

Définition

Deux angles isométriques sont deux angles qui ont la même mesure.

Exemple

Les angles α et β sont isométriques, ils mesurent tous les deux 74° .

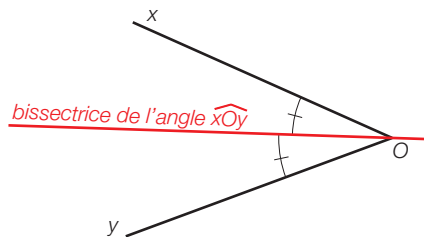


Bissectrice d'un angle

Définition

La bissectrice d'un angle est la droite qui le partage en deux angles isométriques.

Exemple



Propriétés

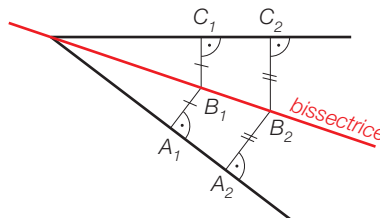
La bissectrice d'un angle est aussi :

- l'ensemble des points situés à égale distance des côtés de l'angle ;
- l'**axe de symétrie** de cet angle.

Exemple

$$B_1 A_1 = B_1 C_1$$

$$B_2 A_2 = B_2 C_2$$



ES

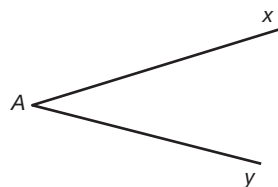
ETYM Bissectrice : du latin *bis*, deux fois et *secare*, couper.

→ Distance d'un point à une droite (p. 105), Angles isométriques (p. 119), Symétrie axiale (p. 144), Axe de symétrie (p. 146)

Construire la bissectrice d'un angle avec une règle et un compas

Méthode

Exemple Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$ à l'aide d'une règle et d'un compas.



ÉTAPE 1 Tracer un arc de cercle de centre A ; il coupe les côtés de l'angle $\widehat{xAy}$ aux points M et N.	
ÉTAPE 2 Tracer deux arcs de cercle de même rayon, l'un de centre M et l'autre de centre N. Ces deux arcs se coupent en B.	
ÉTAPE 3 Tracer la droite qui passe par les points A et B. Cette droite est la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$.	

Angles opposés par le sommet

ES

Définition

Deux angles sont opposés par le sommet :

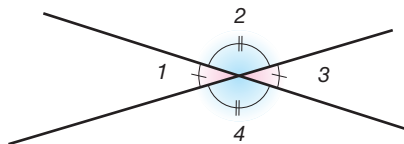
- s'ils ont le même sommet ;
- si les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

Propriété

Les angles opposés par le sommet sont isométriques.

Exemple

- Les angles 1 et 3 sont opposés par le sommet, ils sont isométriques.
- Les angles 2 et 4 sont opposés par le sommet, ils sont isométriques.



Remarque

Deux droites sécantes définissent deux paires d'angles opposés par le sommet.

→ Droites sécantes (p. 106), Angles isométriques (p. 119)

Angles correspondants

Définition

Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, deux angles sont correspondants :

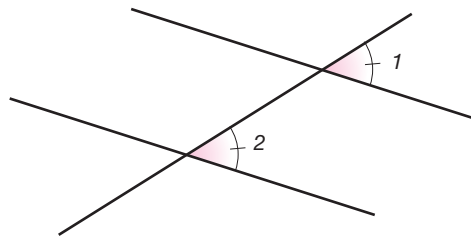
- s'ils sont situés du même « côté » de la droite sécante ;
- si l'un est à l'« intérieur » et l'autre à l'« extérieur » des droites parallèles et s'ils ne sont pas adjacents.

Propriété

Les angles correspondants sont isométriques.

Exemple

Les angles 1 et 2 sont correspondants, ils sont isométriques.



→ Droites sécantes (p. 106), Droites parallèles (p. 108), Angles adjacents (p. 118), Angles isométriques (p. 119)

Angles alternes-internes

Définition

Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, deux angles sont alternes-internes :

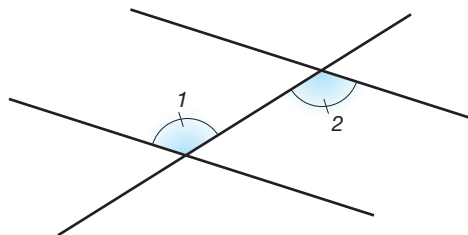
- s'ils sont non adjacents ;
- s'ils sont situés de chaque « côté » de la droite sécante et à l'« intérieur » des droites parallèles.

Propriété

Les angles alternes-internes sont isométriques.

Exemple

Les angles 1 et 2 sont alternes-internes, ils sont isométriques.



→ Droites sécantes (p. 106), Droites parallèles (p. 108), Angles adjacents (p. 118), Angles isométriques (p. 119)

Angles alternes-externes

Définition

Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, deux angles sont alternes-externes :

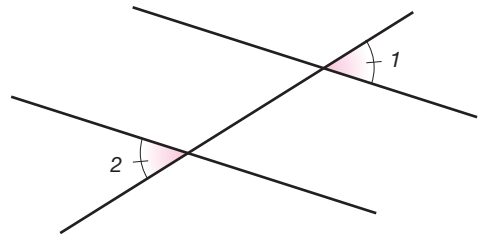
- s'ils sont non adjacents ;
- s'ils sont situés de chaque « côté » de la droite sécante et à l'« extérieur » des droites parallèles.

Propriété

Les angles alternes-externes sont isométriques.

Exemple

Les angles 1 et 2 sont alternes-externes, ils sont isométriques.



→ Droites sécantes (p. 106), Droites parallèles (p. 108) Angles adjacents (p. 118), Angles isométriques (p. 119)

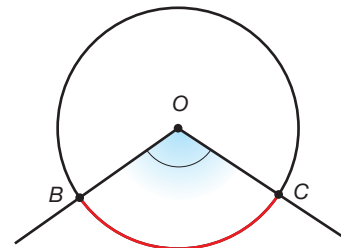
Angle au centre d'un cercle

Définition

Un angle au centre d'un cercle est un angle dont le sommet est le centre du cercle. Il intercepte un arc de cercle.

Exemple

$\widehat{BOC}$ est un angle au centre du cercle de centre O . Il intercepte l'arc de cercle $\widehat{BC}$.



→ Arc de cercle (p. 114)

ES

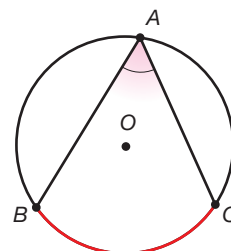
Angle inscrit dans un cercle

Définition

Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle. Il intercepte un arc de cercle.

Exemple

$\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans le cercle de centre O . Il intercepte l'arc de cercle $\widehat{BC}$.



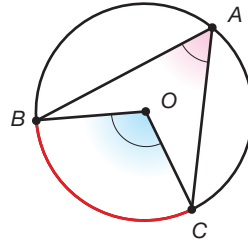
Propriété 1

Dans un cercle, si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit.

Exemple

L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ et l'angle au centre $\widehat{BOC}$ interceptent le même arc $\widehat{BC}$.

Donc $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAC}$

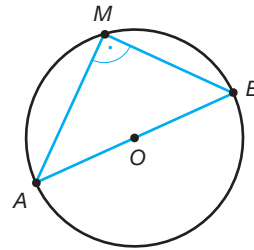
**Conséquence**

Si M appartient au cercle de diamètre AB , alors $\widehat{AMB}$ est un angle droit.

Exemple

L'angle au centre $\widehat{AOB}$ vaut 180° .

Donc l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ vaut 90° .

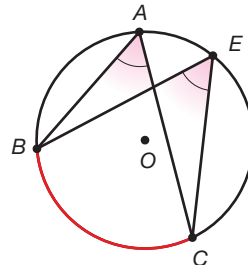
**Propriété 2**

Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils sont isométriques.

Exemple

Les angles inscrits $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BEC}$ interceptent le même arc $\widehat{BC}$.

Donc $\widehat{BAC} = \widehat{BEC}$



→ Arc de cercle (p. 114), Angles isométriques (p. 119), Angle au centre d'un cercle (p. 122)

ES

Cercle de Thalès d'un segment

Définition

Le cercle de Thalès d'un segment AB est l'ensemble des points P tel que APB est un triangle rectangle en P (ou $\widehat{APB}$ est un angle droit). C'est le cercle de diamètre AB .

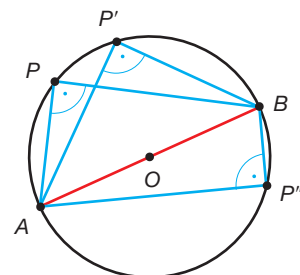
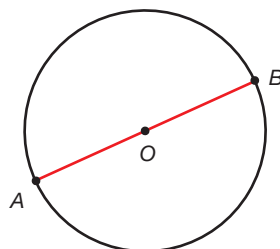
Exemple

Figure plane

Définition

Une **figure plane** est une partie du plan limitée par une ligne fermée.

Exemples

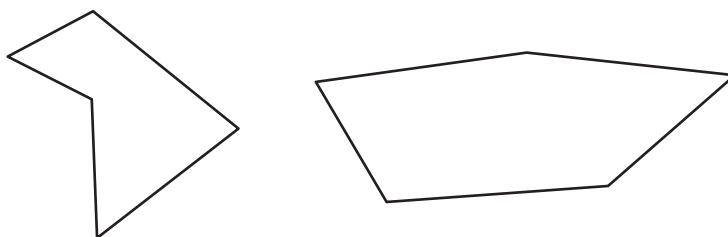


Polygone

Définition

Un **polygone** est une figure plane limitée uniquement par des segments.

Exemples



Notation

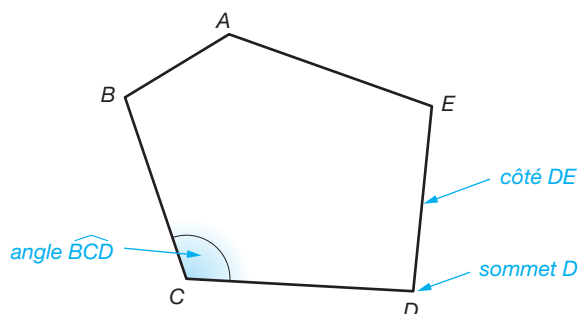
Il y a plusieurs façons de nommer un polygone, mais il convient de respecter l'ordre dans lequel les sommets se suivent.

Généralement, on note les sommets dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (sens positif) et par ordre alphabétique.

Exemple

Le polygone ci-dessous peut-être nommé *ABCDE* ou *DEABC*, etc.

Par contre, on ne peut pas le nommer *ADECB*.



Polygones particuliers

Le nom donné aux différents polygones est en lien direct avec le nombre de côtés et d'angles qui le constituent. Un **triangle** est un polygone à trois côtés et trois angles, un **quadrilatère** un polygone à quatre côtés et quatre angles, un **hexagone** possède six côtés et six angles, etc.

ÉTYM Polygone : du grec *polus*, plusieurs et *gônia*, angle.

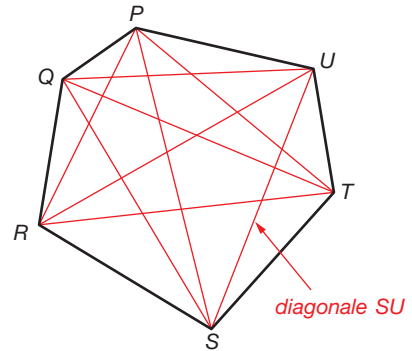
Diagonale d'un polygone

Définition

Une diagonale d'un polygone est un segment qui joint deux sommets non consécutifs.

Exemple

Le polygone $PQRSTU$ possède neuf diagonales.



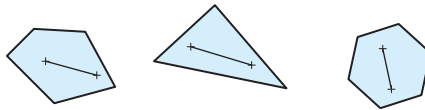
ÉTYM Diagonale : du grec *dia*, à travers et *gônia*, angle ; qui traverse d'un angle à un autre.

Polygone convexe ou non convexe

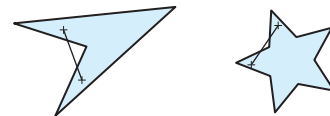
Définition

Un polygone convexe est un polygone qui contient chaque segment joignant deux de ses points.

Exemples



polygones convexes



polygones non convexes

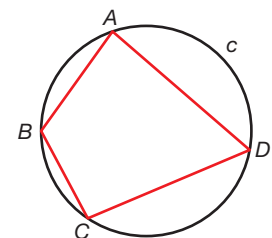
Polygone inscrit dans un cercle

Définition

Un polygone inscrit dans un cercle est un polygone dont tous les sommets sont des points de ce cercle. Ce cercle est appelé cercle circonscrit.

Exemple

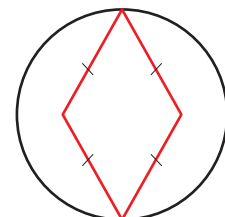
Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans le cercle c .



Remarque

Tout polygone n'est pas inscriptible dans un cercle, par exemple les losanges (non carrés).

ÉTYM Circonscrit : du latin *circum*, autour et *scribere*, écrire.



Polygone régulier

Définition

Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés et tous les angles sont isométriques.

Remarque

Si l'une des deux conditions manque, alors le polygone n'est pas régulier.

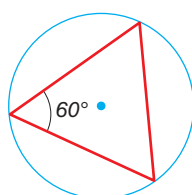
Exemple

Un losange qui n'est pas carré n'est pas un polygone régulier, car il possède quatre côtés isométriques, mais il ne possède pas quatre angles isométriques.

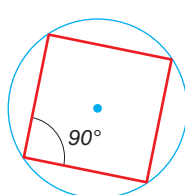
Propriété 1

Tout polygone régulier est inscrit dans un cercle.
Le centre de ce cercle est appelé **centre du polygone**.

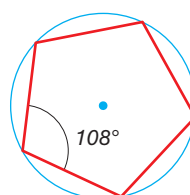
Exemples



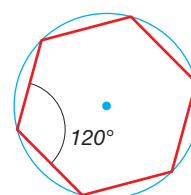
triangle équilatéral



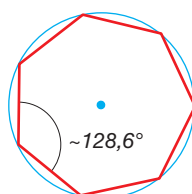
carré



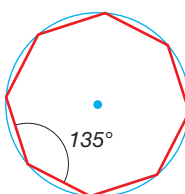
pentagone régulier



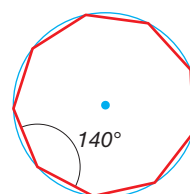
hexagone régulier



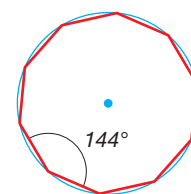
heptagone régulier



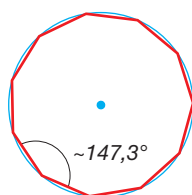
octogone régulier



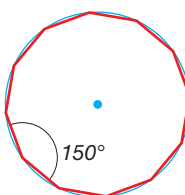
ennéagone régulier



décagone régulier



hendécagone régulier



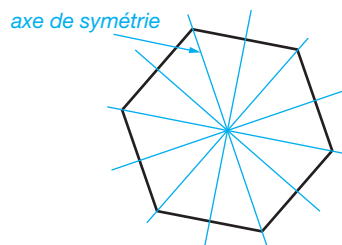
dodécagone régulier

ES

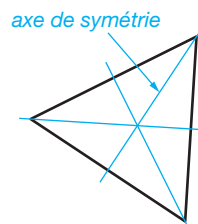
Propriété 2

Un polygone régulier possède autant d'**axes de symétrie** que de côtés.

Exemple



hexagone régulier



triangle équilatéral

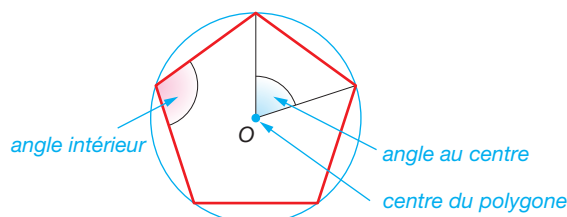
→ Segments isométriques (p. 106), Angles isométriques (p. 119), Axe de symétrie (p. 146)

Angle au centre et angle intérieur d'un polygone régulier

Définitions

- L'**angle au centre** d'un polygone régulier est l'angle dont le sommet est le centre du polygone et dont les côtés passent par deux sommets consécutifs du polygone.
- Un **angle intérieur** d'un polygone régulier est l'angle limité par deux côtés consécutifs du polygone.

Exemple



Propriétés

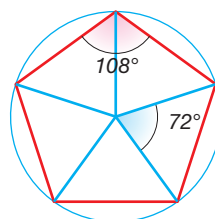
- La mesure, en degrés, de l'angle au centre d'un polygone régulier à n côtés est $\frac{360^\circ}{n}$
- La mesure, en degrés, de l'angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés est $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$

Exemple

Pour le pentagone régulier ci-contre,
l'angle au centre mesure

$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

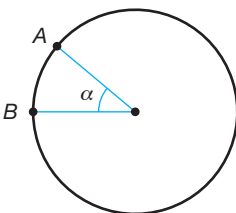
et l'angle intérieur $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$



Construire un polygone régulier avec une règle, un rapporteur et un compas

Méthode

Exemple Construire un enneagone régulier (9 côtés) inscrit dans un cercle de 1,5 cm de rayon.

ÉTAPE 1	Tracer un cercle à l'aide du compas.	Tracer un cercle de 1,5 cm de rayon.
ÉTAPE 2	Calculer la mesure de l'angle au centre α à l'aide de la formule $\frac{360^\circ}{n}$	$\alpha = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$
ÉTAPE 3	Construire un angle au centre de mesure α qui coupe le cercle en deux points A et B.	 $\alpha = 40^\circ$

ÉTAPE 4

Reporter sur le cercle des arcs de cercle de rayon AB à partir de A .

ÉTAPE 5

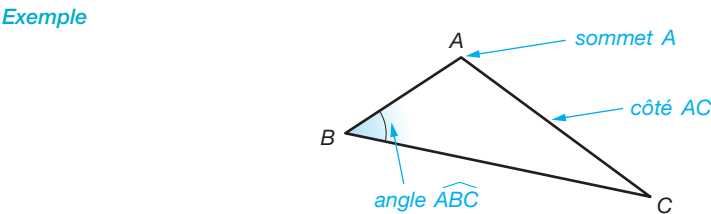
Relier les points obtenus.

$\alpha = 40^\circ$

Remarque
Il est aussi possible de reporter la mesure de l'angle au centre à l'aide du rapporteur.

Triangle

Définition Un triangle est un polygone qui a trois côtés et, par conséquent, trois angles et trois sommets.



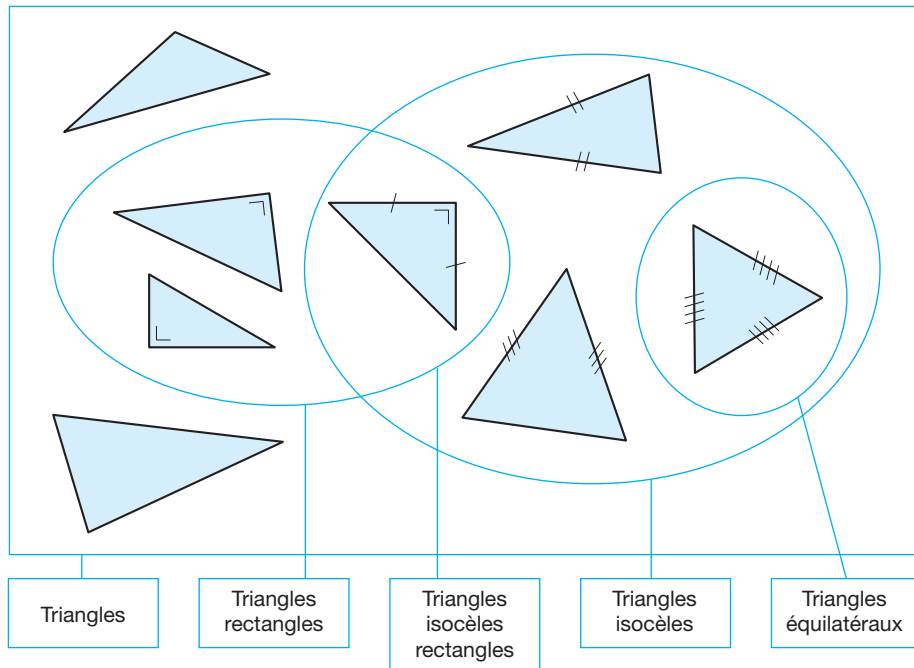
ÉTYM Triangle : du latin *tri*, trois et *angulus*, angle.

Triangles particuliers

Nom	Figure	Propriétés caractéristiques		
		Côtés	Angles	Symétries
■ Triangle équilatéral ÉTYM Équilatéral : du latin <i>aequus</i>, égal et <i>latus</i>, côté; aux côtés égaux.		Trois côtés isométriques	Trois angles isométriques	Trois axes de symétrie
■ Triangle isocèle ÉTYM Isocèle : du grec <i>isos</i>, même et <i>skelos</i>, jambe; aux jambes égales.		Au moins deux côtés isométriques	Au moins deux angles isométriques	Au moins un axe de symétrie
■ Triangle rectangle ÉTYM Hypoténuse : du grec <i>hypo</i>, sous et <i>teinein</i>, tendre; le côté opposé de l'angle droit.		Deux côtés perpendiculaires Le côté opposé à l'angle droit est l'hypoténuse	Un angle droit	

Remarque
Un triangle peut être à la fois isocèle et rectangle.

Classement des triangles



→ Segments isométriques (p. 106), Angles isométriques (p. 119), Axe de symétrie (p. 146)

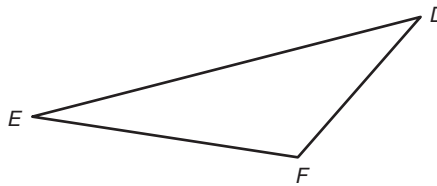
Inégalité triangulaire

Propriété

Quel que soit le triangle, la longueur de n'importe quel côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemple

$$\begin{aligned} DE &< DF + FE \\ EF &< ED + DF \\ DF &< DE + EF \end{aligned}$$



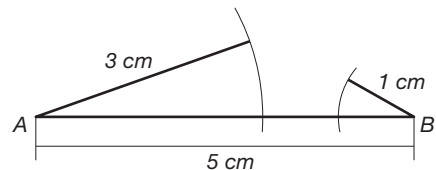
ES

Remarque

Pour vérifier qu'un triangle existe, il n'est pas nécessaire d'essayer de le construire, il suffit de vérifier que la longueur du plus grand côté soit inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemples

- Le triangle dont les côtés mesurent 4 cm, 3 cm et 2,5 cm existe puisque $4 < 2,5 + 3$.
- Le triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 3 cm et 1 cm n'existe pas car $5 > 3 + 1$.



On peut donc déterminer l'existence d'un triangle sans devoir le construire.

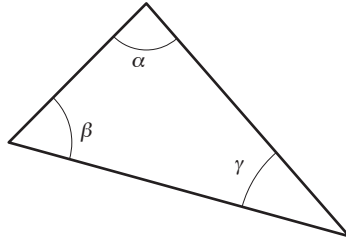
Somme des angles d'un triangle

Propriété

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .

Exemple

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



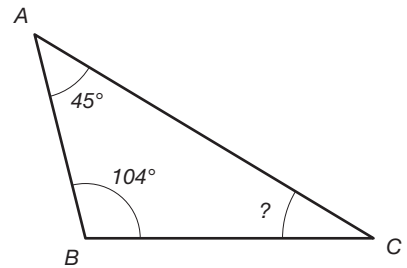
Remarque

À l'aide de cette propriété, on peut calculer la valeur du troisième angle d'un triangle si l'on connaît la valeur des deux autres.

Exemple

Dans le triangle ABC, la mesure de $\widehat{ACB}$ vaut 31°

En effet: $\widehat{ACB} = 180^\circ - (45^\circ + 104^\circ) = 31^\circ$



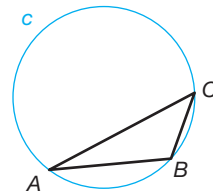
Cercle circonscrit à un triangle et médiatrices

Définition

Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle.

Exemple

c est le cercle circonscrit au triangle ABC.



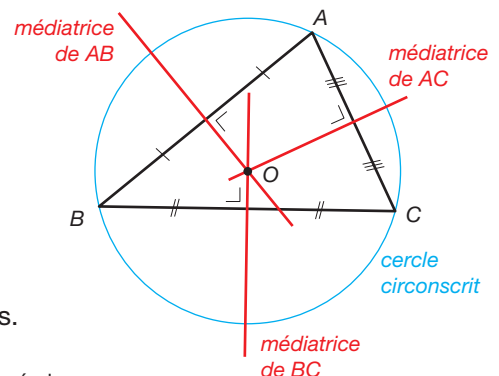
ES

Propriété

Dans tout triangle, les **médiatrices** des côtés se coupent en un point. Ce point est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Exemple

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



Remarque

Les médiatrices se coupent à l'extérieur du triangle lorsqu'un des angles est obtus.

ÉTYM Circonscrit: du latin *circum*, autour et *scribere*, écrire.

→ Médiatrice d'un segment (p. 110), Angle obtus (p. 117)

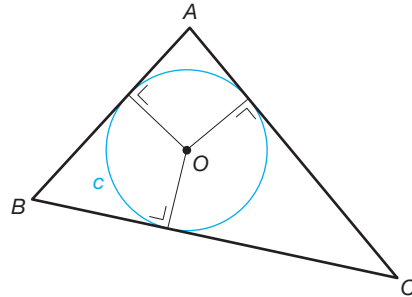
Cercle inscrit dans un triangle et bissectrices

Définition

Le cercle inscrit dans un triangle est le cercle tangent aux trois côtés de ce triangle.

Exemple

c est le cercle inscrit dans un triangle ABC .
Les trois côtés du triangle sont tangents à ce cercle.

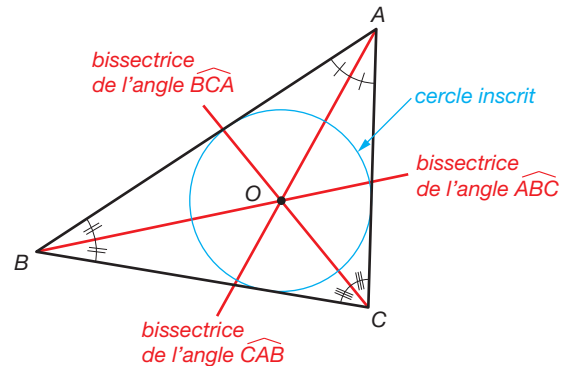


Propriété

Les **bissectrices** des angles d'un triangle se coupent en un point. Ce point est le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

Exemple

O est le centre du cercle inscrit dans un triangle ABC .



ETYM Inscrit: du latin *in*, à l'intérieur et *scribere*, écrire.

→ Tangente à un cercle (p. 114), Bissectrice d'un angle (p. 119)

Hauteurs d'un triangle et orthocentre

ES

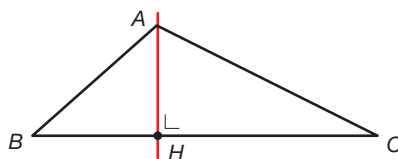
Définition

Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

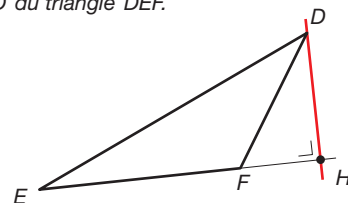
⚠ Les hauteurs peuvent être à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.

