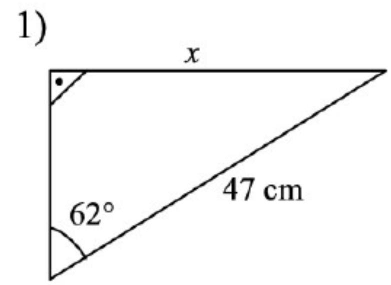
Corrigé – Exercices supplémentaires

Trigonométrie et géométrie