Exemples

○ La droite AH est la hauteur issue de A du triangle ABC .



○ La droite DH est la hauteur issue de D du triangle DEF .

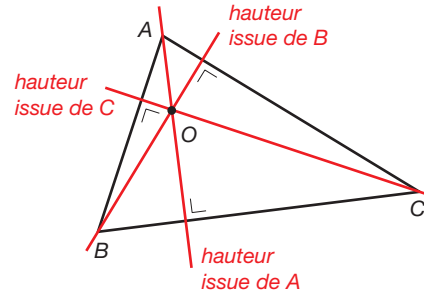


Propriété

Dans tout triangle, les hauteurs se coupent en un point appelé **orthocentre**.

Exemple

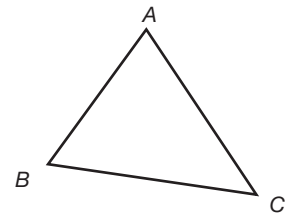
O est l'orthocentre du triangle ABC .



Tracer une hauteur d'un triangle avec une équerre

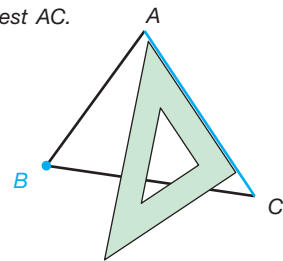
Méthode

Exemple 1 Tracer la hauteur du triangle ABC issue de B .

**ÉTAPE 1**

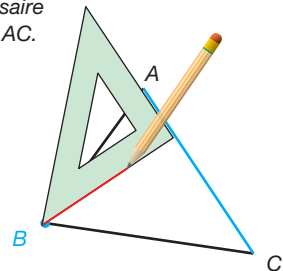
Repérer le côté opposé au sommet donné, puis placer l'équerre sur ce côté en le prolongeant si nécessaire.

Le côté opposé à B est AC .

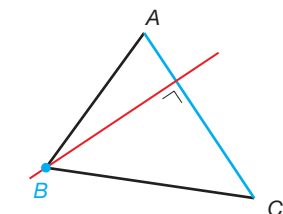
**ÉTAPE 2**

Faire glisser l'équerre sur le côté opposé pour amener l'équerre sur le sommet donné.

Ici, il n'est pas nécessaire de prolonger le côté AC .

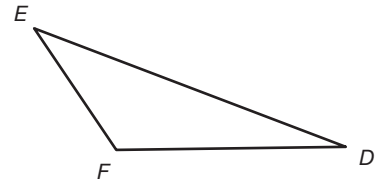
**ÉTAPE 3**

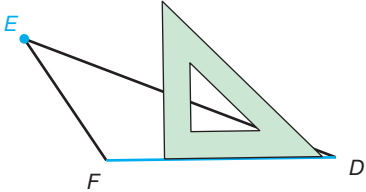
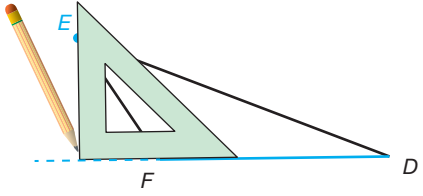
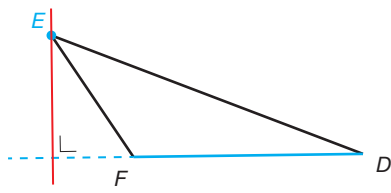
Tracer la droite perpendiculaire au côté passant par le sommet.



Méthode

Exemple 2 Tracer la hauteur du triangle DEF issue de E.



ÉTAPE 1 Repérer le côté opposé au sommet donné, puis placer l'équerre sur ce côté en le prolongeant si nécessaire.	Le côté opposé à E est DF. 
ÉTAPE 2 Faire glisser l'équerre sur le côté opposé pour amener l'équerre sur le sommet donné.	Dans ce cas, il est nécessaire de prolonger le côté DF. 
ÉTAPE 3 Tracer la droite perpendiculaire au côté DF.	

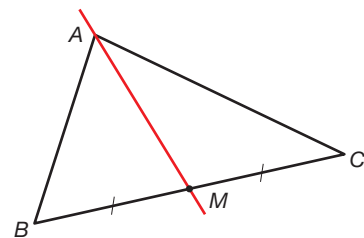
Médianes et centre de gravité

Définition

Une médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet.

Exemple

La droite AM est la médiane du triangle ABC issue de A.



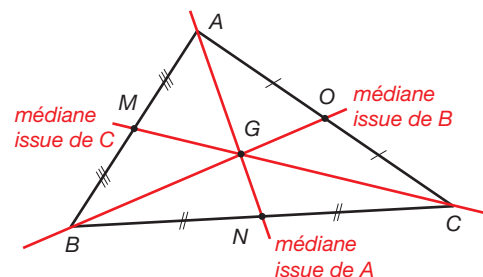
ES

Propriété 1

Dans tout triangle, ses médianes se coupent en un même point appelé **centre de gravité** du triangle.

Exemple

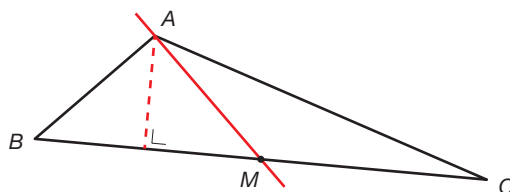
G est le centre de gravité du triangle ABC.
M, N et O sont respectivement les milieux des côtés du triangle.



Propriété 2 Une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

Exemple

La droite AM est la médiane issue de A du triangle ABC , donc $Aire_{ABM} = Aire_{AMC}$



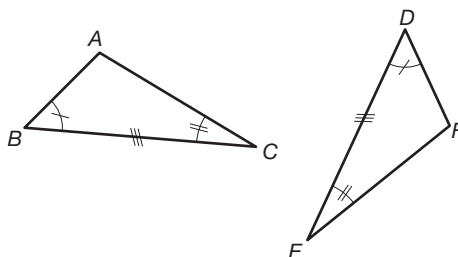
Triangles isométriques

Définition Deux triangles sont isométriques si l'un est l'image de l'autre par une isométrie. Cela signifie qu'ils sont superposables.

Propriété 1 Deux triangles sont isométriques s'ils ont un côté isométrique compris entre deux angles respectivement isométriques.

Exemple

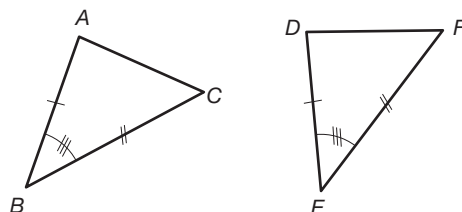
$BC = DE$, $\widehat{ABC} = \widehat{FDE}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{DEF}$, donc les triangles ABC et DEF sont isométriques.



Propriété 2 Deux triangles sont isométriques s'ils ont deux côtés respectivement isométriques adjacents à un angle isométrique.

Exemple

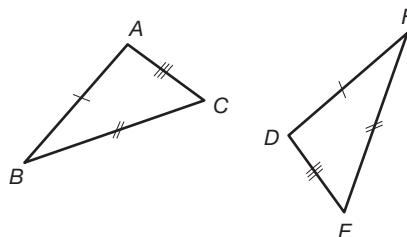
$AB = DE$, $BC = EF$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, donc les triangles ABC et DEF sont isométriques.



Propriété 3 Deux triangles sont isométriques s'ils ont trois côtés respectivement isométriques.

Exemple

$AB = DF$, $BC = EF$ et $AC = DE$, donc les triangles ABC et DEF sont isométriques.



→ Segments isométriques (p. 106), Isométrie (p. 142)

Triangles semblables

Définition

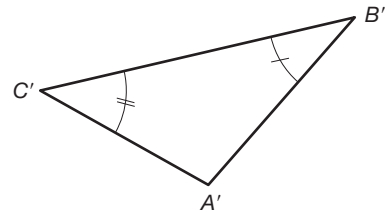
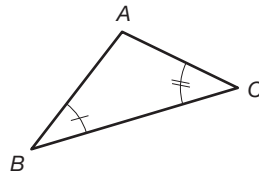
Deux triangles sont semblables si l'un est l'image de l'autre par une similitude. Cela signifie que l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre.

Propriété 1

Deux triangles sont semblables s'ils ont deux angles respectivement isométriques (le troisième angle l'est donc aussi).

Exemple

$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$
donc les triangles ABC
et $A'B'C'$ sont semblables.

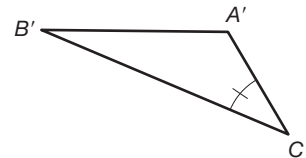
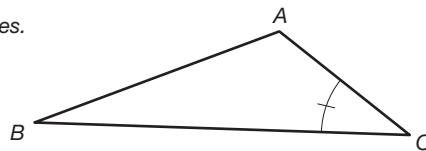


Propriété 2

Deux triangles sont semblables s'ils ont un angle isométrique compris entre deux côtés respectivement proportionnels.

Exemple

$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\frac{CA}{C'A'} = \frac{CB}{C'B'} = 1,4$
donc les triangles ABC
et $A'B'C'$ sont semblables.

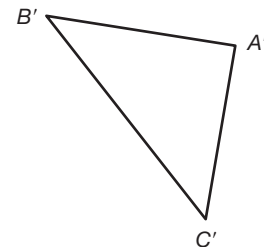
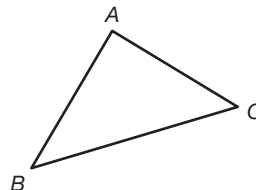


Propriété 3

Deux triangles sont semblables s'ils ont leurs côtés respectivement proportionnels.

Exemple

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = 1,2$
donc les triangles ABC
et $A'B'C'$ sont semblables.



ES

Figures semblables

Définition

Deux figures sont semblables si l'on obtient les dimensions de l'une en multipliant celles de l'autre par un même nombre positif non nul et si leurs angles sont respectivement isométriques.

Exemple

$$\widehat{D'A'B'} = \widehat{DAB}$$

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$$

$$\widehat{B'C'D'} = \widehat{BCD}$$

$$\widehat{C'D'A'} = \widehat{CDA}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{4,5}{3} = 1,5$$

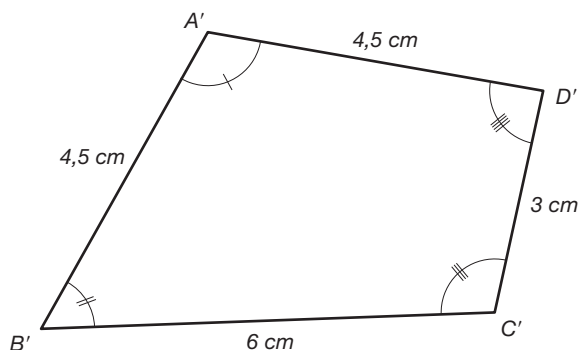
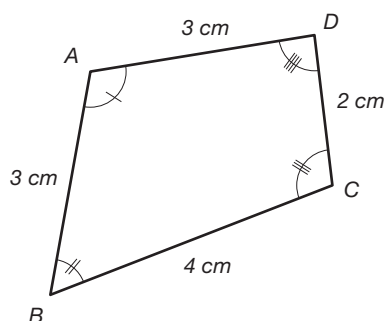
On vérifie ensuite que :

$$B'C' = 1,5 \cdot BC$$

$$C'D' = 1,5 \cdot CD$$

$$A'D' = 1,5 \cdot AD$$

Donc les quadrilatères ABCD et A'B'C'D' sont semblables.



Conséquence Les dimensions de deux figures semblables sont respectivement proportionnelles.

ES

Définitions

- **Agrandir** une figure, c'est multiplier chaque dimension de celle-ci par un même nombre positif plus grand que 1 et conserver la valeur de ses angles.
- **Réduire** une figure, c'est multiplier chaque dimension de celle-ci par un même nombre positif non nul plus petit que 1 et conserver la valeur de ses angles.

Conséquence Une figure et son image par un agrandissement ou une réduction sont des figures semblables.

→ Proportionnalité (p. 69), Angles isométriques (p. 119), Homothétie (p. 152), Similitude (p. 155)

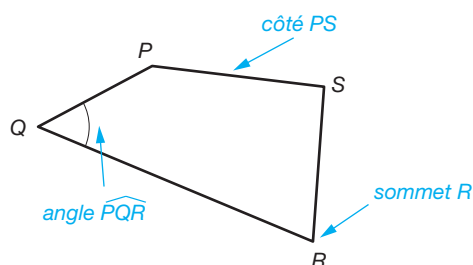
Quadrilatère

Définition

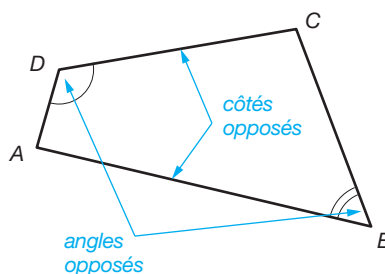
Un quadrilatère est un polygone qui a quatre côtés.

Exemple

$PQRS$ est un quadrilatère.



- Les côtés DC et AB ; AD et BC sont appelés côtés opposés.
- Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$; $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont appelés angles opposés.



Propriété

La somme des mesures des angles d'un quadrilatère est égale à 360° .

ÉTYM Quadrilatère: du latin *quattuor*, quatre et *latus*, côté.

→ Angle (p. 115), Polygone (p. 124), Somme des angles d'un triangle (p. 130)

Quadrilatères particuliers

Remarque

Dans le tableau qui suit, les propriétés caractéristiques permettent de construire, reconnaître ou prouver la nature du quadrilatère correspondant.

Nom	Figure	Propriétés caractéristiques	Autres propriétés
■ Trapèze ÉTYM Trapèze: du grec <i>trapeza</i> , table.		Au moins une paire de côtés parallèles.	
■ Trapèze isocèle		Au moins une paire de côtés parallèles et les deux autres côtés isométriques. Deux paires d'angles isométriques.	Des diagonales isométriques. Au moins un axe de symétrie.

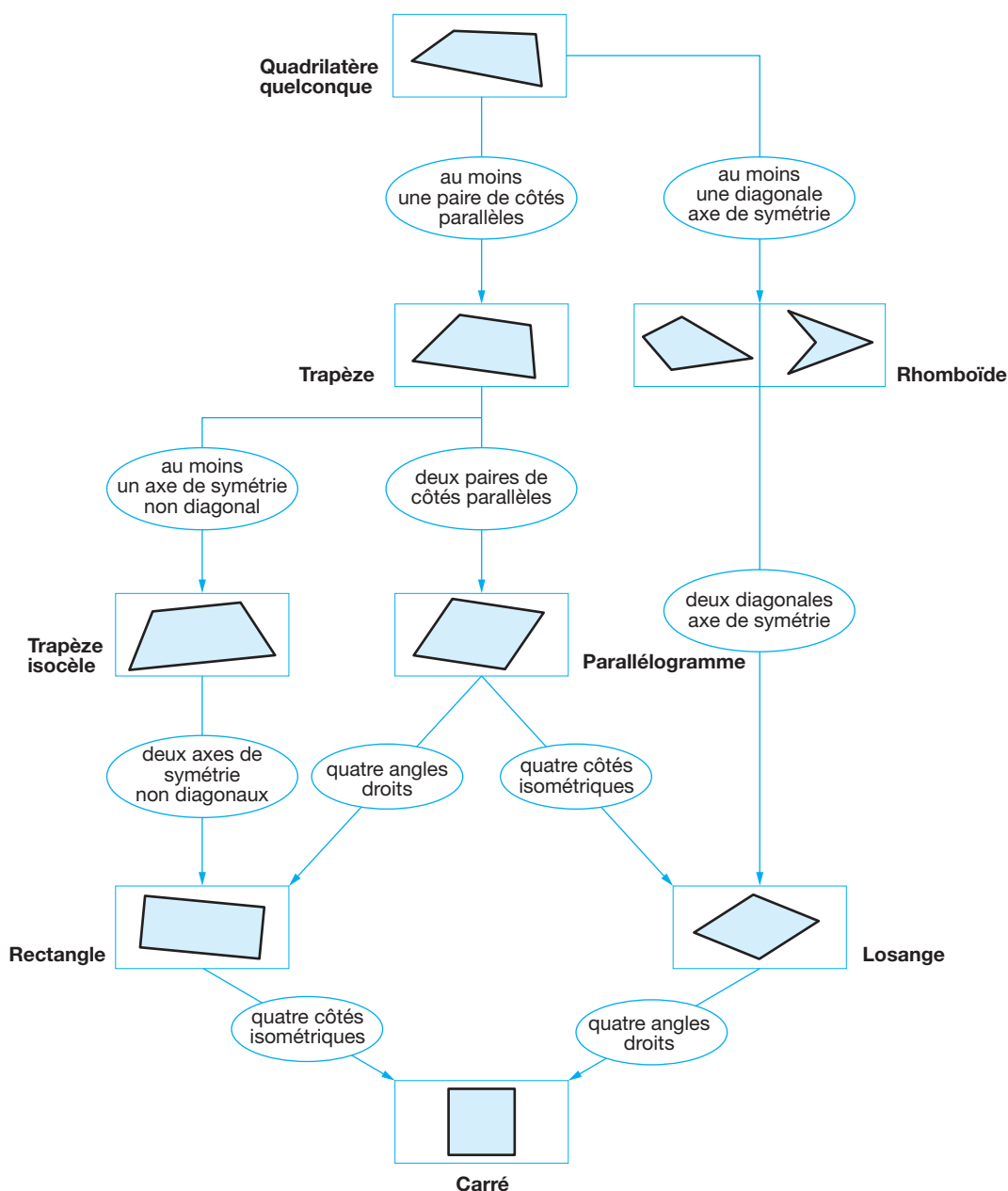
Nom	Figure	Propriétés caractéristiques	Autres propriétés
■ Trapèze rectangle		Au moins une paire de côtés opposés parallèles et au moins deux angles droits.	
■ Parallélogramme		Deux paires de côtés parallèles. Deux paires de côtés opposés isométriques. Des diagonales qui se coupent en leur milieu. Des angles opposés isométriques. Un centre de symétrie.	
■ Rectangle ÉTYM Rectangle : du latin <i>rectus</i> , droit et <i>angulus</i> , angle.		Quatre angles droits. Des diagonales isométriques qui se coupent en leur milieu. Deux axes de symétrie, les médiatrices des côtés.	Un centre de symétrie. Deux paires de côtés parallèles et isométriques.
■ Carré ÉTYM Carré : du latin <i>quadratus</i> ; participe passé de <i>quadrare</i> , carrer, rendre carré.		Quatre angles droits et quatre côtés isométriques. Des diagonales isométriques, perpendiculaires qui se coupent en leur milieu. Quatre axes de symétrie, ses diagonales ¹ et les médiatrices des côtés.	Un centre de symétrie.
■ Losange		Quatre côtés isométriques. Des diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu. Deux axes de symétrie, ses diagonales ¹ .	Un centre de symétrie. Deux paires de côtés parallèles. Angles opposés isométriques.
■ Rhomboïdes Cerf-volant Fer de lance		Deux paires de côtés consécutifs isométriques. Une diagonale aussi axe de symétrie ¹ . Des diagonales perpendiculaires, l'une coupe l'autre en son milieu.	Au moins deux angles opposés isométriques.

ES

→ Médiatrice d'un segment (p. 110), Angles isométriques (p. 119),
Diagonale d'un polygone (p. 125)

¹ Bien que conscients que les axes de symétrie sont des droites et les diagonales des segments, les rédacteurs assument l'abus qui consiste à lier, dans ces formulations, axe de symétrie et diagonale.

Classement des quadrilatères



ES

Remarque

Ce tableau, comme les propriétés caractéristiques des quadrilatères, permet de constater que :

- un carré est un rectangle, un losange, un parallélogramme, un rhomboïde, un trapèze ;
- un rectangle est un parallélogramme, un trapèze ;
- un losange est un parallélogramme, un rhomboïde, un trapèze ;
- un parallélogramme est un trapèze.

→ Segments isométriques (p. 106), Diagonale d'un polygone (p. 125), Axe de symétrie (p. 146)

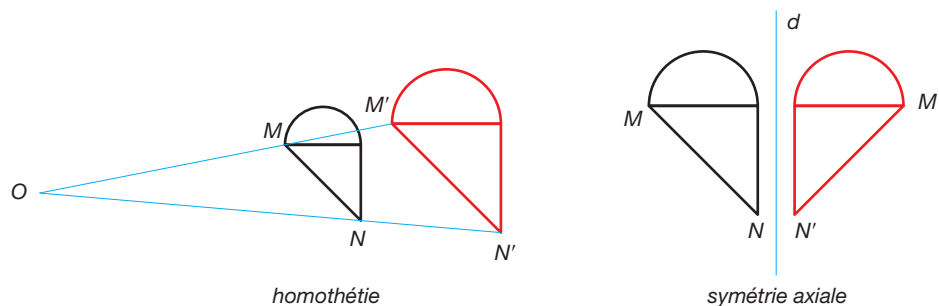
Transformations géométriques

Transformations du plan

Définition

On appelle transformation du plan dans lui-même tout procédé (déplacement, agrandissement, déformation, etc.) qui, à partir de n'importe quel point M du plan, permet de construire un point M' du plan. On dit que M' est l'image de M par cette transformation. M' est unique.

Exemples



Quelques propriétés des transformations du plan

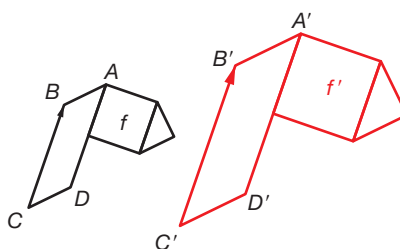
Propriété 1

Une transformation conserve les **longueurs**, si chaque segment a pour image un segment de même longueur.

Contre-exemple

Un agrandissement ne conserve pas les longueurs :

$AB \neq A'B'$; $BC \neq B'C'$; ...



ES

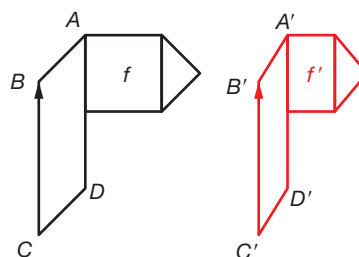
Propriété 2

Une transformation conserve les **mesures des angles**, si chaque angle a pour image un angle de même mesure.

Contre-exemple

La transformation ci-contre ne conserve pas les mesures des angles :

$\widehat{ABC} \neq \widehat{A'B'C'}$; $\widehat{BCD} \neq \widehat{B'C'D'}$; ...



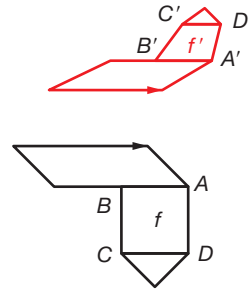
Propriété 3

Une transformation conserve le **parallélisme**, si chaque paire de droites ou de segments parallèles a pour image une paire de droites ou de segments parallèles.

Contre-exemple

La transformation ci-contre ne conserve pas le parallélisme :

$AD \parallel BC$, mais $A'D'$ n'est pas parallèle à $B'C'$.

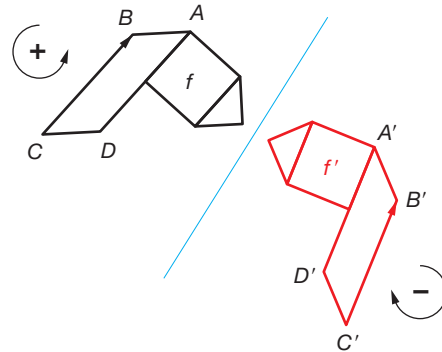
**Propriété 4**

Une transformation conserve l'**orientation**, si, en suivant les sommets consécutifs de la figure et de son image, on tourne dans le même sens.

Contre-exemple

Une symétrie axiale ne conserve pas l'orientation :

on lit les lettres ABCD et $A'B'C'D'$ en tournant dans des sens différents.

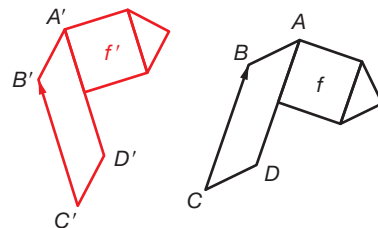
**Propriété 5**

Une transformation conserve les **directions**, si chaque droite a pour image une droite qui lui est parallèle.

Contre-exemple

Une rotation d'angle différent de 180° ou 360° ne conserve pas les directions :

les droites AB et $A'B'$ ne sont pas parallèles.

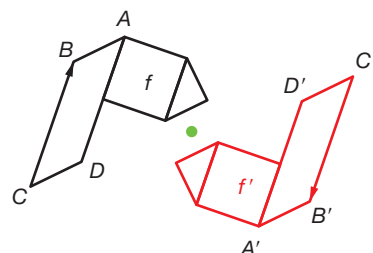
**Propriété 6**

Une transformation conserve le **sens des vecteurs**, si chaque vecteur a la même direction et le même sens que son image.

Contre-exemple

Une symétrie centrale ne conserve pas le sens des vecteurs :

les vecteurs $\vec{CB}$ et $\vec{C'B'}$ n'ont pas le même sens.



→ Figures semblables (p. 136), Vecteur (p. 142),
Symétrie axiale (p. 144), Symétrie centrale (p. 146)

Isométrie

Définition

Une isométrie est une transformation du plan qui conserve les longueurs.

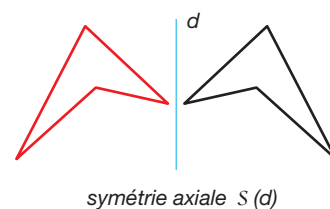
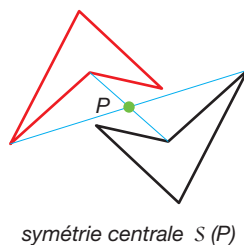
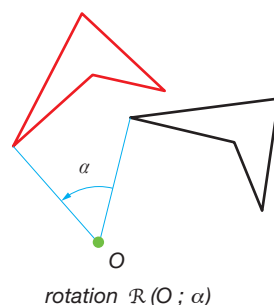
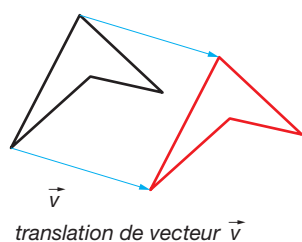
Conséquences

- Une isométrie conserve la mesure des angles.
- Une figure et son image par une isométrie ont la même forme et les mêmes dimensions, elles sont donc superposables.

Remarque

La translation, la rotation, la symétrie centrale et la symétrie axiale sont des isométries.

Exemples



ÉTYM **Isométrie** : du grec *isos*, même et *metron*, mesure.

→ Translation (p. 143), Symétrie axiale (p. 144), Symétrie centrale (p. 146), Rotation (p. 148)

Vecteur

ES

Définitions

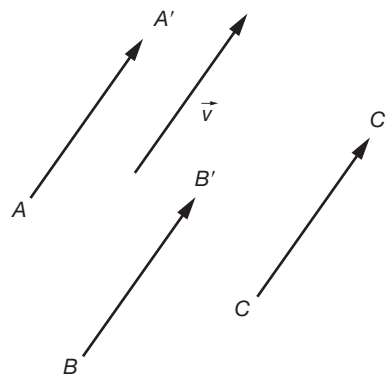
- Un vecteur est un segment de droite orienté (flèche), noté, par exemple, $\vec{v}$.
- Un vecteur possède une longueur, une direction et un sens.

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même longueur, la même direction et le même sens.

Exemple

Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ et $\vec{v}$ sont égaux, car ils ont la même direction (ils sont parallèles), même sens et même longueur.

On peut donc écrire $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{v}$



Remarque

Un vecteur peut être représenté par une infinité de segments orientés (flèches).

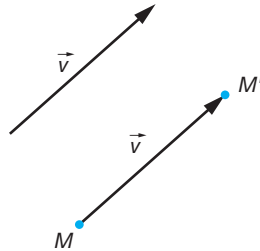
ÉTYM **Vecteur** : du latin *vector*, celui qui transporte.

Translation

Définition

L'image d'un point M par une translation de vecteur $\vec{v}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

Exemple



$\overrightarrow{MM'}$ a la même longueur, la même direction et le même sens que le vecteur $\vec{v}$.

Notation

Du français...

« Le point M a pour image le point M' par la translation de vecteur $\vec{v}$. »

... à l'écriture mathématique

$$M \xrightarrow{T(\vec{v})} M'$$

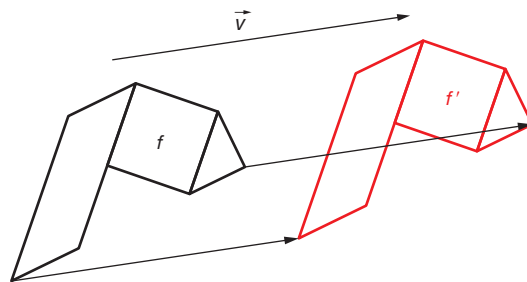
Image d'une figure par une translation

Exemple

La figure f a pour image la figure f' par la translation de vecteur $\vec{v}$.

Notation

$$f \xrightarrow{T(\vec{v})} f'$$



Remarques

- **Translation et mouvement :** on passe de la figure f à son image f' par la translation de vecteur $\vec{v}$ en faisant glisser f sans la faire tourner (donc en conservant le parallélisme).
- Le vecteur $\vec{v}$ indique la direction, le sens et la longueur du déplacement.

Propriétés

La translation est une transformation qui conserve :

- les longueurs et la mesure des angles ;
- le parallélisme ;
- l'orientation ;
- les directions et le sens des vecteurs.

Remarque

Une translation est par conséquent une isométrie.

ETYM Translation : du latin *translatio*, transfert.

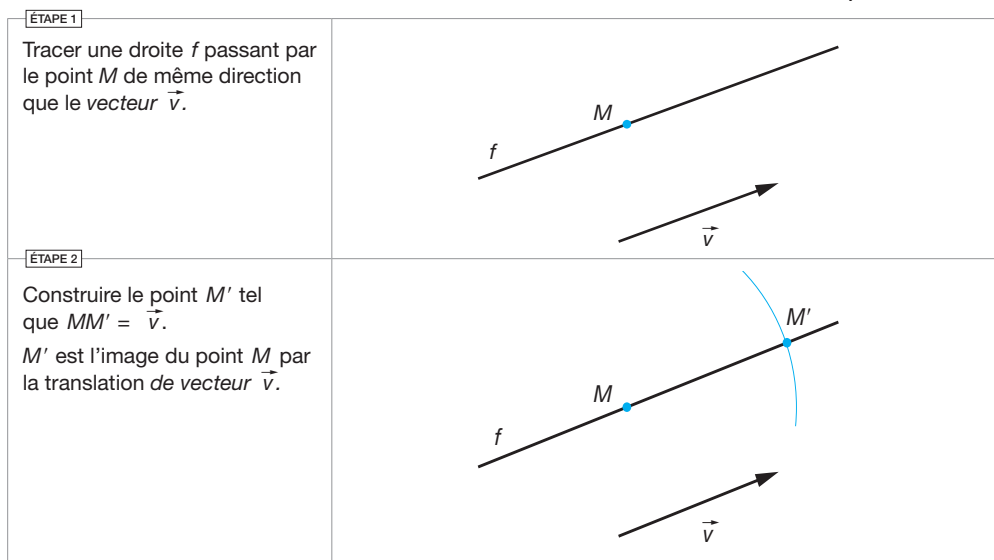
→ Quelques propriétés des transformations du plan (p. 140), Isométrie (p. 142), Vecteur (p. 142)

Construire l'image d'un point par une translation

Méthode

Exemple Construire l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{v}$.

M



Remarque

Pour construire l'image d'un polygone par une translation, on peut :

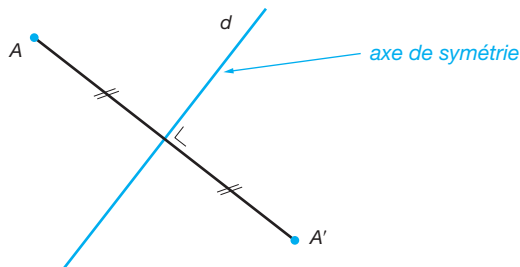
- construire l'image de chacun de ses sommets et les relier ;
- construire l'image d'un sommet, puis utiliser les propriétés de la translation.

Symétrie axiale

Définitions

- L'image d'un point A par une symétrie d'axe d est le point A' tel que d est la médiatrice du segment AA' . On dit que A' est le symétrique de A par rapport à la droite d .
- d est appelé **axe de symétrie**.

Exemple



ES

Notation

Du français...

« Le point A a pour image le point A' par la symétrie d'axe d . »

... à l'écriture mathématique

$$A \xrightarrow{S(d)} A'$$

Remarque

Tous les points de l'axe de symétrie sont images d'eux-mêmes : ce sont des points fixes (ou invariants).

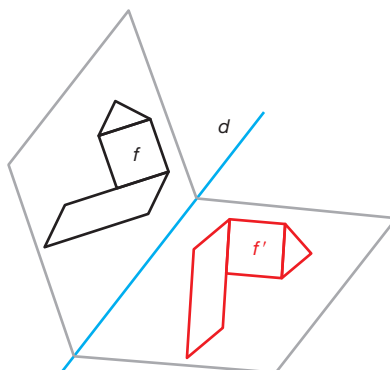
Image d'une figure par une symétrie axiale

Exemple

La figure f a pour image la figure f' par la symétrie d'axe d .

Notation

$$f \xrightarrow{S(d)} f'$$



Remarque

Rotation et mouvement : on passe de la figure f à son image f' par la symétrie d'axe d en pliant la feuille suivant l'axe d . Les figures f et f' se superposent.

Propriété

La symétrie axiale est une transformation qui conserve les longueurs, la mesure des angles et le parallélisme mais ne conserve pas l'orientation, les directions et le sens des vecteurs.

Remarques

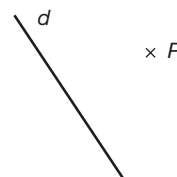
- Une symétrie axiale est par conséquent une isométrie.
- Une droite (non parallèle à l'axe de symétrie) et son image se coupent sur l'axe de symétrie.

→ Quelques propriétés des transformations du plan (p. 140), Isométrie (p. 142), Axe de symétrie (p. 146)

Construire l'image d'un point par une symétrie axiale

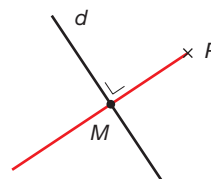
Méthode

Exemple Construire l'image du point P par la symétrie axiale d'axe d .



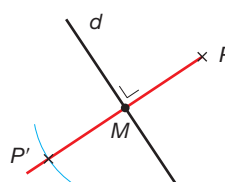
ÉTAPE 1

Tracer la demi-droite d'origine P perpendiculaire à l'axe de symétrie.
Elle coupe la droite d en M .



ÉTAPE 2

Placer le point P' sur cette demi-droite tel que $MP = MP'$.
 P' est l'image du point P par la symétrie d'axe d .



Remarque

Pour construire l'image d'un polygone par une symétrie axiale, on peut :

- construire l'image de chacun de ses sommets et les relier ;
- construire l'image de deux sommets, puis utiliser les propriétés des symétries axiales.

Axe de symétrie

Définition

Une droite d est un axe de symétrie d'une figure si, après pliage le long de cette droite, les deux moitiés de la figure se superposent.

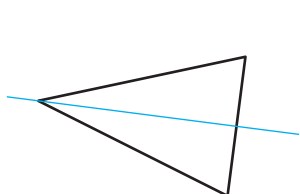
Exemple

Une figure peut...

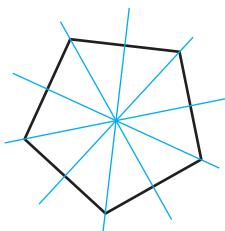
... avoir un axe de symétrie

... avoir plusieurs axes de symétrie

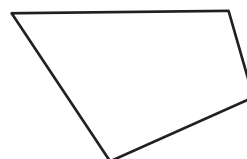
... ne pas avoir d'axe de symétrie



triangle isocèle



pentagone régulier



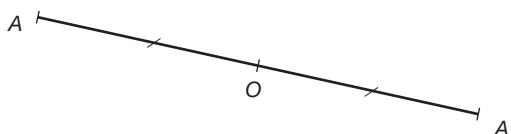
quadrilatère quelconque

Symétrie centrale

Définition

L'image d'un point A par une symétrie de centre O est le point A' tel que O est le milieu du segment AA' . On dit que A' est le symétrique de A par rapport à O .

Exemple



Notation

Du français...

« Le point A a pour image le point A' par la symétrie de centre O . »

... à l'écriture mathématique

$$A \xrightarrow{S(O)} A'$$

ES

Remarques

- Le point O est sa propre image par la symétrie de centre O . C'est un point fixe (ou invariant).
- Une symétrie de centre O est une rotation de centre O et d'angle 180° .

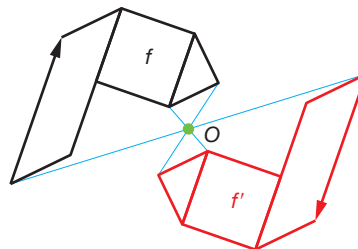
Image d'une figure par une symétrie centrale

Exemple

La figure f a pour image la figure f' par la symétrie de centre O .

Notation

$$f \xrightarrow{S(O)} f'$$



Remarque

Rotation et mouvement: On passe de la figure f à son image f' par la symétrie de centre O en la faisant tourner autour de O d'un angle de 180° .

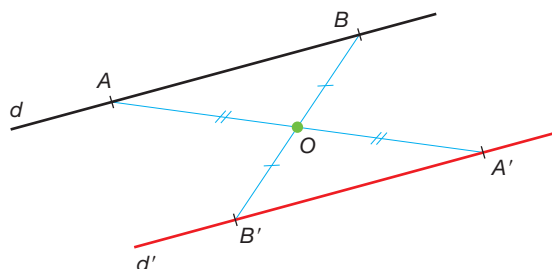
Propriété

La symétrie centrale est une transformation qui conserve les longueurs, la mesure des angles, le parallélisme, l'orientation et les directions mais ne conserve pas le sens des vecteurs.

Par une symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite parallèle.

Exemple

$d \parallel d'$

**Remarque**

Une symétrie centrale est par conséquent une isométrie.

→ Quelques propriétés des transformations du plan (p. 140), Isométrie (p. 142), Centre de symétrie (p. 148), Rotation (p. 148)

Construire l'image d'un point par une symétrie centrale

Méthode

Exemple Construire l'image du point A par la symétrie de centre O .

A
x

O
x

ÉTAPE 1 Tracer la demi-droite d'origine A passant par le centre de symétrie O.	
ÉTAPE 2 Placer le point A' sur cette demi-droite tel que $OA = OA'$. A' est l'image du point A par la symétrie de centre O.	

ES

Remarque

Pour construire l'image d'un polygone par une symétrie centrale, on peut :

- construire l'image de chacun de ses sommets et les relier ;
- construire l'image d'un sommet, puis utiliser les propriétés des symétries centrales.

Centre de symétrie

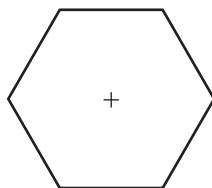
Définitions

- Une figure a un **centre de symétrie** si, lorsqu'on la fait tourner d'un demi-tour autour de ce point, elle se superpose à elle-même.
- Le centre de symétrie d'une figure est un point tel que tous les points de la figure sont deux à deux symétriques par rapport à lui.

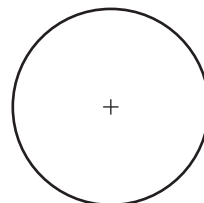
Exemples

Une figure peut...

... avoir un centre de symétrie

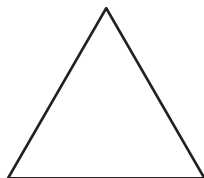


hexagone régulier

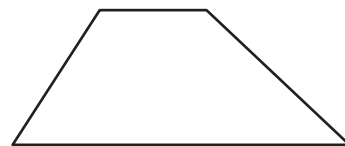


cercle

... ne pas avoir de centre de symétrie



triangle équilatéral



trapèze

Rotation

Définition

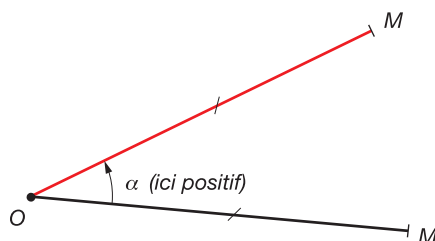
Étant donné une mesure α d'un angle et un point O , on appelle **rotation de centre O et d'angle α** la transformation qui, à tout point M (différent de O), associe le point M' tel que :

- $OM = OM'$;
- $\widehat{MOM'} = \alpha$ (en respectant le sens de rotation) ;
- l'image de O est O ; c'est un point fixe ou invariant.

L'angle de rotation peut être positif ou négatif :

- s'il est positif, on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- s'il est négatif, on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exemple



Notation

Du français...

« Le point M a pour image le point M'
par la rotation de centre O et d'angle α . »

... à l'écriture mathématique

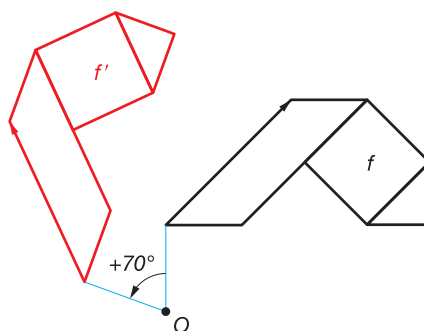
$$M \xrightarrow{\mathcal{R}(O; \alpha)} M'$$

Image d'une figure par une rotation**Exemple**

La figure f a pour image la figure f'
par la rotation de centre O et d'angle $+70^\circ$.

Notation

$$f \xrightarrow{\mathcal{R}(O; +70^\circ)} f'$$

**Remarque**

Rotation et mouvement : on passe de la figure f à son image f' par la rotation de centre O et d'angle $+70^\circ$ en faisant tourner f autour de O suivant un angle de 70° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Propriété

Une rotation est une transformation qui conserve les longueurs, la mesure des angles, le parallélisme et l'orientation mais ne conserve pas les directions sauf si l'angle mesure 180° ou 360° .

Remarque

Une rotation est par conséquent une isométrie.

ÉTYM **Rotation :** du latin *rota*, roue; *rotare*, tourner comme une roue.

→ Quelques propriétés des transformations du plan (p. 140), Isométrie (p. 142)

Construire l'image d'un point par une rotation

Méthode

Exemple Construire l'image M' du point M par la rotation $\mathcal{R}(O ; -50^\circ)$.



ÉTAPE 1 Tracer le segment OM.	
ÉTAPE 2 Tracer la demi-droite Oy tel que $\widehat{MOy}$ soit égal à l'angle de la rotation (attention au sens de rotation).	
ÉTAPE 3 Placer le point M' sur la demi-droite Oy tel que $OM' = OM$ avec le compas ou la règle graduée.	

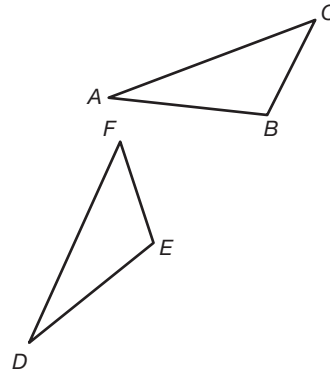
Remarque
Pour construire l'image d'un polygone par une rotation, on peut :

- construire l'image de chacun de ses sommets et les relier ;
- construire l'image de deux sommets, puis utiliser les propriétés des rotations.

Retrouver le centre et l'angle d'une rotation

Méthode

Exemple Le triangle ABC a pour image le triangle DEF par une rotation. Retrouver les caractéristiques de cette rotation.



ÉTAPE 1 Repérer deux couples de points et leur image par la rotation. Pour cela, on peut identifier des sommets d'angles isométriques.	$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ donc l'image de B est E. $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$ donc l'image de C est F.
ÉTAPE 2 Tracer la médiatrice des segments dont les extrémités sont un point et son image. Leur point d'intersection est le centre de la rotation.	On trace les médiatrices des segments BE et CF. Le point O intersection de ces deux médiatrices est le centre de la rotation.
ÉTAPE 3 Mesurer l'angle de la rotation (attention au sens de rotation).	L'angle de la rotation est la mesure de l'angle $\widehat{BOE}$. Ici, l'angle est de $+45^\circ$. $\mathcal{R}(O; +45^\circ)$

ES

Homothétie

Définition

Étant donné un point O et un nombre k non nul, on appelle **homothétie de centre O** et de rapport k la transformation qui, à tout point M , associe un point M' tel que :

- le point O est un point fixe ;
- les points O , M et M' sont alignés.
- Si $k > 0$, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ont le même sens et $OM' = k \cdot OM$
- Si $k < 0$, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont de sens contraire et $OM' = -k \cdot OM$

Notation

Du français...
« Le point M a pour image le point M' par l'homothétie de centre O et de rapport k . »

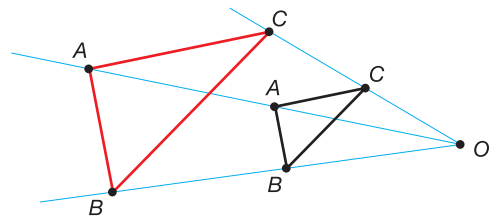
... à l'écriture mathématique

$$M \xrightarrow{\mathcal{H}(O; k)} M'$$

Exemples

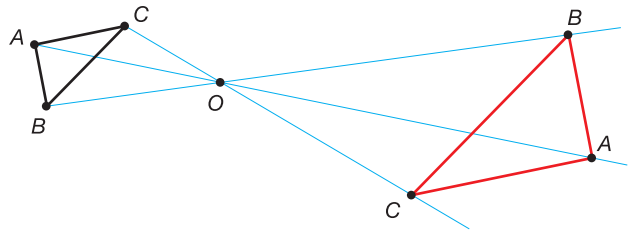
○ $\mathcal{H}(O; 2)$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont de même sens et $OA' = 2 \cdot OA$



○ $\mathcal{H}(O; -2)$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont de sens contraire et $OA' = -2 \cdot OA$



Propriétés

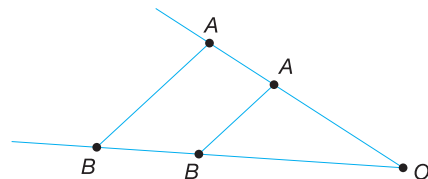
- Une homothétie est une transformation qui conserve la mesure des angles et le parallélisme, mais qui ne conserve pas les longueurs.
- Si un segment AB a pour image un segment $A'B'$ par une homothétie de centre O et de rapport k , alors $\frac{A'B'}{AB} = k$ si $k > 0$ ou $\frac{A'B'}{AB} = -k$ si $k < 0$

Exemple

$A'B'$ est l'image de AB par une homothétie de centre O et de rapport 1,5.

$$\begin{array}{ll} OA = 3 & OB = 4 \\ OA' = 4,5 & OB' = 6 \end{array}$$

Donc : $\frac{A'B'}{AB} = 1,5$

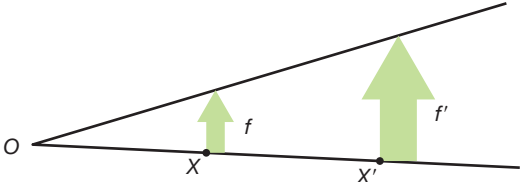
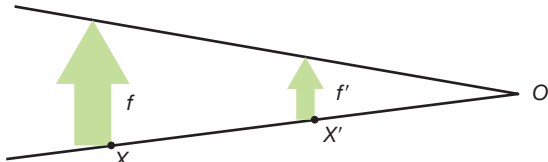
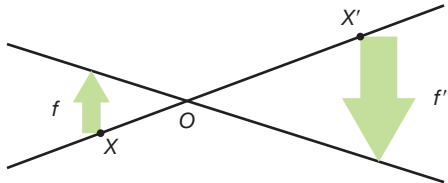
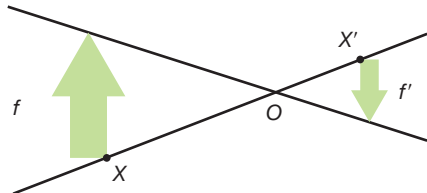


ES

Conséquences

- Une homothétie est une transformation qui consiste à agrandir ou réduire une figure tout en conservant les directions.
- Pour retrouver le rapport d'une homothétie sans connaître son centre, on peut calculer le rapport des longueurs des segments image l'un de l'autre par l'homothétie.

On distingue quatre types d'homothéties.

Nom	Propriétés	Caractéristiques
■ L'agrandissement direct	Il conserve : - le rapport des longueurs, la mesure des angles, le parallélisme ; - l'orientation ; - la direction et le sens des vecteurs.	- La figure image est plus grande que celle de départ ; $k > 1$; - la figure et son image sont du même côté du centre d'homothétie.
Exemple <i>Ici, $k = 2$</i>		
		
■ La réduction directe	Il conserve : - le rapport des longueurs, la mesure des angles, le parallélisme ; - l'orientation ; - la direction et le sens des vecteurs.	- La figure image est plus petite que celle de départ ; $0 < k < 1$; - la figure et son image sont du même côté du centre d'homothétie.
Exemple <i>Ici, $k = \frac{1}{2} = 0,5$</i>		
		
■ L'agrandissement indirect	Il conserve : - le rapport des longueurs, la mesure des angles, le parallélisme ; - l'orientation ; - la direction mais inverse le sens des vecteurs.	- La figure image est plus grande que celle de départ ; $k < -1$; - la figure image est de l'autre côté du centre d'homothétie.
Exemple <i>Ici, $k = -2$</i>		
		
■ La réduction indirecte	Il conserve : - le rapport des longueurs, la mesure des angles, le parallélisme ; - l'orientation ; - la direction mais inverse le sens des vecteurs.	- La figure image est plus petite que celle de départ ; $-1 < k < 0$; - la figure image est de l'autre côté du centre d'homothétie.
Exemple <i>Ici, $k = -\frac{1}{2} = -0,5$</i>		
		

ETYM Homothétie : du grec *homos*, semblable et *thetos*, position.

→ Figures semblables (p. 136), Vecteur (p. 142)

Construire l'image d'un point par une homothétie

Méthode

Construire l'image d'un point par une homothétie de rapport positif.

Exemple 1 Construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 3$.

ÉTAPE 1

Tracer la droite OA.

ÉTAPE 2

Construire le point A' tel que :

- les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont de même sens ;
- $OA' = 3 \cdot OA$.

Méthode

Construire l'image d'un point par une homothétie de rapport négatif.

Exemple 2 Construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport $k = -3$.

ÉTAPE 1

Tracer la droite OA.

ÉTAPE 2

Construire le point A'' tel que :

- les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA''}$ sont de sens contraire ;
- $OA'' = -3 \cdot OA$.

Remarque

- Pour construire l'image d'un polygone par une homothétie, on peut :
- construire l'image de chacun de ses sommets et les joindre ;
 - construire l'image d'un sommet et compléter la figure en utilisant les propriétés des homothéties.

Propriétés des isométries et des homothéties du plan

Transformation \ Conservation	Longueurs	Mesure des angles	Parallélisme	Orientation	Directions	Sens des vecteurs
Translation	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Rotation	oui	oui	oui	oui	non ¹	non ²
Symétrie centrale	oui	oui	oui	oui	oui	non
Symétrie axiale	oui	oui	oui	non	non	non
Homothétie de rapport positif	non ³	oui	oui	oui	oui	oui
Homothétie de rapport négatif	non ⁴	oui	oui	oui	oui	non

¹ sauf si l'angle mesure 180° ou 360°
² sauf si l'angle mesure 360°

³ sauf si le rapport est 1
⁴ sauf si le rapport est -1

Similitude

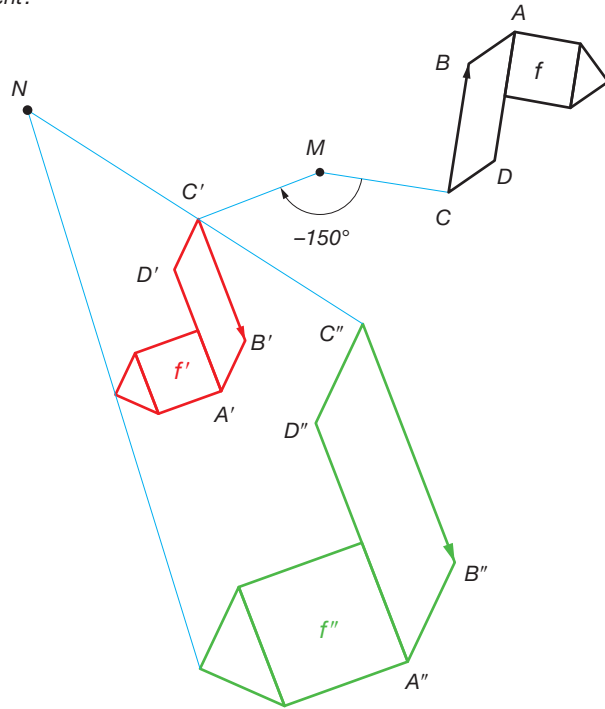
Définition

Une similitude est la composition d'isométries et d'homothéties. Elle consiste à appliquer successivement une isométrie, puis une homothétie ou inversement.

Exemple

La figure f'' est l'image de f par une similitude.
On effectue en effet successivement :

- Pour passer de f à f' :
la rotation : $\mathcal{R}(M ; -150^\circ)$
- Pour passer de f' à f'' :
l'homothétie : $\mathcal{H}(N ; 2)$



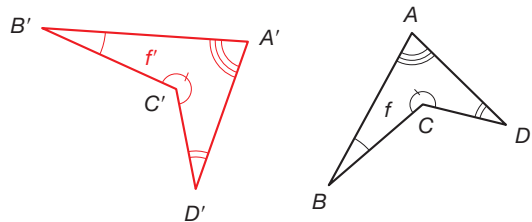
Propriété

Une similitude (qui n'est pas une isométrie) est une transformation qui agrandit ou réduit une figure. Elle conserve la mesure des angles et le rapport des longueurs.

Exemple

Les figures f et f' sont images l'une de l'autre par une similitude.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$$



ES

Remarque

Par une similitude, une figure et son image ont la même forme, mais pas nécessairement les mêmes dimensions.

ÉTYM Similitude : du latin *similis*, semblable.

→ Isométrie (p. 142), Homothétie (p. 152)

Géométrie dans l'espace

Représentation d'un objet dans l'espace

Il y a plusieurs manières de représenter un polyèdre sur une feuille de papier. En voici quelques-unes.

La perspective cavalière

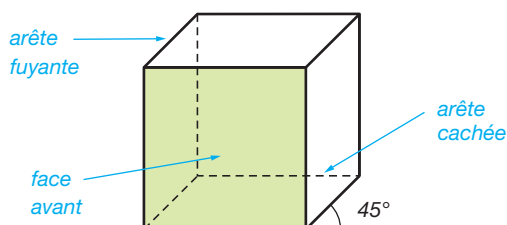
Définition

La perspective cavalière possède les caractéristiques suivantes :

- elle privilégie une face de l'objet, appelée face avant, représentée sans déformation ;
- les arêtes perpendiculaires à la face avant fuient vers la droite ou vers la gauche, généralement avec une inclinaison de 30° ou de 45° ;
- les longueurs des arêtes fuyantes sont généralement réduites de moitié ou d'un tiers.

Exemple

Cube en perspective cavalière.



La perspective artistique

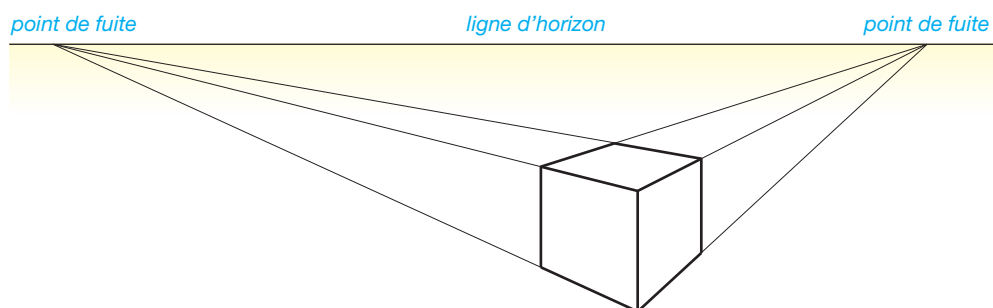
Définition

La perspective artistique possède les caractéristiques suivantes :

- elle est construite à partir de **points de fuite** situés sur une ligne d'horizon ;
- l'objet est représenté tel que l'œil le perçoit.

Exemple

Cube en perspective à deux points de fuite.



La perspective isométrique

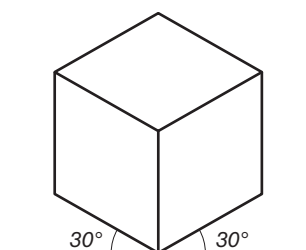
Définition

La perspective isométrique possède les caractéristiques suivantes :

- les arêtes verticales de l'objet restent verticales sur le dessin ;
- les arêtes horizontales fuient à gauche et à droite avec une inclinaison de 30° ;
- l'échelle est la même pour les trois dimensions.

Exemple

Cube en perspective isométrique.



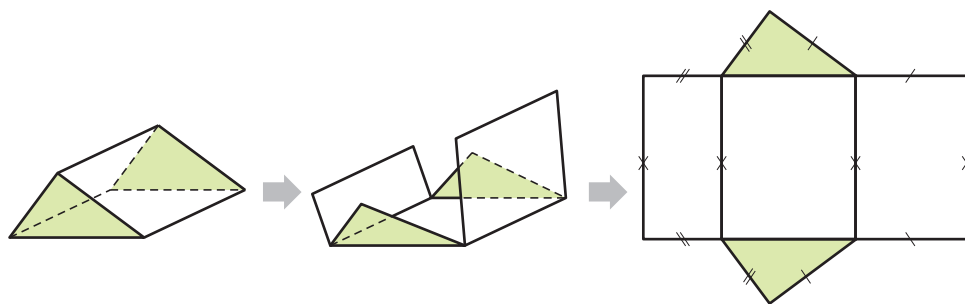
Le développement

Définition

Le **développement d'un solide**, aussi appelé **patron**, est une figure plane qui permet de construire ce solide après découpage et pliage. Le nombre de faces du développement est exactement celui du solide.

Exemple

Développement d'un prisme droit dont la base est un triangle rectangle.



ES

Remarque

Pour reconnaître si le développement d'un solide est correct, on peut le plier mentalement (c'est-à-dire imaginer qu'on le découpe et qu'on reconstitue le solide), puis s'assurer :

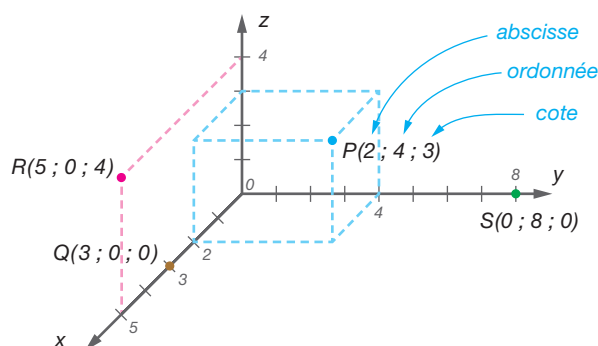
- que le nombre et la forme des faces soient corrects ;
- que les arêtes amenées à se superposer lors du pliage soient de la même longueur ;
- que deux faces ne se superposent pas.

Repérage d'un point dans l'espace

Définitions

- Pour pouvoir repérer un point dans l'espace, on peut utiliser trois axes gradués de même origine. Ces axes sont généralement perpendiculaires les uns aux autres. Ils forment ce que l'on appelle un **repère**.
- Le point d'intersection des axes est appelé **origine** du repère.
- Un point est alors repéré par un triplet $(x ; y ; z)$ de nombres réels, appelé **coordonnées** du point.
- Le 1^{er} nombre x du triplet est appelé **abscisse**. Il situe le point par rapport à l'axe des x .
- Le 2^e nombre y du triplet est appelé **ordonnée**. Il situe le point par rapport à l'axe des y .
- Le 3^e nombre z du triplet est appelé **cote**. Il situe le point par rapport à l'axe des z .

Exemple

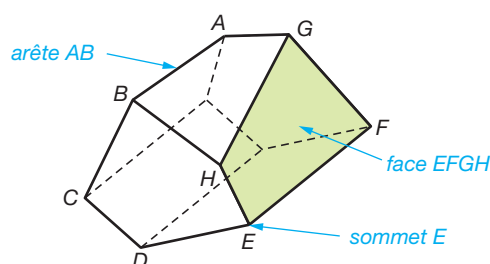


Polyèdre

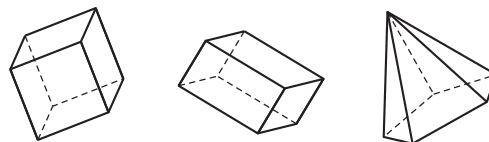
Définition

Un polyèdre est un **solide** dont toutes les faces sont des polygones.

Exemples

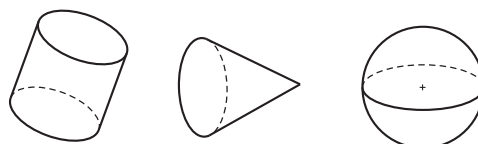


Le cube, le parallélépipède rectangle, la pyramide sont des polyèdres.



Contre-exemples

Le cylindre, le cône, la boule ne sont pas des polyèdres.



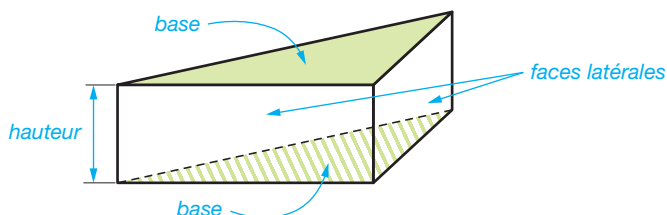
→ Polygone (p. 124)

Prisme droit

Définitions

- Un prisme droit est un polyèdre qui possède :
 - deux faces polygonales, parallèles et superposables, appelées les bases du prisme droit ;
 - des faces latérales rectangulaires.
- La distance entre les deux bases est appelée hauteur du prisme droit.

Exemple



Conséquence Toutes les faces latérales d'un prisme droit sont perpendiculaires aux deux bases.

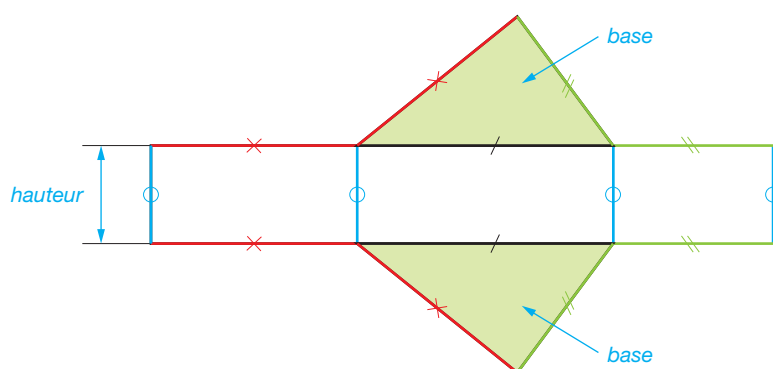
Développement d'un prisme droit

Le développement (ou patron) d'un prisme droit est formé :

- de deux polygones qui sont les bases du prisme droit ;
- de rectangles dont une des dimensions est la hauteur du prisme droit. L'autre dimension est égale au côté correspondant de la base.

Exemple

Développement possible d'un prisme droit à base triangulaire.



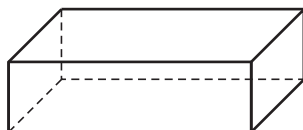
→ Polygone (p. 124), Polyèdre (p. 158)

Parallélépipède rectangle ou pavé droit

Définition

Un parallélépipède rectangle est un polyèdre dont les six faces sont des rectangles. On l'appelle aussi pavé droit. Les faces opposées sont des rectangles superposables.

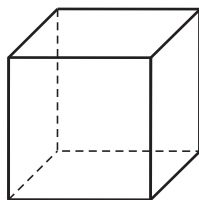
Exemple



Définition

Un **cube** est un polyèdre dont les six faces sont des carrés identiques. C'est un parallélépipède rectangle particulier.

Exemple



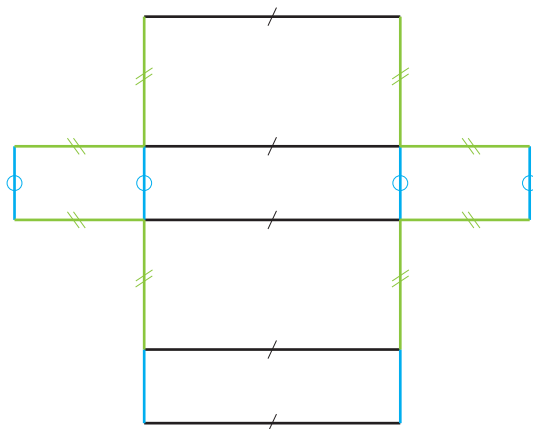
Conséquence Un parallélépipède rectangle est un prisme droit particulier.

Développement d'un parallélépipède rectangle ou pavé droit

Le développement (ou patron) d'un parallélépipède rectangle est formé de six rectangles.

Exemple

Développement possible d'un parallélépipède rectangle.



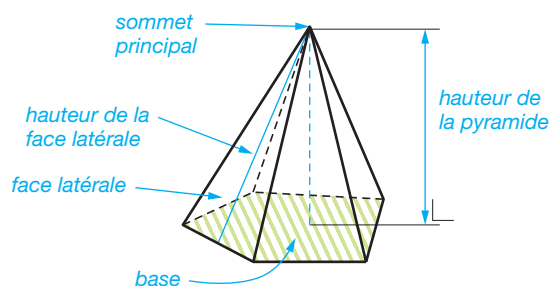
Pyramide

Définitions

- Une pyramide est un polyèdre dont la base est un polygone et dont les faces latérales sont des triangles qui ont un sommet commun appelé sommet principal de la pyramide.
- La distance entre ce sommet et la base est appelée hauteur de la pyramide.

Exemple

Cette pyramide possède six sommets, cinq appartenant à la base et le sommet principal.

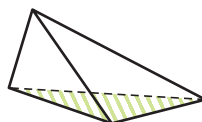


⚠ Ne pas confondre la hauteur de la pyramide avec la hauteur d'une des faces latérales.

Définition

Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

Exemple

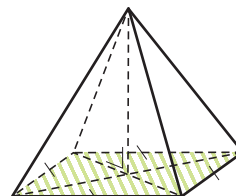


Définitions

Une **pyramide** est **régulière** si sa base est un polygone régulier et si ses faces latérales sont des triangles isocèles. Son sommet principal se projette perpendiculairement au centre de la base.

Exemple

Pyramide régulière à base carrée.

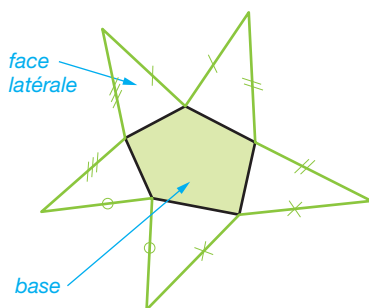


Développement d'une pyramide

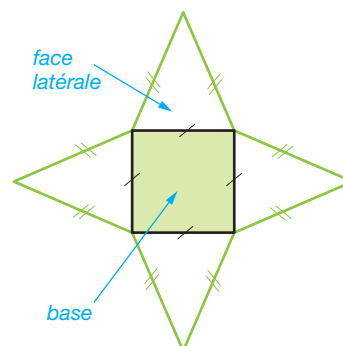
Le développement (ou patron) d'une pyramide est formé d'un polygone qui est la base de la pyramide et de triangles qui constituent les faces latérales.

Exemples

Développement possible d'une pyramide dont la base est un pentagone.



Développement possible d'une pyramide régulière dont la base est un quadrilatère.



→ Polygone (p. 124), Polyèdre (p. 158), Polyèdre régulier (p. 162)

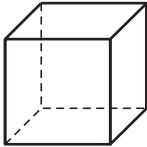
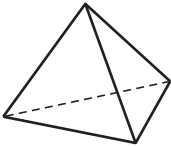
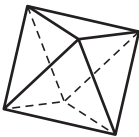
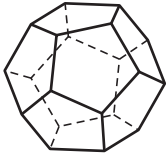
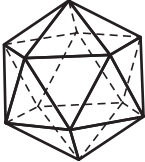
Polyèdre régulier

Définitions

Un polyèdre régulier est un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers isométriques et dont chacun des sommets est l'intersection d'un même nombre d'arêtes.

- Remarques
- Si les faces du polyèdre sont convexes, on parle de polyèdre régulier convexe.
 - Il y a neuf polyèdres réguliers dont cinq sont convexes. Ils sont appelés polyèdres de Platon.

Les cinq polyèdres réguliers convexes

Nom	Figure	Définition
■ Cube		Polyèdre dont les six faces sont des carrés.
■ Tétraèdre régulier		Polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux. C'est une pyramide particulière.
■ Octaèdre régulier		Polyèdre dont les huit faces sont des triangles équilatéraux.
■ Dodécaèdre régulier		Polyèdre dont les douze faces sont des pentagones réguliers.
■ Icosaèdre régulier		Polyèdre dont les vingt faces sont des triangles équilatéraux.

ÉTYM

Polyèdre: du grec *polis*, beaucoup et *hedra*, face: plusieurs faces.

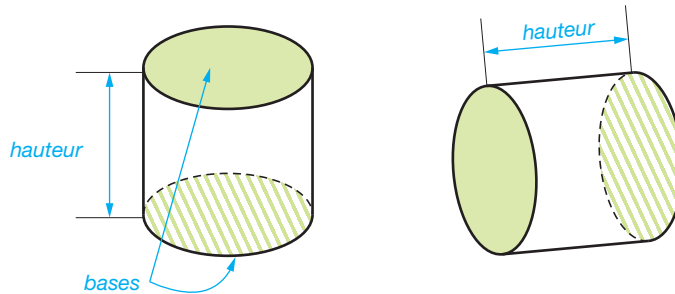
→ Polygone convexe ou non convexe (p. 125), Polygone régulier (p. 126)

Cylindre droit

Définitions

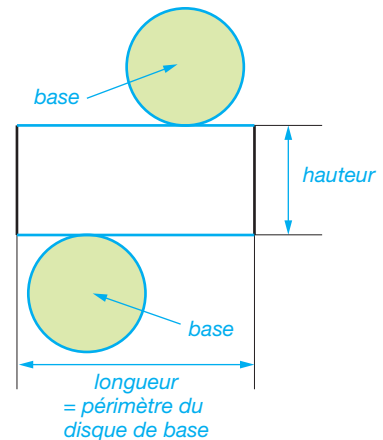
- Un cylindre a deux faces superposables et parallèles qui sont des disques. Ces faces sont appelées bases du cylindre.
- La distance entre ces deux faces est appelée hauteur du cylindre.

Exemples



Développement du cylindre droit

Le développement (ou patron) d'un cylindre droit est formé de deux disques qui sont les bases du cylindre et (généralement) d'un rectangle qui est la surface latérale du cylindre. Une dimension de ce rectangle est la hauteur du cylindre et l'autre dimension est le périmètre d'un des disques de base.



Remarque

Les deux cercles sont tangents aux côtés du rectangle qui ne correspondent pas à la hauteur.

ÉTYM Cylindre : du grec *kulindros*, rouleau.

Cône de révolution

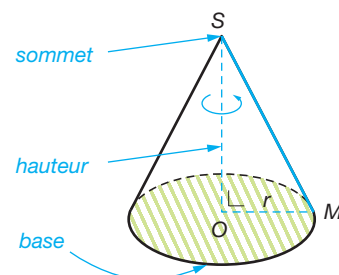
ES

Définitions

- Un cône de révolution est le solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour d'un côté de l'angle droit. Sa base est un disque.
- La distance entre le sommet du cône et le centre du disque de base est la hauteur du cône.

Exemple

En faisant tourner le triangle rectangle SOM autour du côté SO on obtient le cône représenté ci-contre.



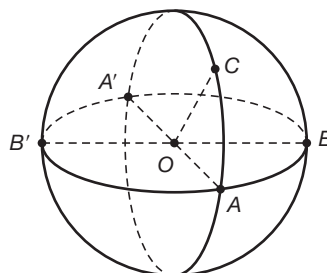
Sphère et boule

Définitions

- Une sphère est l'ensemble des points de l'espace qui sont à égale distance d'un point appelé centre.
- Cette distance est appelée le rayon de la sphère.

Exemple

Les segments OA , OB , OC sont des rayons de la sphère, donc $OA = OB = OC$.
On a représenté ci-contre une sphère de centre O .
Les segments AA' et BB' sont des diamètres de la sphère, donc $AA' = BB'$.



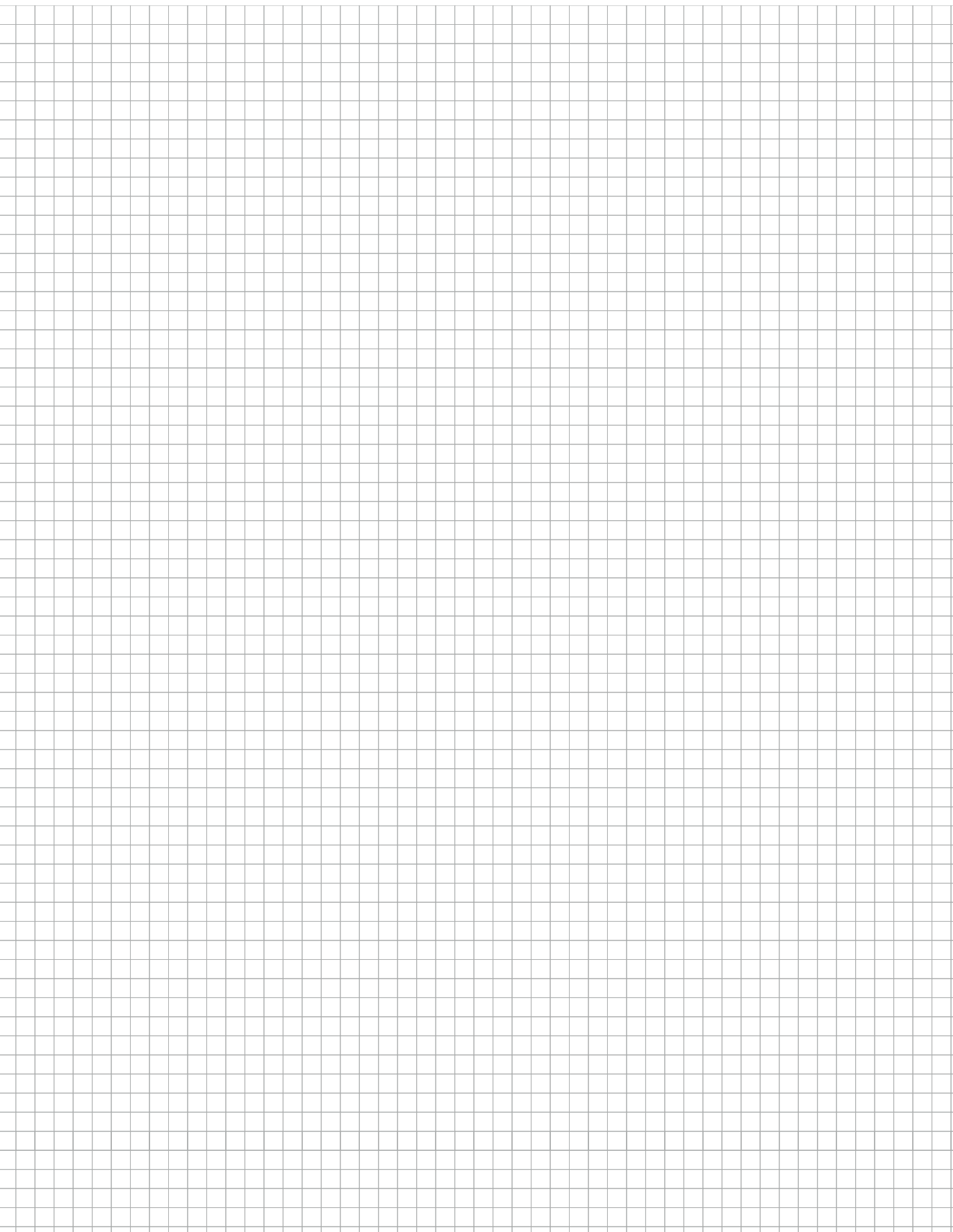
Définitions

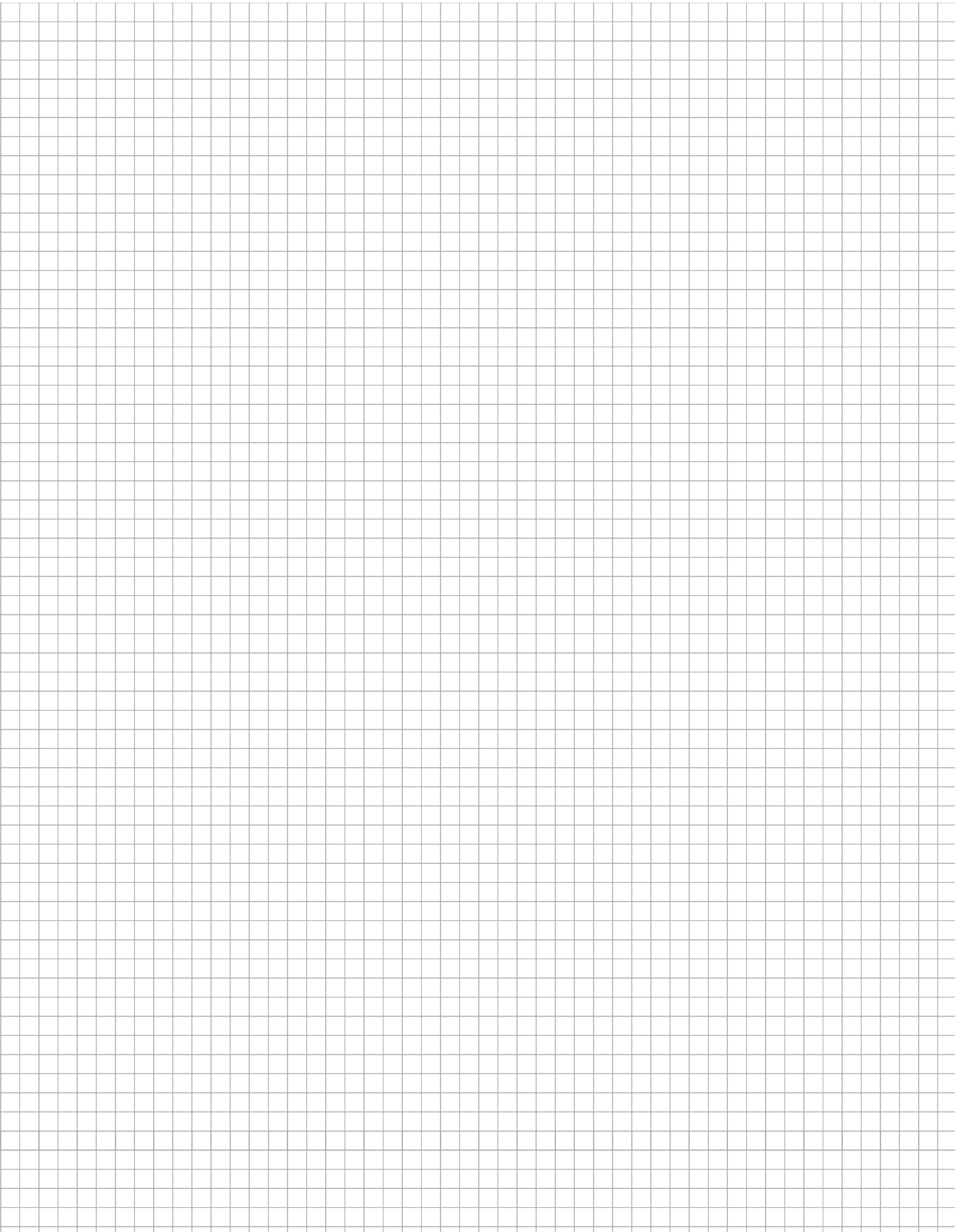
- Une boule est l'ensemble des points de l'espace délimités par une sphère.
- Le **centre de la boule** est le centre de la sphère.
- Le **rayon de la boule** est le rayon de la sphère.

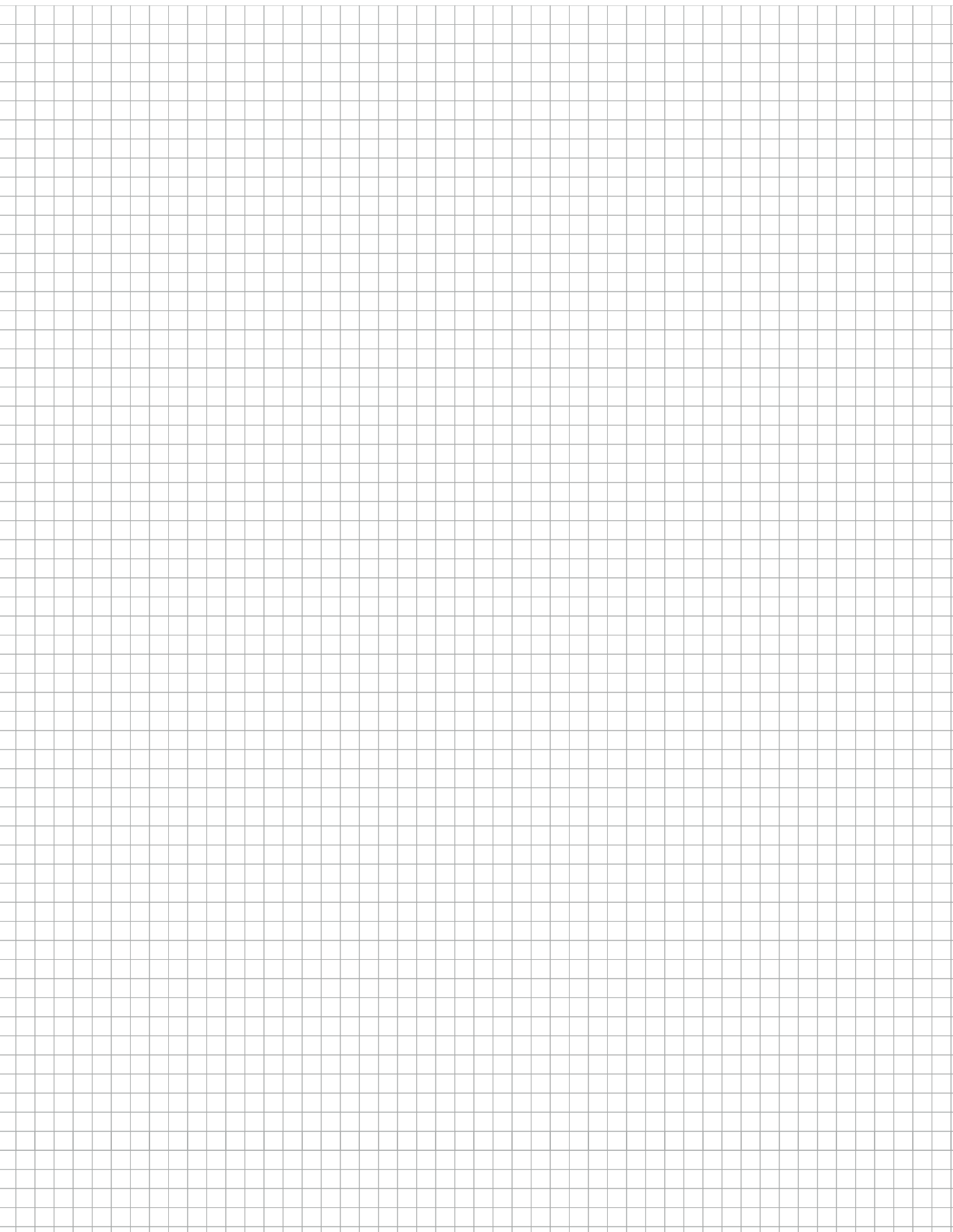
Remarque

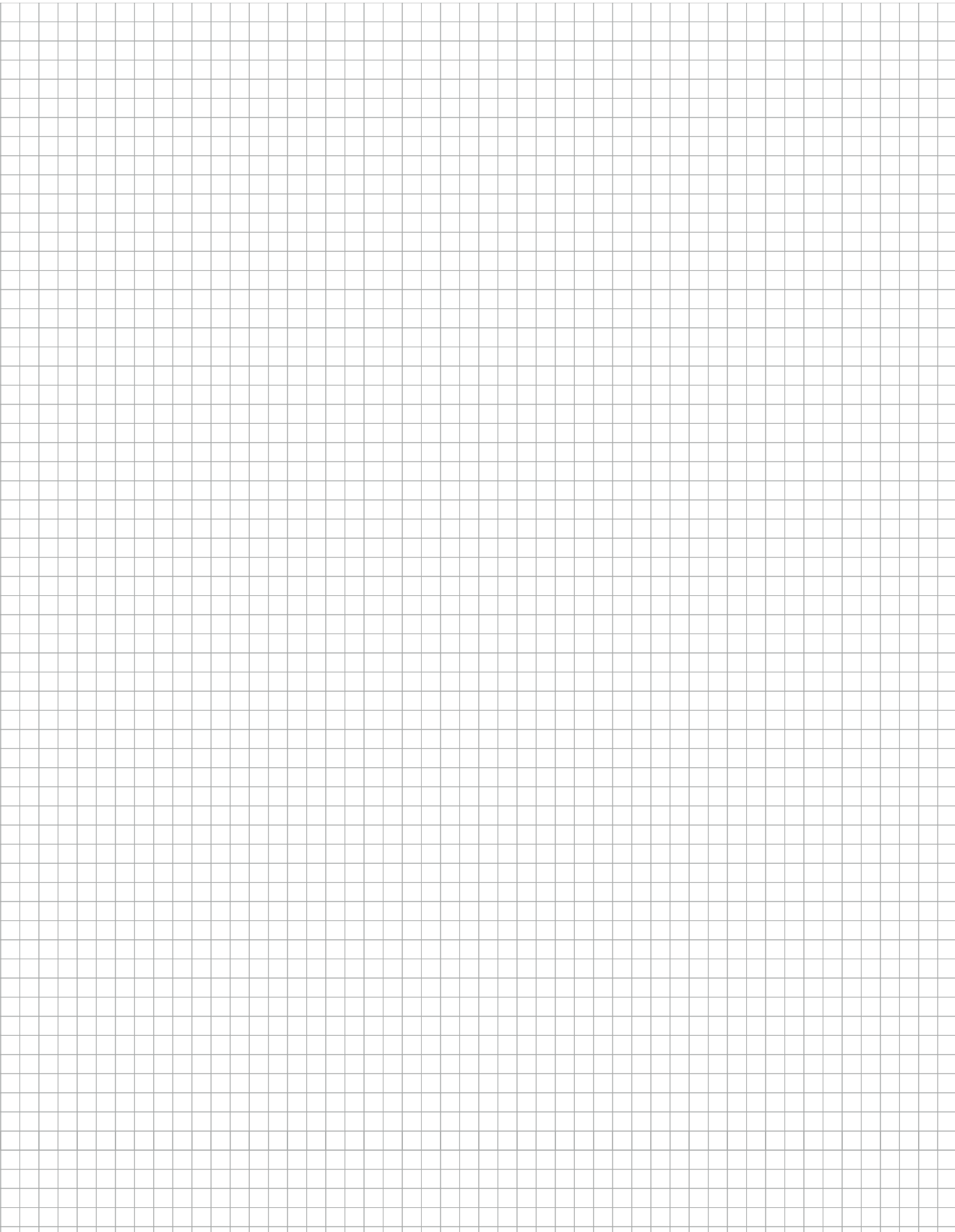
Une **boule** est donc un **solide**. La **sphère** est la **surface** qui délimite une boule.

ÉTYM Sphère : du grec *sphaira*, balle, sphère.



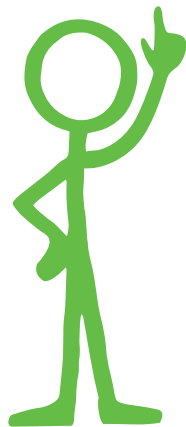






Grandeurs et mesures

- Unités de mesure
- Périmètre d'une surface
- Aire d'une surface
- Volume d'un solide
- Théorèmes

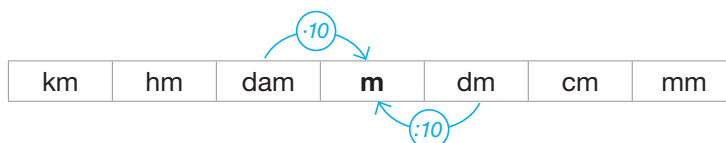


Unités de mesure

Unités de longueur

Définitions

- Dans le système métrique, le **mètre (m)** est l'unité principale de mesure des longueurs.
- On utilise aussi des multiples du mètre : décamètre (dam), hectomètre (hm), kilomètre (km) ainsi que des sous-multiples : décimètre (dm), centimètre (cm), millimètre (mm).



Exemples

- $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$



- $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$; $100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$; $0,1 \text{ m} = 1 \text{ dm}$

Remarque

Il existe d'autres unités de longueur que celles du système métrique.

Exemples

Le pouce : $2,54 \text{ cm}$; le pied : $0,3048 \text{ m}$; le mille marin : 1852 m ; l'année-lumière : $\sim 10^{13} \text{ km}$

→ Puissance de dix (p. 47)

Convertir les unités de longueur

Méthode 1

En utilisant les relations entre les différentes unités.

ÉTAPE

Il y a trois unités pour passer des mètres aux kilomètres (dam, hm, km). On déplace donc la virgule de trois rangs vers la gauche.

Ou

$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$; on divise donc $1528,9$ par 1000 .

Exemple Exprimer $1528,9 \text{ m}$ en km .

$$1,528,9 \text{ m} = 1,5289 \text{ km}$$

Méthode 2

En utilisant un tableau de conversion.

ÉTAPE

Pour écrire le nombre dans le tableau, on repère la case dans laquelle on doit placer son **chiffre des unités**.

On place ensuite la virgule dans la case correspondant à l'unité demandée et on complète éventuellement les cases vides par des **0**.

Exemples Exprimer $1528,9 \text{ m}$ en km , 12 mm en m et $2,5 \text{ hm}$ en m .

$1528,9 \text{ m}$ en km :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1,	5	2	8	9		

$$1528,9 \text{ m} = 1,5289 \text{ km}$$

12 mm en m :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
			0,	0	1	2

$$12 \text{ mm} = 0,012 \text{ m}$$

$2,5 \text{ hm}$ en m :

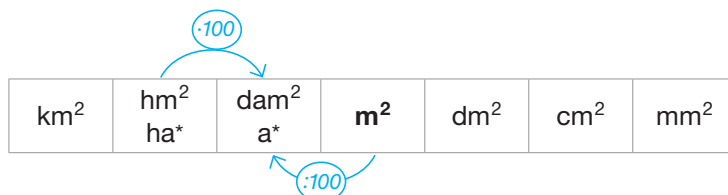
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	2	5	0			

$$2,5 \text{ hm} = 250 \text{ m}$$

Unités d'aire

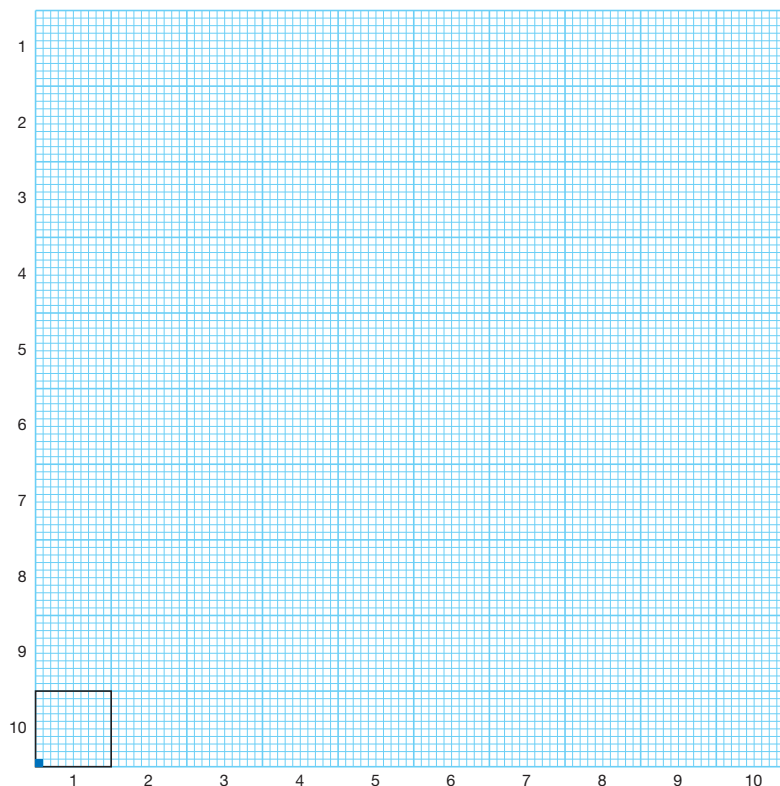
Définitions

- Dans le système métrique, le **mètre carré (m^2)** est l'unité principale de mesure des aires. C'est l'aire d'un carré dont le côté mesure 1 m.
- On utilise aussi des multiples du mètre carré : décamètre carré (dam^2), hectomètre carré (hm^2), kilomètre carré (km^2) ainsi que des sous-multiples : décimètre carré (dm^2), centimètre carré (cm^2), millimètre carré (mm^2).



Exemples

- Cette feuille de papier millimétré représente $1 dm^2$.
 On remarque que : $1 dm^2 = 100 cm^2 = 10\,000 mm^2$.



- $1 hm^2 = 1 ha = 10\,000 m^2$; $1 cm^2 = 100 mm^2$; $0,01 m^2 = 1 dm^2$

* Les **ares (a)** et les **hectares (ha)** sont utilisés pour mesurer, par exemple, l'aire d'un terrain, d'une forêt, d'un champ, d'un vignoble, etc.

Convertir les unités d'aire

Méthode 1

En utilisant les relations entre les différentes unités.

Exemple Exprimer 457 cm^2 en m^2 .

ÉTAPE

Il y a deux unités pour passer des centimètres carrés aux mètres carrés (dm^2 , m^2) et deux rangs par unité. On déplace donc la virgule de quatre rangs vers la gauche.

Ou

$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$; on divise donc 457 par 10000.

$$457 \text{ cm}^2 = 0,0457,0 \text{ cm}^2 = 0,0457 \text{ m}^2$$

Méthode 2

En utilisant un tableau de conversion.

Exemples Exprimer $5,28 \text{ hm}^2$ et 457 cm^2 en m^2 .

ÉTAPE

Pour écrire le nombre dans le tableau, on repère la case dans laquelle on doit placer son **chiffre des unités** (colonne de droite).

On place ensuite la virgule dans la case correspondant à l'unité (colonne de droite) demandée et on complète éventuellement les cases vides par des 0.

$5,28 \text{ hm}^2$ en m^2 :

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
		5	2	8	0	0

$$5,28 \text{ hm}^2 = 52\,800 \text{ m}^2$$

457 cm^2 en m^2 :

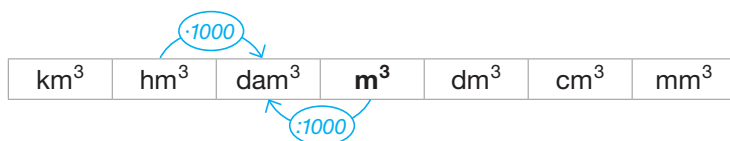
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
			0	0	4	5

$$457 \text{ cm}^2 = 0,0457 \text{ m}^2$$

Unités de volume et de capacité

Définitions

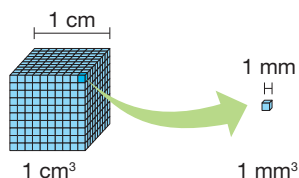
- Dans le système métrique, le **mètre cube (m^3)** est l'unité principale de mesure des volumes. C'est le volume d'un cube dont l'arête mesure 1 m.
- On utilise aussi des multiples du mètre cube : décamètre cube (dam^3), hectomètre cube (hm^3), kilomètre cube (km^3) ainsi que des sous-multiples : décimètre cube (dm^3), centimètre cube (cm^3), millimètre cube (mm^3).



Exemple

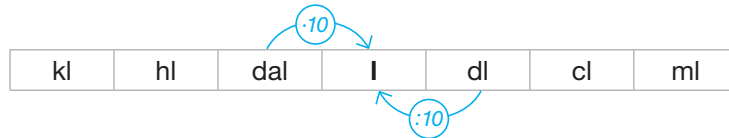
Ce cube représente 1 cm^3 .

On remarque que $1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$.



Définitions

- Le **litre (l)** est l'unité principale de mesure des capacités. Un litre remplit exactement un cube de 1 dm d'arête soit 1 dm^3 donc $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$.
- On utilise aussi des multiples du litre : décalitre (dal), hectolitre (hl), kilolitre (kl) ainsi que des sous-multiples : décilitre (dl), centilitre (cl), millilitre (ml).



Exemples

$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$; $100 \text{ cl} = 1 \text{ l}$; $0,1 \text{ l} = 1 \text{ dl}$

Remarque

On mesure aussi le volume d'un liquide, d'un gaz, de la cylindrée d'un moteur, etc. à l'aide des unités de capacité.

Pour passer des unités de capacité aux unités de volume et vice-versa, on utilise l'égalité $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$.

Exemples

$3 \text{ m}^3 = 3000 \text{ dm}^3 = 3000 \text{ l}$; $1876,5 \text{ cl} = 18,765 \text{ l} = 18,765 \text{ dm}^3$

ÉTYM **Capacité** : du latin *capax*, qui peut contenir, avoir une contenance.

→ Puissance de dix (p. 47)

Convertir les unités de volume

Méthode 1

En utilisant les relations entre les différentes unités.

Exemple Exprimer $0,1234 \text{ m}^3$ en dm^3 .

ÉTAPE

Il y a une unité pour passer du mètre cube aux décimètres cubes et trois rangs par unité. On déplace donc la virgule de trois rangs vers la droite.

Ou

$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$; on multiplie donc $0,1234$ par 1000 .

$$0,1234 \text{ m}^3 = 123,4 \text{ dm}^3$$

Méthode 2

En utilisant un tableau de conversion.

Exemples Exprimer $0,1234 \text{ m}^3$ en dm^3 et 76 mm^3 en cm^3 .

ÉTAPE

Pour écrire le nombre dans le tableau, on repère la case dans laquelle on doit placer son **chiffre des unités** (colonne de droite).

On place ensuite la virgule dans la case correspondant à l'unité (colonne de droite) demandée et on complète éventuellement les cases vides par des **0**.

$0,1234 \text{ m}^3$ en dm^3 :

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
			0	1	2	3, 4

$$0,1234 \text{ m}^3 = 123,4 \text{ dm}^3$$

76 mm^3 en cm^3 :

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
					0, 7	6

$$76 \text{ mm}^3 = 0,076 \text{ cm}^3$$

Convertir les unités de volume en unités de capacité et inversement

Méthode

Exemple 1 Exprimer 98 cm^3 en cl.

ÉTAPE 1	Exprimer le volume en décimètres cubes.	$98 \text{ cm}^3 = 0,098 \text{ dm}^3$
ÉTAPE 2	Appliquer l'égalité: $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$.	$0,098 \text{ dm}^3 = 0,098 \text{ l}$
ÉTAPE 3	Exprimer la capacité à l'aide de l'unité demandée.	$0,098 \text{ l} = 9,8 \text{ cl}$ $98 \text{ cm}^3 = 9,8 \text{ cl}$

Méthode

Exemple 2 Exprimer $1876,5 \text{ hl}$ en m^3 .

ÉTAPE 1	Exprimer la capacité en litres.	$1876,5 \text{ hl} = 187650 \text{ l}$
ÉTAPE 2	Appliquer l'égalité: $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$.	$187650 \text{ l} = 187650 \text{ dm}^3$
ÉTAPE 3	Exprimer le volume à l'aide de l'unité demandée.	$187650 \text{ dm}^3 = 187,65 \text{ m}^3$ $1876,5 \text{ hl} = 187,65 \text{ m}^3$

Unités de masse

Définitions

- Le **gramme (g)** est l'unité principale de mesure des masses.
- On utilise aussi des multiples du gramme: décagramme (dag), hectogramme (hg), kilogramme (kg) ainsi que des sous-multiples: décigramme (dg), centigramme (cg), milligramme (mg).
- On utilise aussi le quintal (q) et la tonne (t).
 $1 \text{ q} = 100 \text{ kg}$; $1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$



Exemples

$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$; $1000 \text{ mg} = 1 \text{ g}$; $0,01 \text{ g} = 1 \text{ cg}$

Unités de temps

Définitions

- La **seconde (s)** est l'unité principale de la mesure du temps.
- Les principaux sous-multiples sont : le dixième de seconde, le centième de seconde, le millième de seconde.
- On utilise aussi les unités suivantes : la minute (min), l'heure (h), le jour, le mois, l'année, le siècle, le millénaire.

1 minute = 60 secondes ; 1 heure = 60 minutes ; 1 jour = 24 heures ;

1 année = 12 mois = 365 jours ou 366 jours (année bissextile).

Remarques

- Les heures, minutes et secondes sont des unités qui correspondent au système sexagésimal (système de numération en base soixante):
1 heure = 60 minutes = 3600 secondes.
- Les dixièmes de seconde, centièmes de seconde et millièmes de seconde sont des sous-multiples qui correspondent au système décimal (système de numération en base dix):
1 seconde = 10 dixièmes de seconde = 100 centièmes de seconde = 1000 millièmes de seconde.
- Dans les calculs commerciaux, en Suisse : 1 année = 12 mois = 360 jours ;
1 mois = 30 jours.

Convertir les unités de temps

Méthode

Convertir un nombre décimal d'heures en heures, minutes et secondes.

Exemple Convertir 5,84 h en h min s.

ÉTAPE 1 Décomposer le nombre d'heures en la somme de sa partie entière et de sa partie décimale.	$5,84 \text{ h} = 5 \text{ h} + 0,84 \text{ h}$
ÉTAPE 2 Exprimer en minutes la partie décimale en la multipliant par 60.	$0,84 \text{ h} = 0,84 \cdot 60 \text{ min} = 50,4 \text{ min}$
ÉTAPE 3 Décomposer le nombre de minutes en la somme de sa partie entière et de sa partie décimale.	$50,4 \text{ min} = 50 \text{ min} + 0,4 \text{ min}$
ÉTAPE 4 Exprimer en secondes la partie décimale en la multipliant par 60.	$0,4 \text{ min} = 0,4 \cdot 60 \text{ s} = 24 \text{ s}$
ÉTAPE 5 Conclure.	$5,84 \text{ h} = 5 \text{ h } 50 \text{ min } 24 \text{ s}$

Méthode 1

Convertir un nombre en secondes en heures, minutes et secondes.

Exemple Convertir 6023 s en h min s.

ÉTAPE 1	Convertir les secondes en minutes à l'aide d'une division euclidienne par 60.	$6023 : 60$ quotient 100 reste 23 donc $6023\text{ s} = 100\text{ min } 23\text{ s}$
ÉTAPE 2	Convertir 100 minutes en heures à l'aide d'une division euclidienne par 60.	$100 : 60$ quotient 1 reste 40 donc $100\text{ min} = 1\text{ h } 40\text{ min}$
ÉTAPE 3	Compléter l'égalité à l'aide des résultats trouvés.	$6023\text{ s} = 1\text{ h } 40\text{ min } 23\text{ s}$

Méthode 2

Convertir un nombre en secondes en heures, minutes et secondes.

Exemple Convertir 24327 s en h min s.

ÉTAPE 1	Exprimer la durée en heures en le divisant par 3600.	$24327 : 3600 = 6,7575$ donc $24327\text{ s} = 6,7575\text{ h}$
ÉTAPE 2	Exprimer 0,7575 h en minutes et secondes selon l'exemple précédent.	$0,7575\text{ h} = 45\text{ min } 27\text{ s}$
ÉTAPE 3	Noter l'égalité obtenue.	$24327\text{ s} = 6\text{ h } 45\text{ min } 27\text{ s}$

Méthode 1

Convertir des heures, minutes et secondes en heures décimales en utilisant des fractions.

Exemple Exprimer 4 h 12 min en heure décimale.

ÉTAPE 1	Exprimer les minutes en fraction d'heure.	$12\text{ min} = \frac{12}{60}\text{ h}$
ÉTAPE 2	Passer de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale.	$\frac{12}{60}\text{ h} = 0,2\text{ h}$
ÉTAPE 3	Additionner les heures.	$4\text{ h} + 0,2\text{ h} = 4,2\text{ h}$
ÉTAPE 4	Noter l'égalité obtenue.	$4\text{ h } 12\text{ min} = 4,2\text{ h}$

Méthode 2

Convertir des heures, minutes et secondes en heures décimales en utilisant un tableau de proportionnalité.

Exemple Exprimer 4 h 12 min en heure décimale.

ÉTAPE 1	Poser un tableau de proportionnalité.	<table><tr><td>Minutes</td><td>60</td><td>12</td></tr><tr><td>Heures</td><td>1</td><td>x</td></tr></table>	Minutes	60	12	Heures	1	x
Minutes	60	12						
Heures	1	x						
ÉTAPE 2	Calculer la valeur manquante.	$x = 0,2$						
ÉTAPE 3	Additionner les heures.	$4\text{ h} + 0,2\text{ h} = 4,2\text{ h}$						
ÉTAPE 4	Noter l'égalité obtenue.	$4\text{ h } 12\text{ min} = 4,2\text{ h}$						

Périmètre d'une surface

Généralités

Définition

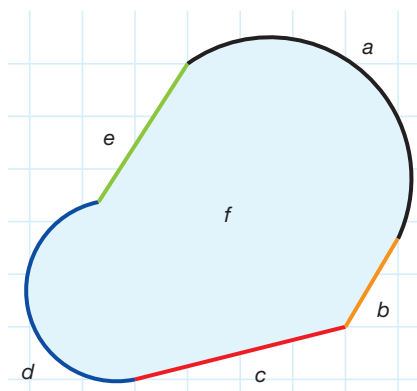
Le périmètre d'une figure géométrique fermée est la longueur de la ligne qui entoure cette figure.

Exemple

Le périmètre p de la figure f est égal à la longueur de la ligne qui entoure la surface bleue.

Il peut s'obtenir en additionnant les longueurs des différentes parties qui le constituent.

$$p = a + b + c + d + e$$



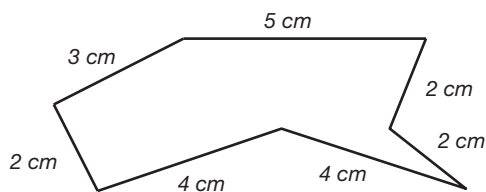
Conséquence Le périmètre d'un polygone est la somme des longueurs des côtés du polygone.

Exemple

Le périmètre du polygone ci-dessous est, en centimètres :

$$5 + 2 + 2 + 4 + 4 + 2 + 3 = 22$$

$$p = 22 \text{ cm}$$



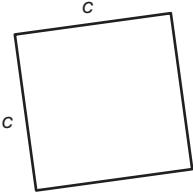
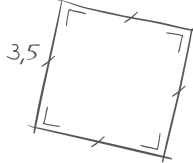
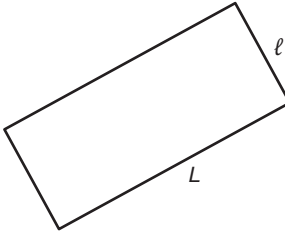
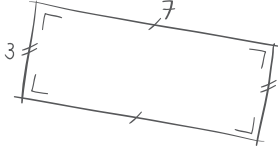
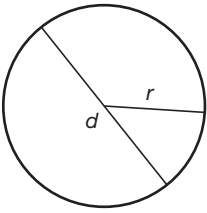
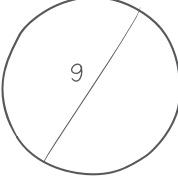
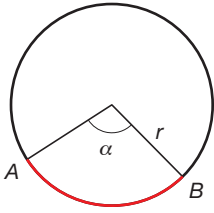
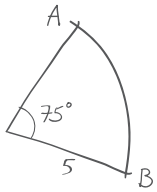
Remarque

Ces longueurs doivent être exprimées dans la même unité.

ETYM **Périmètre** : du grec *perimetros* : *peri*, autour et *metros*, mesure.

→ Polygone (p. 124)

Périmètre des surfaces usuelles

Figure	Formule de périmètre ¹	Exemple
■ Carré  c : mesure du côté	$p = c + c + c + c$ $p = 4c$ Remarque Cette formule est aussi valable pour calculer le périmètre du losange.	 $p = 4 \cdot 3,5 = 14$
■ Rectangle  L : mesure de la longueur l : mesure de la largeur	$p = L + l + L + l$ $p = 2(L + l)$	 $p = 2 \cdot (7 + 3) = 20$
■ Disque  d : diamètre du disque r : rayon du disque	$p = \pi \cdot d$ ou $p = 2 \cdot \pi \cdot r$ $\pi = 3,141592... \approx 3,14$ Remarque On parle aussi de la longueur ou de la circonférence d'un cercle.	 $p = 9 \cdot \pi \approx 28,27$
■ Longueur d'un arc de cercle  $\widehat{AB}$: arc de cercle r : rayon du cercle α : angle au centre mesuré en degrés	$\widehat{AB} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360}$ ⚠ Si l'on doit calculer le périmètre d'un secteur circulaire, il faut ajouter deux fois la mesure du rayon à la longueur de l'arc de cercle.	 $\widehat{AB} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot \frac{75}{360} \approx 6,54$$P = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot \frac{75}{360} + 2 \cdot 5 \approx 6,54 + 10 \approx 16,54$

¹ Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Aire d'une surface

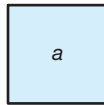
Généralités

Définition

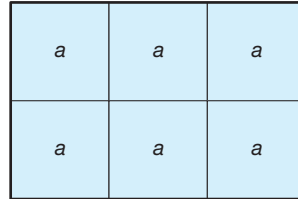
Pour mesurer une aire, on utilise une surface unité. La mesure de l'aire d'une surface est le nombre de surfaces unité nécessaire pour la recouvrir.

Exemple

Si le carré a représente l'unité de mesure, l'aire de la surface rectangulaire vaut $6a$.



unité : a



aire du rectangle : $6a$

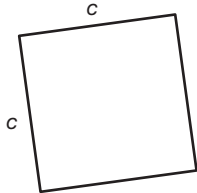
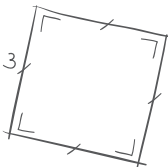
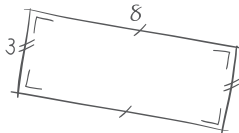
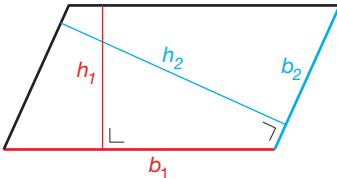
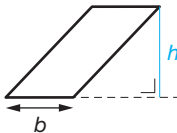
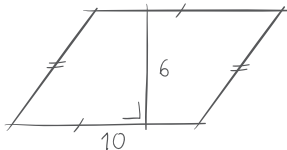
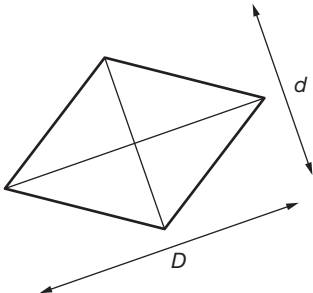
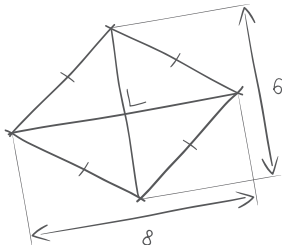
Remarque

L'unité d'aire principale du système métrique est le mètre carré, noté m^2 . C'est l'aire d'un carré d'un mètre de côté.

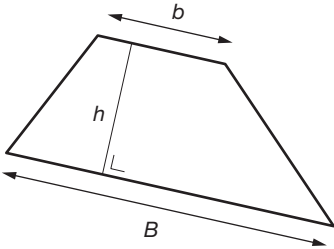
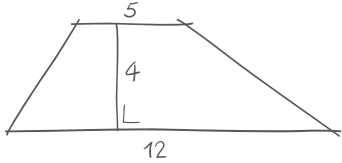
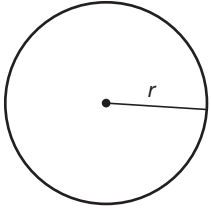
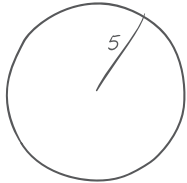
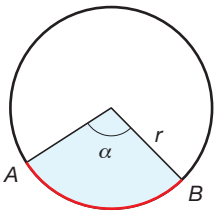
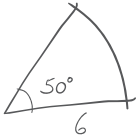
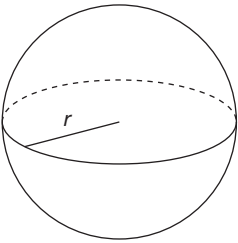
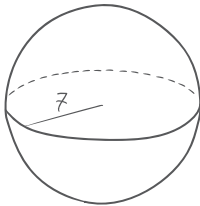
Aire des surfaces usuelles

Surface	Formule d'aire ¹	Exemple
■ Triangle b_1, b_2, b_3: mesure des bases h_1, h_2, h_3: mesure des hauteurs correspondantes	$A = \frac{b \cdot h}{2}$ b: mesure d'un côté h: mesure de la hauteur correspondante Remarques - On peut calculer l'aire d'un triangle de trois manières différentes: $A = \frac{b_1 \cdot h_1}{2} = \frac{b_2 \cdot h_2}{2} = \frac{b_3 \cdot h_3}{2}$ ⚠ La hauteur peut être à l'extérieur du triangle. - Dans un triangle rectangle, deux des bases et des hauteurs sont confondues avec les côtés de l'angle droit.	$A = \frac{12 \cdot 7}{2} = 42$ $A = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7,5$

¹ Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Surface	Formule d'aire ¹	Exemple
■ Carré  c : mesure du côté	$A = c \cdot c$ $A = c^2$ Remarque Comme le carré est un losange, on peut aussi calculer son aire à l'aide de la formule du losange.	 $A = 3^2 = 9$
■ Rectangle  L : mesure de la longueur l : mesure de la largeur	$A = L \cdot l$	 $A = 8 \cdot 3 = 24$
■ Parallélogramme  b_1, b_2 : mesure des bases h_1, h_2 : mesure des hauteurs correspondantes	$A = b \cdot h$ b : mesure d'un côté h : mesure de la hauteur correspondante Remarque On peut calculer l'aire d'un parallélogramme de deux manières : $A = b_1 \cdot h_1 = b_2 \cdot h_2$ ⚠ La hauteur peut être à l'extérieur du parallélogramme. 	 $A = 10 \cdot 6 = 60$
■ Losange  D : mesure de la grande diagonale d : mesure de la petite diagonale	$A = \frac{D \cdot d}{2}$ Remarque Comme le losange est un parallélogramme, on peut aussi calculer son aire à l'aide de la formule du parallélogramme.	 $A = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$

¹ Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Surface	Formule d'aire ¹	Exemple
■ Trapèze  B: mesure de la grande base b: mesure de la petite base h: mesure de la hauteur	$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$	 $A = \frac{12+5}{2} \cdot 4 = 8,5 \cdot 4 = 34$
■ Disque  r: rayon du disque $\pi = 3,14159\dots$	$A = \pi \cdot r^2$	 $A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \approx 78,54$
■ Secteur circulaire  r: rayon du disque α: angle du secteur $\pi = 3,14159\dots$	$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360}$	 $A = \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{50}{360} = 5\pi \approx 15,71$
■ Sphère  r: rayon de la sphère	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	 $A = 4 \cdot \pi \cdot 7^2 = 196\pi \approx 615,75$

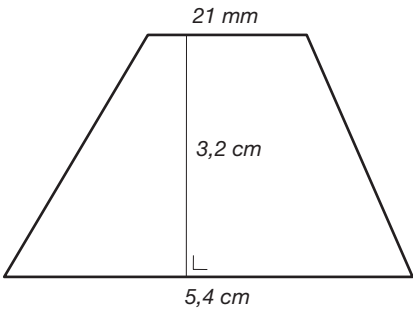
¹ Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Calculer l'aire d'une figure

Méthode 1

À l'aide d'une formule lorsqu'il s'agit d'une figure usuelle.

Exemple Calculer l'aire de ce trapèze.



ÉTAPE

$$A_{\text{trapèze}} = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

$$B = 5,4 \text{ cm}$$

$$b = 21 \text{ mm} = 2,1 \text{ cm}$$

$$h = 3,2 \text{ cm}$$

$$A_{\text{trapèze}} \text{ en cm}^2 = \frac{5,4 + 2,1}{2} \cdot 3,2 = 12$$

Méthode 2

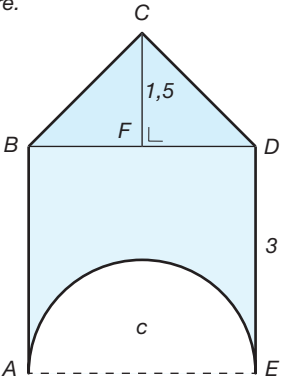
Par décomposition puis addition et/ou soustraction d'aires de figures usuelles.

Exemple Calculer l'aire de la figure bleue ci-dessous.

Unité : mètre

c est un demi-disque.

ABDE est un carré.



ÉTAPE

On décompose la figure bleue en sous-figures dont on peut calculer l'aire, puis on additionne et/ou soustrait l'aire de ces sous-figures.

$$A_{\text{bleue}} = A_{\text{carré}} - A_{\text{demi-disque}} + A_{\text{triangle}}$$

$$\text{Côté du carré : } AB = 3 \text{ m}$$

$$\text{Rayon du demi-disque : } \frac{AE}{2} = 1,5 \text{ m}$$

$$\text{Base du triangle : } BD = 3 \text{ m}$$

$$\text{Hauteur du triangle : } CF = 1,5 \text{ m}$$

$$A_{\text{carré}} \text{ en m}^2 = 3^2$$

$$A_{\text{demi-disque}} \text{ en m}^2 = \frac{\pi \cdot 1,5^2}{2}$$

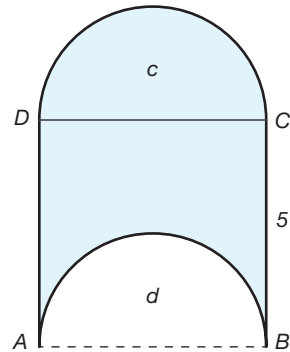
$$A_{\text{triangle}} \text{ en m}^2 = \frac{3 \cdot 1,5}{2}$$

$$A_{\text{bleue}} \text{ en m}^2 = 3^2 - \frac{\pi \cdot 1,5^2}{2} + \frac{3 \cdot 1,5}{2} \approx 7,716 \text{ m}^2$$

Méthode 3

Par décomposition et déplacement.

Exemple Calculer l'aire de la figure bleue ci-dessous.
 $ABCD$ est un carré de 5 dm de côté.
 c et d sont des demi-disques.



ÉTAPE

On déplace une partie de la figure de façon à obtenir une figure dont on peut calculer l'aire.

Les demi-disques c et d ont le même diamètre donc la même aire.
 Je peux déplacer mentalement le demi-disque c pour le mettre dans le « trou » que représente le demi-disque d .
 L'aire de la figure est donc égale à celle du carré $ABCD$.

Côté du carré : $AB = 5$ dm

$$A_{\text{bleue}} \text{ en } \text{dm}^2 = 5^2 = 25$$

Volume d'un solide

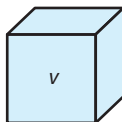
Généralités

Définition

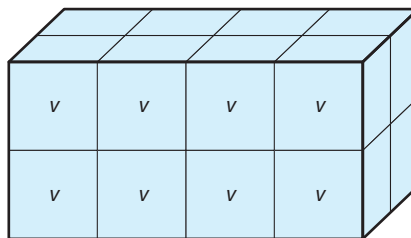
Pour mesurer le volume d'un solide, on utilise un solide unité.
 La mesure du volume de ce solide est le nombre de solides unités nécessaires pour le remplir.

Exemple

Si le cube v représente l'unité de mesure, le volume du parallélépipède rectangle vaut $16v$.



unité : v



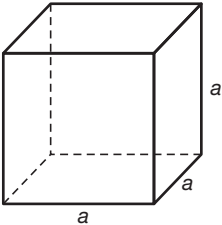
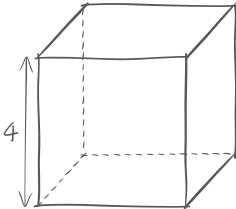
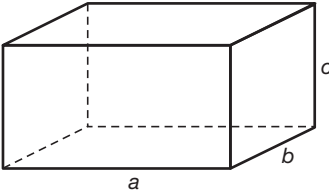
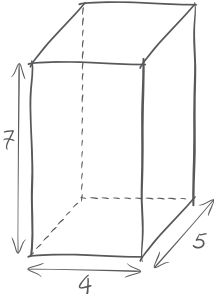
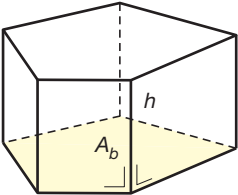
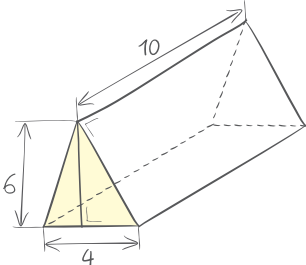
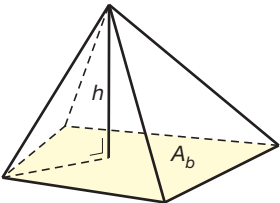
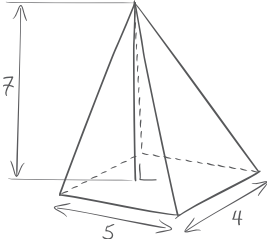
volume du parallélépipède rectangle : $16v$

GM

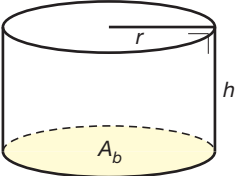
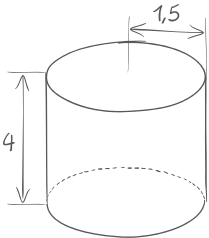
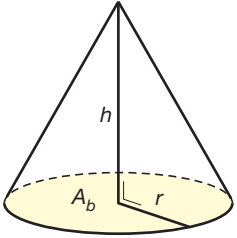
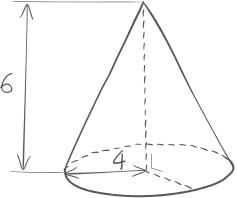
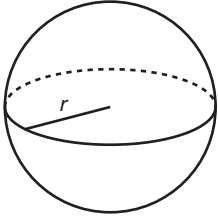
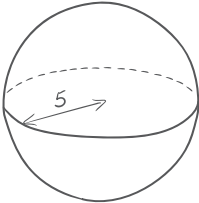
Remarque

L'unité principale de volume du système métrique est le mètre cube, noté m^3 .
 C'est le volume d'un cube de 1 m d'arête.

Volume des solides usuels

Solide	Formule de volume ¹	Exemple
Cube  a : mesure de l'arête	$V = a \cdot a \cdot a$$V = a^3$	 Cube $V = 4^3 = 64$
Parallélépipède rectangle ou pavé droit  a, b et c : mesure des différentes arêtes	$V = a \cdot b \cdot c$	 Pavé droit $V = 4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$
Prisme droit  Ab : aire de la base h : mesure de la hauteur	$V = A_b \cdot h$ Remarque Cette formule est valable pour le cube et le pavé droit qui sont eux aussi des prismes droits.	 Prisme droit $V = \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot 10 = 120$
Pyramide  Ab : aire de la base h : mesure de la hauteur	$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$	 Pyramide à base rectangulaire $V = \frac{(5 \cdot 4) \cdot 7}{3} = 46,\bar{6}$

¹ Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Solide	Formule de volume ¹	Exemple
■ Cylindre  r: rayon de la base A_b: aire de la base h: mesure de la hauteur	$V = A_b \cdot h$ $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$	 Cylindre $V = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 4 \approx 28,27$
■ Cône  r: rayon de la base A_b: aire de la base h: mesure de la hauteur	$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$	 Cône $V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 6}{3} \approx 100,53$
■ Boule  r: rayon de la boule	$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$	 Boule $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 5^3}{3} \approx 523,6$

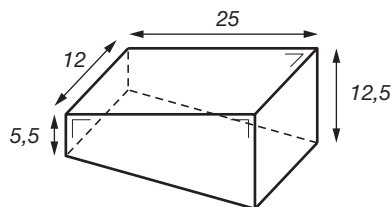
¹ Toutes les longueurs sont exprimées dans la même unité.

Calculer le volume d'un solide

Méthode 1

À l'aide d'une formule lorsqu'il s'agit d'un solide usuel.

Exemple Calculer le volume de ce prisme droit. unité : dm



ÉTAPE

On reconnaît le solide usuel et on applique la formule qui permet de calculer son volume.

Il s'agit d'un prisme droit dont la base est un trapèze rectangle.

$$V = A_b \cdot h$$

h = hauteur du prisme

$$A_b = \frac{B + b}{2} \cdot h_t$$

h_t = hauteur du trapèze

$$B = 12,5 \text{ dm}$$

$$b = 5,5 \text{ dm}$$

$$h_t = 25 \text{ dm}$$

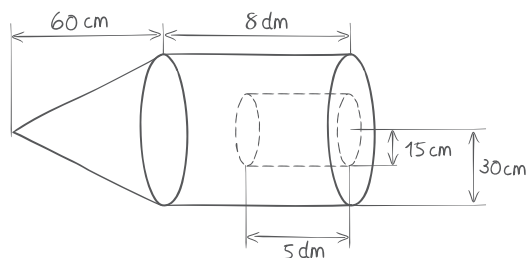
$$h = 12 \text{ dm}$$

$$V_{\text{prisme droit}} \text{ en dm}^3 = \frac{12,5 + 5,5}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 2700$$

Méthode 2

Par décomposition puis addition et/ou soustraction.

Exemple Calculer le volume de ce solide.



ÉTAPE

On décompose le solide en sous-solides dont on peut calculer le volume, puis on additionne et/ou soustrait le volume de ces figures.

$$V_{\text{solide}} = V_{\text{grand cylindre}} - V_{\text{petit cylindre}} + V_{\text{cône}}$$

$$r_{\text{grand cylindre}} = 30 \text{ cm} = 3 \text{ dm}$$

$$r_{\text{petit cylindre}} = 15 \text{ cm} = 1,5 \text{ dm}$$

$$h_{\text{grand cylindre}} = 8 \text{ dm}$$

$$h_{\text{petit cylindre}} = 5 \text{ dm}$$

$$h_{\text{cône}} = 60 \text{ cm} = 6 \text{ dm}$$

$$V_{\text{grand cylindre}} \text{ en dm}^3 = \pi \cdot 3^2 \cdot 8$$

$$V_{\text{petit cylindre}} \text{ en dm}^3 = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 5$$

$$V_{\text{cône}} \text{ en dm}^3 = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 6}{3}$$

$$V_{\text{solide}} \text{ en dm}^3 = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 - \pi \cdot 1,5^2 \cdot 5 + \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 6}{3} \approx 247,4$$

Théorèmes

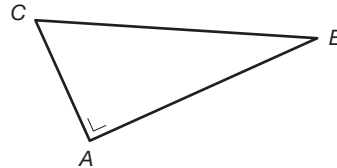
Triangle rectangle et vocabulaire

Définition

On dit qu'un triangle est rectangle en A si l'angle droit de ce triangle se trouve au sommet A .

Exemple

ABC est un triangle rectangle en A .



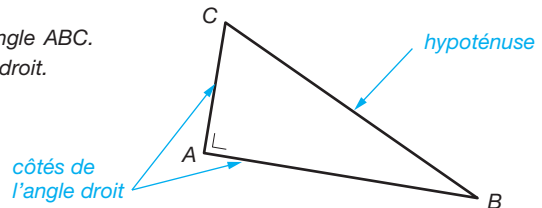
Notation

Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté opposé à l'angle droit. C'est le plus grand côté de ce triangle.

Les deux autres côtés sont appelés les **côtés de l'angle droit** (ou **cathètes**).

Exemple

Le côté BC est l'hypoténuse du triangle rectangle ABC .
Les côtés AC et AB sont les côtés de l'angle droit.



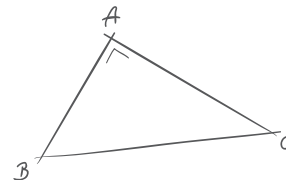
Théorème de Pythagore

Théorème

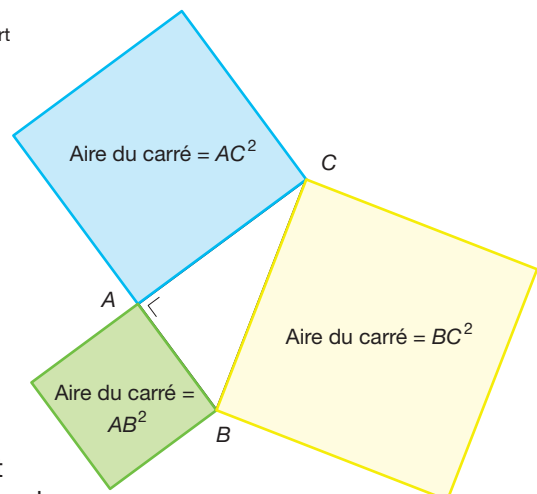
Si un triangle est rectangle, alors la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

Exemple

Le triangle ABC est rectangle en A , donc :
 $AB^2 + AC^2 = BC^2$.



Conséquence Aire_{carré jaune} = Aire_{carré bleu} + Aire_{carré vert}



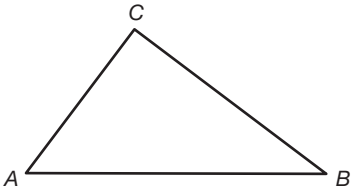
GM

⚠ Le théorème de Pythagore ne peut s'utiliser que dans un triangle rectangle.

La réciproque du théorème de Pythagore

Théorème Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

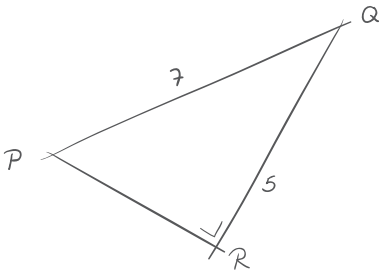
Exemple
Si $AC^2 + BC^2 = AB^2$, alors le triangle ABC est rectangle en C.



Calculer la longueur d'un segment en utilisant le théorème de Pythagore

Méthode

Exemple Calculer la longueur exacte de PR.
Les mesures sont exprimées dans la même unité.



ÉTAPE 1 S'assurer que l'on a bien les conditions d'utilisation du théorème de Pythagore : - Le triangle est rectangle. - On connaît les longueurs de deux côtés de ce triangle.	Le triangle PQR est rectangle en R. On connaît la longueur des côtés PQ et QR.
ÉTAPE 2 Écrire la relation de Pythagore.	D'après le théorème de Pythagore, on a : $PR^2 + QR^2 = PQ^2$
ÉTAPE 3 Remplacer les longueurs connues par leurs valeurs et calculer la longueur cherchée.	$\begin{aligned} PR^2 + 5^2 &= 7^2 \\ PR^2 + 25 &= 49 \\ PR^2 &= 49 - 25 \\ PR^2 &= 24, \text{ donc } PR &= \sqrt{24} \approx 4,9 \end{aligned}$

Remarque
On peut vérifier le résultat en s'assurant que l'hypoténuse est bien le plus grand côté du triangle rectangle. Dans le cas ci-dessus, 7 est effectivement plus grand que 5 et 4,9.

Prouver qu'un triangle est rectangle en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore

Méthode

Exemple Soit EFG un triangle tel que $EF = 12$ cm, $EG = 13$ cm et $FG = 5$ cm. Ce triangle est-il rectangle ?

ÉTAPE 1	
Identifier le plus grand côté.	EG est le plus grand côté.
ÉTAPE 2	
Calculer le carré du plus grand côté. Calculer la somme des carrés des deux autres côtés.	$EG^2 = 13^2 = 169$ $EF^2 + FG^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$
ÉTAPE 3	
Regarder si l'égalité est vérifiée. Si c'est le cas, le triangle est rectangle ; sinon, il ne l'est pas.	$EG^2 = EF^2 + FG^2$ Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en F .

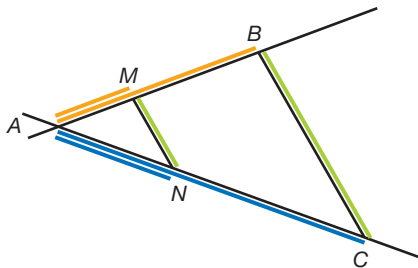
Théorème de Thalès

Théorème

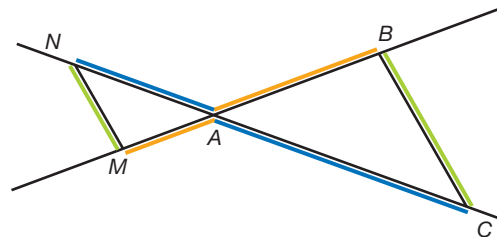
Soit deux droites AB et AC sécantes et deux points M et N qui appartiennent respectivement à la droite AB et à la droite AC .

Si les droites MN et BC sont parallèles, alors les triangles ABC et AMN ont des côtés respectivement proportionnels. Ils sont semblables.

Il y a deux configurations correspondant à ce théorème.



$MN \parallel BC$



$MN \parallel BC$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{donc les triangles } ABC \text{ et } AMN \text{ sont semblables.}$$

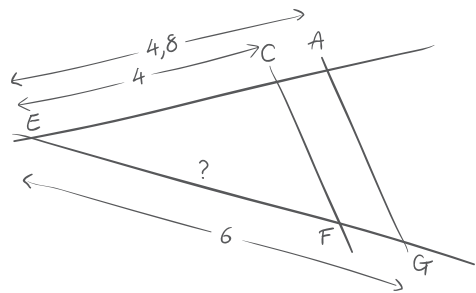
Remarque

Les triangles ABC et AMN sont images l'un de l'autre par une homothétie de centre A et de rapport $\frac{AM}{AB}$ ou $\frac{AN}{AC}$.

→ Homothétie (p. 152)

Calculer la longueur d'un segment en utilisant le théorème de Thalès

Méthode

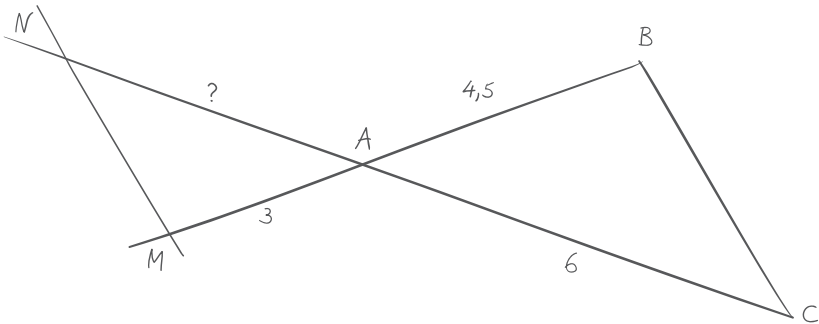


Exemple 1 Calculer la longueur EF sachant que CF est parallèle à AG.
Les longueurs sont exprimées dans la même unité.

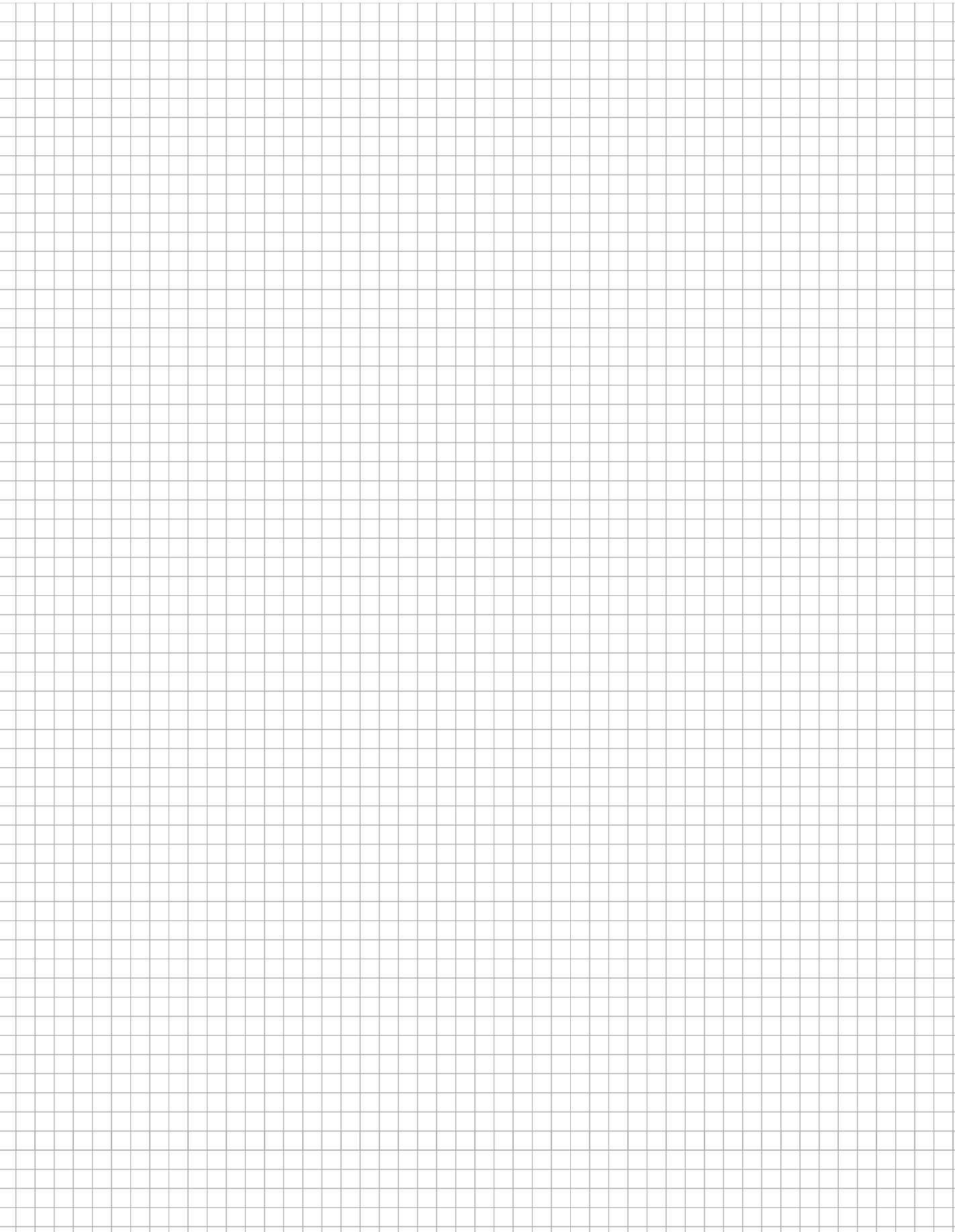
ÉTAPE 1 S'assurer que l'on a bien les conditions d'utilisation du théorème de Thalès.	Les droites CF et AG sont parallèles et elles coupent les sécantes EA et EG.
ÉTAPE 2 Écrire les rapports égaux en utilisant le théorème de Thalès.	$\frac{EC}{EA} = \frac{EF}{EG}$
ÉTAPE 3 Remplacer les longueurs connues par leurs valeurs et calculer la longueur cherchée.	$\frac{4}{4,8} = \frac{EF}{6}$ $4,8 \cdot EF = 4 \cdot 6$ $4,8 \cdot EF = 24$ $\text{Donc } EF = \frac{24}{4,8} = 5$

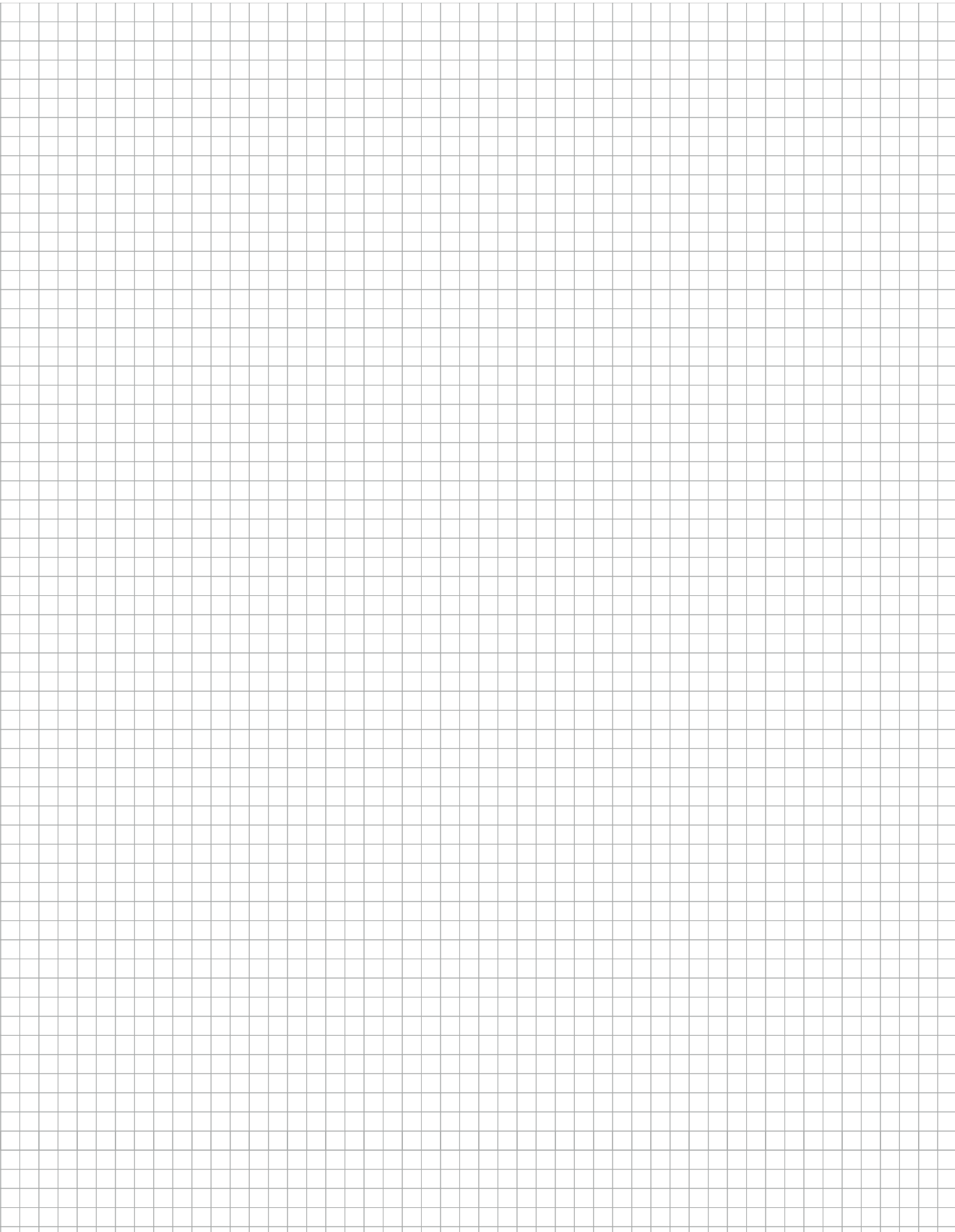
Méthode

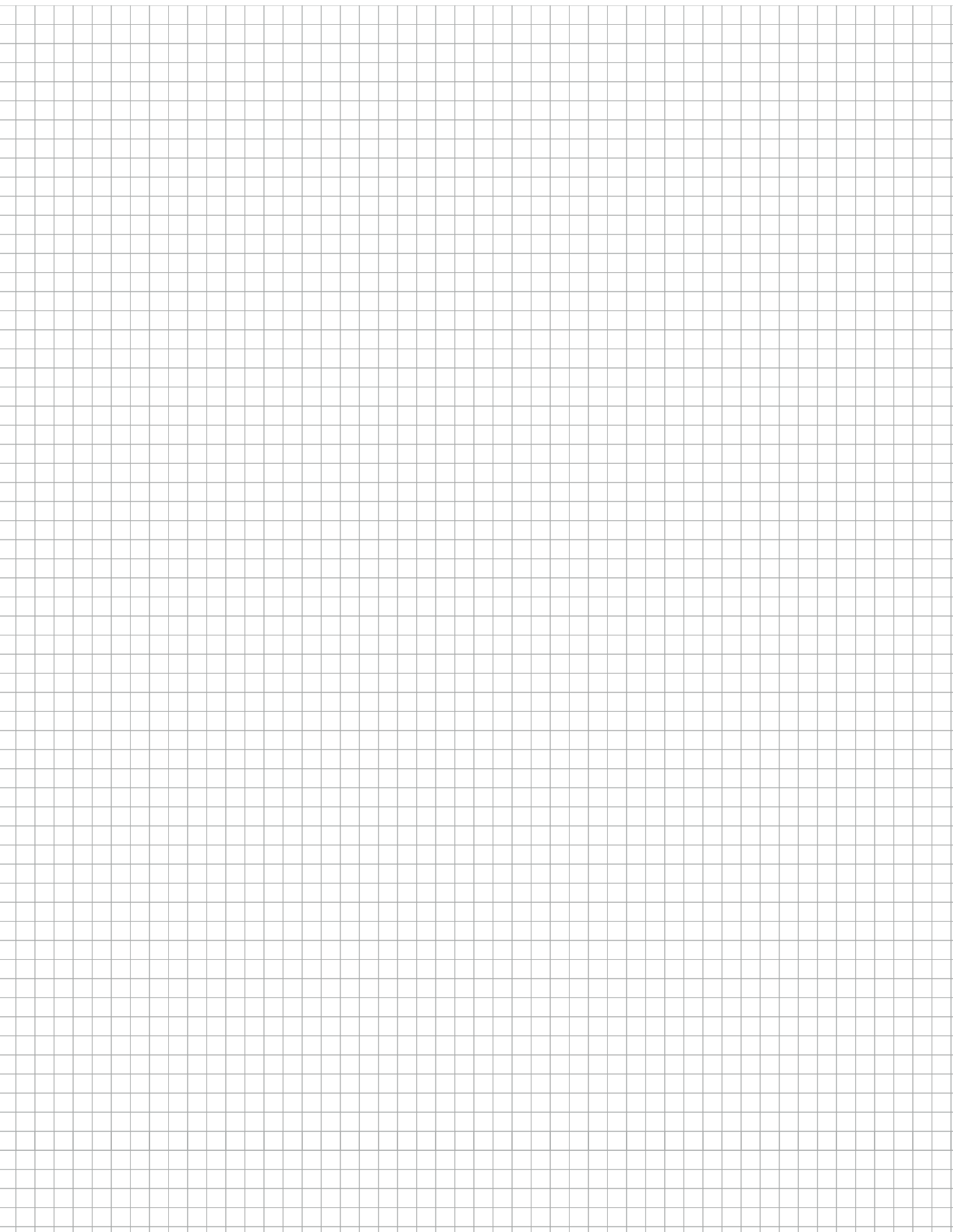
Exemple 2 Calculer la longueur AN.
BC // MN
Les longueurs sont exprimées dans la même unité.

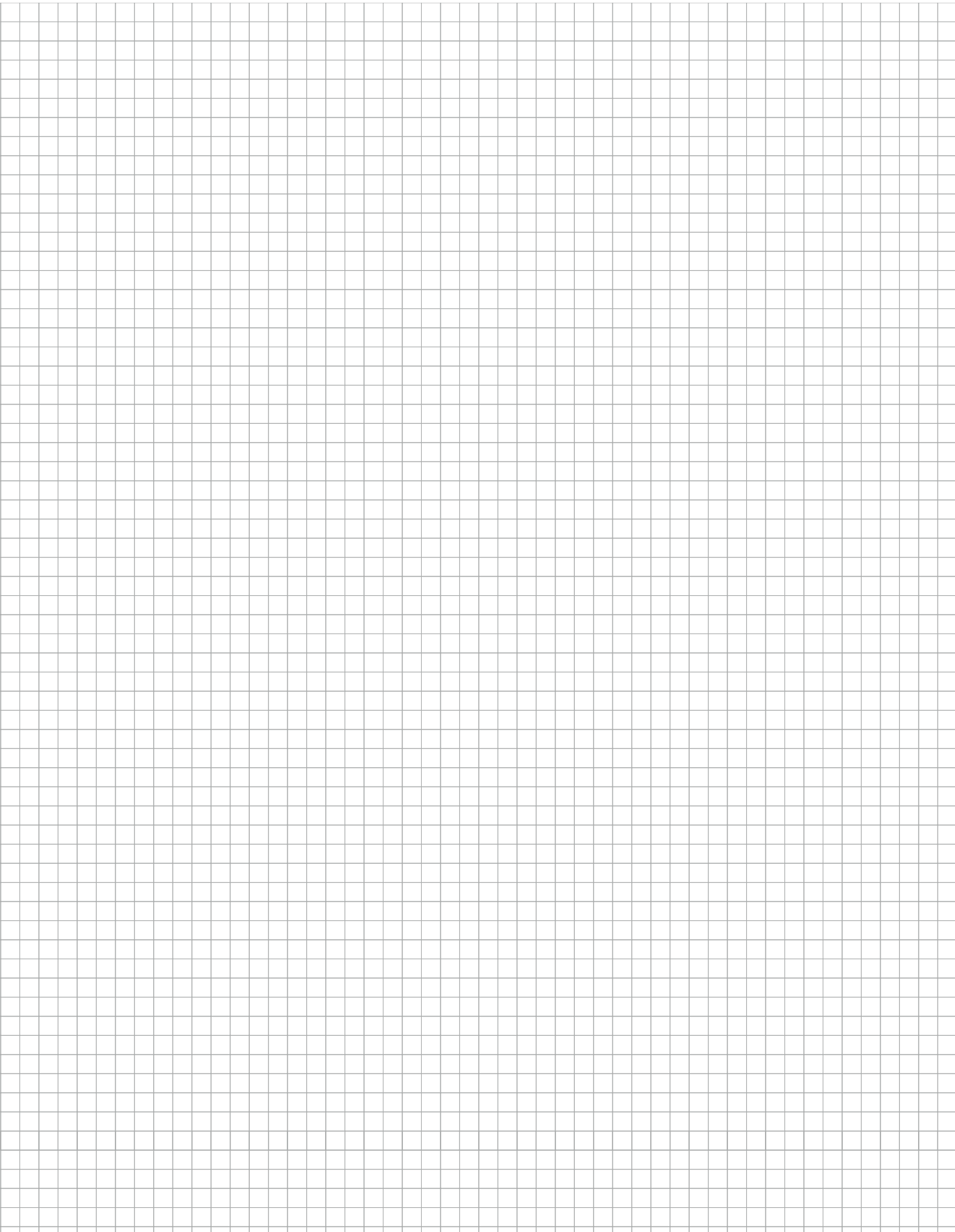


ÉTAPE 1 S'assurer que l'on a bien les conditions d'utilisation du théorème de Thalès.	Les droites BC et MN sont parallèles et elles coupent les sécantes AB et AC.
ÉTAPE 2 Écrire les rapports égaux en utilisant le théorème de Thalès.	$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$
ÉTAPE 3 Remplacer les longueurs connues par leurs valeurs et calculer la longueur cherchée.	$\frac{4,5}{3} = \frac{6}{AN}$ $4,5 \cdot AN = 3 \cdot 6$ $4,5 \cdot AN = 18$ $\text{Donc } AN = \frac{18}{4,5} = 4$



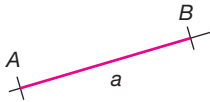
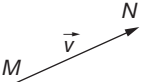
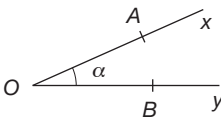
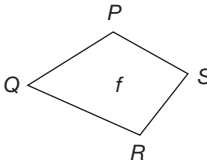
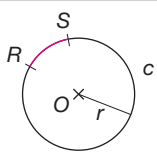
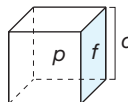
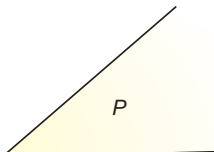
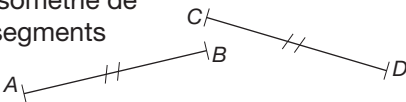


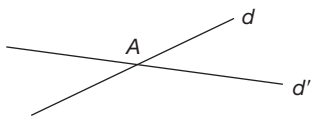
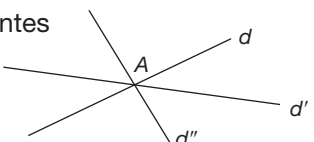
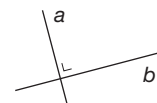




Conventions et notations

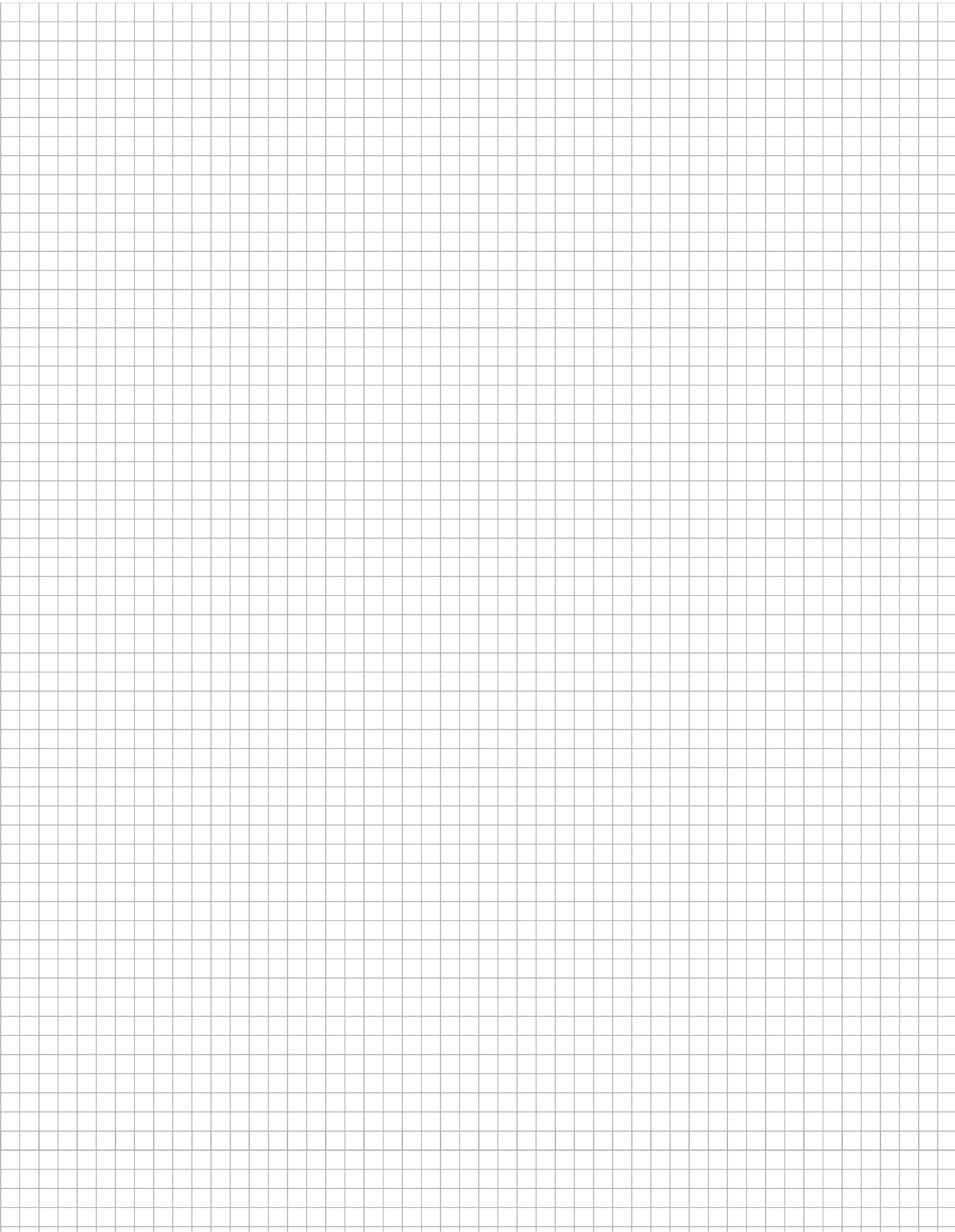
Objet, notion, propriété	Notations, conventions et commentaires
Qui est proche de...	$\cong$
Inférieur à... (plus petit que...) Supérieur à... (plus grand que...)	$<$ $>$
Inférieur ou égal à... Supérieur ou égal à...	$\leq$ $\geq$
Couple de nombres	$(a ; b)$
Ensemble Ensemble vide Ensemble de solution	$\{a ; b ; \dots\}$ $\emptyset = \{\}$ $S = \{x_1 ; x_2 ; \dots\}$
Est élément de..., n'est pas élément de... ou Appartient à..., n'appartient pas à...	$\in, \notin$
Ensembles de nombres	$\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels
Symboles représentant, numériquement parlant, «ce qu'il y a de plus grand» «ce qu'il y a de plus petit»	$+\infty$ $-\infty$
Opposé d'un nombre x	$-x$
Inverse d'un nombre x ($x \neq 0$)	x^{-1} ou $\frac{1}{x}$
Pour-cent	%
Pour-mille	‰
Fonction On trouve aussi les notations :	$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto y = \dots$ $x \longmapsto f(x) = \dots$

Objet, notion, propriété		Notations, conventions et commentaires	
Point	$+_A$ $\times_P$	le point P	le point A
Segment		le segment AB ou le segment a AB et a désignent aussi bien le segment que sa mesure <i>exemple: $AB = 2,4\text{ cm}$ ou $a = 24\text{ mm}$</i>	
Droite		la droite CD la droite d	
Demi-droite		la demi-droite issue de Q passant par R la demi-droite QR la demi-droite Qe	
Vecteur		le vecteur $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{MN}$	
Angle		l'angle $\widehat{AOB}$ l'angle α $\widehat{AOB}$ désigne aussi bien l'angle que sa mesure	l'angle $\widehat{xOy}$ l'angle $\widehat{AOy}$
Figure du plan		le quadrilatère $PQRS$ le quadrilatère f	la figure f le périmètre p et l'aire A le côté PS
Cercle		le cercle c le cercle $c(O ; r)$ $\widehat{RS}$ désigne aussi bien l'arc que sa mesure	l'arc $\widehat{RS}$
Figure de l'espace		le polyèdre p l'arête c	la face f le volume V
Plan		le plan P	
Isométrie de segments		$AB = CD$ des segments isométriques peuvent être marqués par un même symbole	
Isométrie d'angles		$\alpha = \beta$ des angles isométriques peuvent être marqués par un même symbole	

Objet, notion, propriété	Notations, conventions et commentaires
Sécantes 	deux droites d et d' possédant un seul point d'intersection A
Concourantes 	plusieurs droites d , d' et d'' possédant un seul point d'intersection A
Parallèles 	les droites e et f sont parallèles $e // f$
Perpendiculaires 	sur ce dessin, l'angle droit formé par les droites a et b est noté à l'aide du signe $\perp$; parfois, il est signalé à l'aide des symboles $\lrcorner$ ou $\llcorner$ $a \perp b$
Isométries appliquées à une figure f	translation $f \xrightarrow{T'(\vec{v})} f'$ symétrie axiale $f \xrightarrow{S(d)} f'$ rotation $f \xrightarrow{\mathcal{R}(O; +120^\circ)} f'$ symétrie centrale $f \xrightarrow{S(O)} f'$
Homothétie	homothétie $f \xrightarrow{\mathcal{H}(O; k)} f'$
Composition de transformations	la composition des transformations f et g peut être notée $g \circ f$; on commencera par la transformation f , puis la transformation g

Alphabet grec

Majuscules	Minuscules	En français	Majuscules	Minuscules	En français
A	α	alpha	N	ν	nu
B	β	bêta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	O	o	omicron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ε	epsilon	P	ρ	rhô
Z	ζ	dzêta	Σ	σ	sigma
H	η	êta	T	τ	tau
Θ	θ	thêta	Y	υ	upsilon
I	ι	iota	Φ	φ	phi
K	κ	kappa	X	χ	khi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mu	Ω	ω	oméga



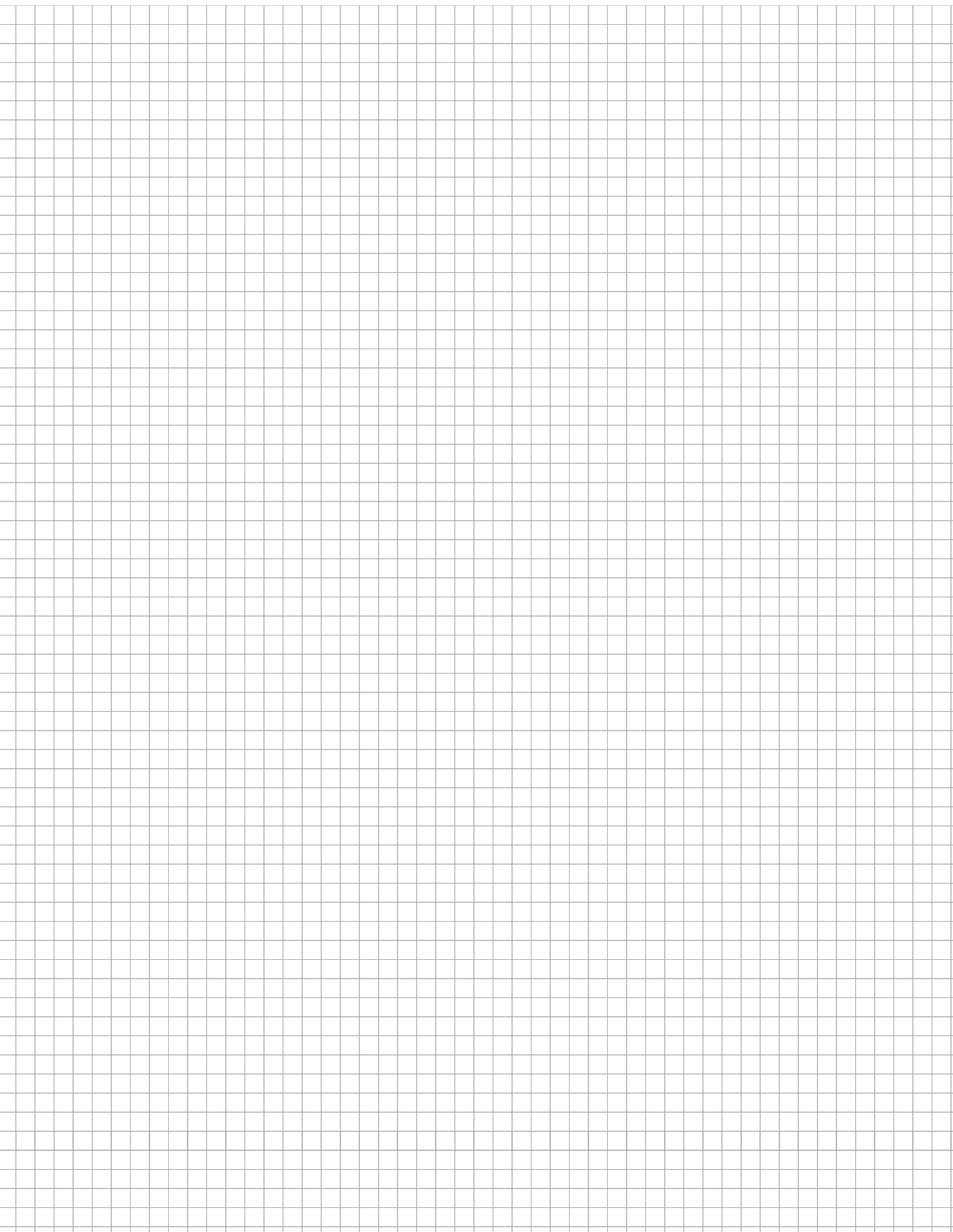


Table des matières

Recherche et stratégies – RS

● Résolution de problèmes	10
Problème	10
● Des stratégies de résolution de problèmes	10
Essais et ajustements	10
Étude systématique de cas	11
Essais, conjecture, preuve	13
● Des outils pour chercher	14
Schéma, croquis, tableau	14
Se questionner et s'organiser pour résoudre des problèmes	15
● Preuve	16
Règles du débat mathématique... ..	16
Si... alors... ..	17
Prouver qu'une affirmation mathématique est fausse	17
Prouver qu'une affirmation mathématique est vraie	18
● Vérification	18
Vérifier	18

Nombres et opérations – NO

● Généralités	24
Ensembles de nombres	24
Chiffres et nombres	25
Droite numérique	25
Ordre croissant et ordre décroissant	25
Estimation d'un résultat	26
● Ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$	26
Nombres naturels	26
Multiple, diviseur	26
Critères de divisibilité	27
Nombre premier	27
Décomposition en produit de facteurs premiers	28
<i>Décomposer un nombre en un produit de facteurs premiers</i>	28
Multiple commun, ppmc	29
<i>Calculer le ppmc de plusieurs nombres</i>	29
Diviseur commun, pgdc	30
<i>Calculer le pgdc de plusieurs nombres</i>	30
● Ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$	31
Nombres entiers relatifs	31
Distance à zéro	31
Nombres opposés	31
Addition de nombres relatifs	32
Soustraction de nombres relatifs	32
Écriture simplifiée d'une somme ou d'une différence de nombres relatifs	33
<i>Effectuer un calcul comportant des sommes et des différences de nombres relatifs</i>	33
Multiplication de nombres relatifs	34
Division de nombres relatifs	34
● Ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$	35
Nombres décimaux	35

Représentation de nombres décimaux sur une droite graduée	35
Approximation d'un nombre décimal	36
Addition	36
<i>Additionner des nombres décimaux positifs en colonnes</i>	37
Soustraction	37
<i>Soustraire des nombres décimaux positifs en colonnes</i>	37
Multiplication	38
<i>Multiplier des nombres décimaux positifs en colonnes</i>	38
Division	38
<i>Diviser un nombre décimal positif par un nombre décimal positif</i>	39
Propriétés de l'addition et de la multiplication	39
Priorités des opérations	40
<i>Effectuer un calcul avec ou sans parenthèses</i>	41
● Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$	41
Nombres rationnels	41
<i>Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale</i>	42
<i>Passer d'une écriture décimale finie à une écriture fractionnaire</i>	42
Amplification et simplification de fractions	43
Addition et soustraction de fractions	44
<i>Additionner et soustraire des fractions</i>	44
Multiplication de fractions	45
Calculer la fraction d'un nombre	45
Nombres inverses	45
Division de fractions	45
● Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$	46
Nombres réels	46
● Puissances	46
Puissance d'exposant positif	46
Puissance d'exposant négatif	47
Puissance de dix	47
Propriétés des puissances	48
Notation scientifique	49
<i>Écrire un nombre décimal positif en notation scientifique</i>	49
● Racines	50
Racine carrée	50
Racine cubique	50
Propriétés des racines	51
<i>Simplifier des sommes contenant des racines carrées</i>	51
● Probabilités	52
Série statistique et fréquence	52
Situation aléatoire, événement	52
<i>Calculer la probabilité d'un événement</i>	54

Fonctions et algèbre – FA

● Fonctions	60
Généralités	60
Représentation graphique	60

Définir une fonction	61
Fonction affine	62
<i>Construire la représentation graphique d'une fonction affine</i>	63
<i>Déterminer la pente d'une droite à partir de sa représentation graphique</i>	64
<i>Déterminer l'expression fonctionnelle d'une fonction affine à partir de sa représentation graphique</i>	65
Cas particuliers de la fonction affine	66
Fonction quadratique	67
Fonction cubique	67
Fonction racine carrée	68
Fonction homographique	68
● Proportionnalité	69
Généralités	69
<i>Résoudre un problème de proportionnalité</i>	71
Pourcentage	72
<i>Déterminer un pourcentage</i>	72
Échelle	73
<i>Déterminer l'échelle d'une reproduction de la réalité</i>	73
Pente	74
<i>Déterminer la pente moyenne</i>	74
Vitesse moyenne	75
<i>Déterminer la vitesse moyenne</i>	75
Masse volumique	76
<i>Déterminer la masse volumique d'un objet</i>	76
Débit	77
<i>Déterminer le débit</i>	77
● Diagrammes	78
Diagramme	78
Construire un diagramme circulaire	80
● Calcul littéral	81
Expression littérale	81
Alléger l'écriture d'expressions littérales	81
Égalité de deux expressions littérales	82
Monôme	82
Degré d'un monôme	82
Multiplication de monômes	83
Monômes semblables	83
Addition ou soustraction de monômes semblables	83
Polynôme	83
Réduction d'un polynôme	84
Degré d'un polynôme	84
Addition de polynômes	84
Polynômes opposés	85
Soustraction de polynômes	85
Expression littérale : somme ou produit ?	85
Multiplication de polynômes	86
Produits remarquables	86
Développement d'un produit	87
<i>Développer et réduire une expression littérale</i>	87
<i>Calculer la valeur numérique d'une expression littérale connaissant la valeur de la lettre</i>	88
Factorisation d'une expression littérale	88
<i>Factoriser une expression littérale</i>	88
● Équations	90
Équation	90
Équations équivalentes	90

Équation du premier degré à une inconnue	90
Règles d'équivalence	91
<i>Résoudre une équation du premier degré à une inconnue</i>	91
Équation du premier degré à deux inconnues	92
Système de deux équations du premier degré à deux inconnues	92
<i>Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues</i>	93
Équation du deuxième degré à une inconnue	94
Résolution d'une équation du deuxième degré à une inconnue	95
<i>Résoudre une équation du deuxième degré à une inconnue</i>	96
Calcul de la mesure d'une grandeur à partir d'une formule	97
<i>Utiliser une formule pour calculer une mesure de grandeur</i>	97

Espace – ES

● Figures géométriques planes	104
Droite	104
Points alignés	104
Demi-droite	104
Segment	104
Distance entre deux points	105
Distance d'un point à une droite	105
Distance entre deux droites parallèles	105
Segments isométriques	106
Milieu d'un segment	106
Droites sécantes	106
Droites perpendiculaires	107
<i>Tracer la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné</i>	107
Droites parallèles	108
Propriétés des droites parallèles et perpendiculaires	108
<i>Tracer la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné</i>	109
Médiatrice d'un segment	110
<i>Construire la médiatrice d'un segment avec une règle non graduée et un compas</i>	111
Plan	111
Repérage d'un point dans le plan	112
Cercle et disque	113
Arc de cercle	114
Secteur circulaire	114
Tangente à un cercle	114
Angle	115
<i>Mesurer un angle à l'aide d'un rapporteur</i>	116
Classement des angles	117
Angles adjacents	118
Angles complémentaires	118
Angles supplémentaires	118
Angles isométriques	119
Bissectrice d'un angle	119
<i>Construire la bissectrice d'un angle avec une règle et un compas</i>	120
Angles opposés par le sommet	120
Angles correspondants	121
Angles alternes-internes	121
Angles alternes-externes	122

Angle au centre d'un cercle	122	Pyramide	161
Angle inscrit dans un cercle	122	Polyèdre régulier	162
Cercle de Thalès d'un segment	123	Cylindre droit	163
Figure plane	124	Cône de révolution	163
Polygone	124	Sphère et boule	164
Diagonale d'un polygone	125		
Polygone convexe ou non convexe	125	Grandeurs et mesures – GM	
Polygone inscrit dans un cercle	125	● Unités de mesure	170
Polygone régulier	126	Unités de longueur	170
Angle au centre et angle intérieur d'un polygone régulier	127	<i>Convertir les unités de longueur</i>	170
<i>Construire un polygone régulier avec une règle, un rapporteur et un compas</i>	127	Unités d'aire	171
Triangle	128	<i>Convertir les unités d'aire</i>	172
Triangles particuliers	128	Unités de volume et de capacité	172
Classement des triangles	129	<i>Convertir les unités de volume</i>	173
Inégalité triangulaire	129	<i>Convertir les unités de volume en unités de capacité et inversement</i>	174
Somme des angles d'un triangle	130	Unités de masse	174
Cercle circonscrit à un triangle et médiatrices	130	Unités de temps	175
Cercle inscrit dans un triangle et bissectrices	131	<i>Convertir les unités de temps</i>	175
Hauteurs d'un triangle et orthocentre	131	● Périmètre d'une surface	177
<i>Tracer une hauteur d'un triangle avec une équerre</i>	132	Généralités	177
Médianes et centre de gravité	133	Périmètre des surfaces usuelles	178
Triangles isométriques	134	● Aire d'une surface	179
Triangles semblables	135	Généralités	179
Figures semblables	136	Aire des surfaces usuelles	179
Quadrilatère	137	<i>Calculer l'aire d'une figure</i>	182
Quadrilatères particuliers	137	● Volume d'un solide	183
Classement des quadrilatères	139	Généralités	183
● Transformations géométriques	140	Volume des solides usuels	184
Transformations du plan	140	<i>Calculer le volume d'un solide</i>	186
Quelques propriétés des transformations du plan	140	● Théorèmes	187
Isométrie	142	Triangle rectangle et vocabulaire	187
Vecteur	142	Théorème de Pythagore	187
Translation	143	<i>Calculer la longueur d'un segment en utilisant le théorème de Pythagore</i>	188
<i>Construire l'image d'un point par une translation</i>	144	<i>Prouver qu'un triangle est rectangle en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore</i>	189
Symétrie axiale	144	Théorème de Thalès	189
<i>Construire l'image d'un point par une symétrie axiale</i>	145	<i>Calculer la longueur d'un segment en utilisant le théorème de Thalès</i>	190
Axe de symétrie	146	Conventions et notations	195
Symétrie centrale	146	Alphabet grec	197
<i>Construire l'image d'un point par une symétrie centrale</i>	147	Table des matières	200
Centre de symétrie	148	Index	203
Rotation	148		
<i>Construire l'image d'un point par une rotation</i>	150		
<i>Retrouver le centre et l'angle d'une rotation</i>	151		
Homothétie	152		
<i>Construire l'image d'un point par une homothétie</i>	154		
Propriétés des isométries et des homothéties du plan	154		
Similitude	155		
● Géométrie dans l'espace	156		
Représentation d'un objet dans l'espace	156		
Repérage d'un point dans l'espace	158		
Polyèdre	158		
Prisme droit	159		
Parallélépipède rectangle ou pavé droit	160		

Index

A			
abscisse (d'un point)	112, 158	arrondi	36
absorbant (élément)	40	arrondir un nombre	36
addition	36	associativité	39
addition (propriétés)	39	axe de symétrie	146
addition de fractions	44	axe de symétrie d'un angle	119
addition de monômes semblables	83	axe des x (abscisse)	112, 158
addition de nombres décimaux	36, 37	axe des y (ordonnée)	112, 158
addition de nombres relatifs	32	axe des z (cote)	158
addition de polynômes	84	axes de symétrie (polygones réguliers)	126
adjacents (angles)	118	axe de symétrie (quadrilatères particuliers)	137-138
affine (fonction)	62-66	B	
agrandissement (échelle)	73	base (cône, cylindre, prisme droit, pyramide)	159, 161, 163
agrandissement d'une figure	136, 153	base d'une puissance	46
aigu (angle)	117	billion	47
aire (unités)	171, 172	billionième	47
aire d'une surface	179-183	bissectrice d'un angle	119, 120
aire des surfaces usuelles	179-181	bissectrices (triangle)	131
aléatoire (situation)	52	boule	164
alléger l'écriture d'expressions littérales	81	boule (volume)	185
alphabet grec	197	C	
amplification de fractions	43	calcul littéral	81-89
angle (mesurer)	116	calculer la fraction d'un nombre	45
angle aigu	117	capacité (unités)	173
angle au centre d'un cercle	122	carré (périmètre et aire)	178, 180
angle au centre d'un polygone régulier	127	carré (propriétés)	138, 139
angle de rotation	148	cartésien (diagramme)	78
angle droit	117	cathètes	187
angle inscrit dans un cercle	122-123	centaine	35
angle intérieur (polygone régulier)	127	centi	47
angle nul	117	centième	35, 47
angle obtus	117	centre d'homothétie	152
angle plat	117	centre d'un cercle	113
angle plein	117	centre d'une sphère	164
angle rentrant	117	centre de gravité du triangle	133
angles	115-123	centre d'un polygone régulier	126
angles (classement)	117	centre de rotation	148
angles adjacents	118	centre de symétrie	148
angles alternes-externes	122	cercle	113
angles alternes-internes	121	cercle (longueur et circonférence)	178
angles complémentaires	118	cercle circonscrit à un triangle	130
angles correspondants	121	cercle de Thalès d'un segment	123
angles isométriques	119	cercle inscrit dans un triangle	131
angles opposés par le sommet	120	cerf-volant (propriétés)	138
angles supplémentaires	118	chiffres	25
approximation d'un nombre décimal	36	circonscrit (cercle)	125, 130
arc de cercle	114	circulaire (diagramme)	79, 80
arc de cercle (longueur)	178	coefficient d'un monôme	82
arc (a)	171	combinaison linéaire (résolution d'un système d'équations)	94
arête d'un polyèdre	158	commutativité	39
		cône (volume)	185
		cône de révolution	163
		conjecture	13
		conservation des longueurs (propriétés)	140
		conservation des angles (propriétés)	140
		conservation du parallélisme (propriétés)	141
		conservation de l'orientation (propriétés)	141
		conservation des directions (propriétés)	141
		conservation du sens des vecteurs (propriétés)	141
		constante (fonction)	66
		construire l'image d'un point par une homothétie	154
		construire l'image d'un point par une rotation	150
		construire l'image d'un point par une symétrie axiale	145
		construire l'image d'un point par une symétrie centrale	147
		construire l'image d'un point par une translation	144
		construire la bissectrice d'un angle	120
		construire la médiatrice d'un segment	111
		construire un polygone régulier	127-128
		contre-exemple	16
		convention d'écriture (expressions littérales)	81
		conventions et notations	195-197
		convertir les unités d'aire	172
		convertir les unités de longueur	170
		convertir les unités de temps	175, 176
		convertir les unités de volume	173
		convertir les unités de volume en unité de capacité et inversement	174
		convexe ou non convexe (polygone)	125
		coordonnées (repérage)	112, 158
		coordonnées (fonction)	60
		corde	113
		correspondants (angles)	121
		cote d'un point (repérage)	158
		côté d'un polygone	124
		côtés de l'angle droit	187
		critères de divisibilité	27
		croissant (ordre)	25
		croquis	14

cube	160, 162
cube (volume)	184
cubique (fonction)	67
cylindre (volume)	185
cylindre droit	163

D

débat mathématique (règles)	16
débit	77
déca	47
décagone régulier	126
déci	47
décimale (écriture)	35
décimale (numération)	35
décimale (partie)	35
décimaux (nombres)	35
décomposition en produit de facteurs premiers	28
décroissant (ordre)	25
degré (angle)	115
degré d'un monôme	82
degré d'un polynôme	84
degré d'une équation	90, 94
demi-droite	104
dénivellation	74
dénominateur	41
dénominateur commun	44
développement d'un cylindre droit	163
développement d'un parallélépipède rectangle ou pavé droit	160
développement d'un prisme droit	159
développement d'un produit	87
développement d'un solide	157
développement d'une pyramide	161
développer (expression littérale)	87
diagonale d'un polygone	125
diagramme cartésien	78
diagramme circulaire	79, 80
diagramme circulaire (construction)	80
diagramme en barre	79
diagramme en bâtons	78
diagramme en colonnes	78
diagramme figuratif	79
diagrammes	78-80
diamètre (cercle)	113
différence	37
direction d'un vecteur	142
discriminant (équation)	95
disque	113
disque (aire)	181
disque (périmètre)	179
distance à zéro	31
distance d'un point à une droite	105
distance entre deux droites parallèles	105

distance entre deux points	105
distance horizontale	74
distributivité	40
distributivité (double)	86
dividende	38
diviseur	26, 38
diviseur commun	30, 43
divisibilité (critères)	27
division	38
division (nombres décimaux)	39
division de fractions	45
division de nombres relatifs	34
dixième	35, 47
dizaine	35, 47
dodécaèdre régulier	162
dodécagone régulier	126
double distributivité	86
droit (angle)	117
droite	104
droite graduée (représentation de nombres décimaux)	35
droite numérique	25
droites parallèles	108, 109
droites perpendiculaires	107, 108
droites sécantes	106

E

échelle	73
écriture décimale	35, 41, 47
écriture fractionnaire	41
écriture scientifique (notation scientifique)	49
écriture simplifiée d'une somme ou d'une différence de nombres relatifs	33
égalité (expression littérale)	82
égalité conditionnelle	90
égalité des rapports	70, 71
élément absorbant	40
élément neutre	40
ennéagone régulier	126
ensemble de solutions d'une équation	90
ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$	24, 35-41
ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$	24, 31-34
ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$	24, 26-30
ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$	24, 41-45
ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$	24, 46
ensembles de nombres	24
entière (partie)	35
équation	90-97
équation du deuxième degré à une inconnue	94-96

équation du premier degré à deux inconnues	92
équation du premier degré à une inconnue	90
équations (système de deux équations du premier degré à deux inconnues)	92-94
équations équivalentes	90
équilatéral (triangle)	128, 129
équiprobables (résultats)	53
équivalence (règles)	91
équivalentes (équations)	90
essais	10-13
estimation d'un résultat	26
étude systématique de cas	11, 12
événement (aléatoire)	53
exposant	46
expression fonctionnelle	61-65
expression littérale	81
expression littérale : somme ou produit ?	85

F

face d'un polyèdre	158
face latérale	159
facteur	38
facteur de linéarité	69
facteur de proportionnalité	69
facteurs premiers (décomposition)	28
factorisation (polynôme)	88-89
fer de lance (propriétés)	138
figure (calculer l'aire)	182
figure plane	124
figures géométriques planes	104-139
figures semblables	136
fonction (définir une)	61
fonction affine	62-66
fonction affine (construction d'une représentation graphique)	63
fonction constante	66
fonction cubique	67
fonction homographique	68
fonction linéaire	66
fonction linéaire (proportionnalité)	69
fonction quadratique	67
fonction racine carrée	68
fonctions	60-68
formule (calcul de la mesure d'une grandeur)	97
formules de calcul d'aires	179-182
formules de calcul de périmètres	178
formules de calcul de volumes	184-186
formule de Viète	95
fraction	41
fraction d'un nombre (calculer la)	45
fraction irréductible	43
fréquence (probabilité)	52, 53

perspective cavalière	156	pyramide	161	résultats possibles	53
perspective isométrique	157	pyramide (volume)	184	rhomboïde (propriétés)	138, 139
pgdc (plus grand diviseur commun)	30	pyramide régulière	161	rotation	148-151
plat (angle)	117	Pythagore (réciproque)	188, 189	rotation (propriétés)	154
plein (angle)	117	Pythagore (théorème)	187-189		
plan	111			S	
point de fuite	156			schéma	14
points alignés	104	Q		sécantes (droites)	106
polyèdre	158	quadratique (fonction)	67	se questionner et s'organiser pour résoudre des problèmes	15
polyèdres de Platon	162	quadrilatère	137-139	seconde (s)	175
polyèdres réguliers	162	quadrilatères (classement)	139	secteur circulaire	114
polyèdres réguliers convexes	162	quadrilatères particuliers	137, 138	secteur circulaire (aire)	181
polygone	124-128	quintal (q)	174	segment	104
polygone convexe ou non convexe	125	quotient	38, 41	segment (milieu)	106
polygone inscrit dans un cercle	125			segment orienté	142
polygones réguliers	126, 127	R		segments isométriques	106
polynôme	83	racine carrée	50	semblables (monômes)	83
polynôme (degré)	84	racine carrée (fonction)	68	semblables (triangles)	135
polynôme (réduction)	84	racine cubique	50	sens d'un vecteur	142
polynômes (addition)	84	racines	50-51	sens de rotation	148
polynômes (soustraction)	85	racines (propriétés)	50, 51	série statistique	52
polynômes opposés	85	rapport d'homothétie	152	sexagésimal (système)	175
polynômes (multiplication)	86	rapporteur	116	si... alors...	17
pour-cent (%)	72	rationnel (nombre)	41	similitude	135, 155
pour-mille (‰)	72	rayon (boule)	164	simplification d'écriture (somme ou différence de nombres relatifs)	33
pourcentage	72	rayon (cercle)	113	simplification de fractions	43
pourcentage (calculer un)	72	rayon (sphère)	164	situation aléatoire	52
ppmc (plus petit multiple commun)	29	réciproque (d'un énoncé)	18	solide	157, 158
preuve	16-18	réciproque du théorème de Pythagore	188, 189	solide (calculer le volume)	186
priorités des opérations	40, 41	rectangle (périmètre et aire)	178, 180	solide (volume)	183-186
prisme droit	159	rectangle (propriétés)	138, 139	solutions d'une équation	90
prisme droit (volume)	184	rectangle (trapèze)	138	somme	36
probabilité	52-54	rectangle (triangle)	138, 139	somme (propriété)	70, 71
problème (définition)	10	réduction d'un polynôme	84	somme d'une expression littérale	85
produit	38	réduction (échelle)	73	somme des angles d'un quadrilatère	137
produit (propriété)	70, 71	réduction d'une figure	136, 153	somme des angles d'un triangle	130
produits remarquables	86, 89	réduire (expression littérale)	87	sommet d'un angle	115
proportionnalité	69-77	réel (nombre)	46	sommet d'un polyèdre	158
proportionnalité (résoudre un problème)	71	règles d'équivalence	91	sommet d'un polygone	124
proportionnelles (grandeurs)	69	règles du débat mathématique	16	soustraction	37
propriété de la somme (proportionnalité)	70, 71	relatifs (nombres)	31	soustraction de fractions	44
propriété du produit (proportionnalité)	70, 71	rentrant (angle)	117	soustraction de monômes semblables	83
propriétés de l'addition et de la multiplication	39	repérage d'un point dans l'espace	158	soustraction de nombres décimaux	37
prouver qu'une affirmation mathématique est fausse	17	repérage d'un point dans le plan	112	soustraction de nombres relatifs	32
prouver qu'une affirmation mathématique est vraie	18	repère (repérage d'un point)	112, 158	soustraction de polynômes	85
puissance d'exposant négatif	47	représentation d'un objet dans l'espace	156	sphère	164
puissance d'exposant positif	46	représentation graphique (diagrammes)	78-80	sphère (aire)	181
puissances	46-49	représentation graphique (fonction)	60, 61	statistique (série)	52
puissances (propriétés)	48	résolution d'équations	91-96	stratégie de résolution de problèmes	10-13
puissance de dix	47	résolution de problèmes	10	substitution (résolution d'un système d'équations)	93
		résolution d'une équation du deuxième degré à une inconnue	95, 96	symétrie axiale	144, 145
		résultats équiprobables	53		
		résultats favorables	53		

symétrie axiale (propriétés)	154
symétrie centrale	146, 147
symétrie centrale (propriétés)	154
système (sexagésimal)	175
système d'équations (résolution)	93, 94
système de deux équations du premier degré à deux inconnues	92-94
système décimal	25
système métrique	170-172

T

tableau	14
tableau de proportionnalité	69, 70
tableau de valeurs	61
tangente	114, 115
temps (unités)	175, 176
tera	47
termes	36, 37
tétraèdre régulier	162
Thalès (cercle)	123
Thalès (théorème)	189
théorème de Pythagore	187-189
théorème de Thalès	189
théorèmes	187-190
tonne (t)	174
tout (proportionnalité)	72
tracer la droite parallèle à une droite donnée passant par un point	109
tracer la droite perpendiculaire à une droite passant par un point donné	107
tracer une hauteur d'un triangle avec une équerre	132
transformation du plan	140
transformation du plan (propriétés)	140-141
transformations	140-155
translation	143-144
translation (propriétés)	154
trapèze (aire)	181
trapèze (propriétés)	137, 139
trapèze isocèle (propriétés)	137, 139

trapèze rectangle (propriétés)	138, 139
triangle (aire)	179
triangle équilatéral	128, 129
triangle isocèle	128, 129
triangle isocèle rectangle	129
triangle rectangle	128, 129
triangle rectangle (vocabulaire)	187
triangles	128-135
triangles (classement)	129
triangles isométriques	134
triangles particuliers	128
triangles semblables	135
troncature	36

U

unités d'aire (conversion)	172
unités de capacité (et de volume)	172-174
unités de masse	174
unités d'aire	171, 172
unités de longueur	170
unités de longueur (conversion)	170
unités de mesure	170
unités de temps	175, 176
unités de temps (conversion)	175, 176
unités de volume (et de capacité)	172, 173
unités de volume, unités de capacité (conversion)	174

V

valeur approchée	36
variable	81
vecteur	142
vérification	18
Viète (formule)	95
vitesse moyenne	75
volume (conversion)	173
volume (unité)	172
volume d'un solide	183-186
volume des solides usuels	184, 185

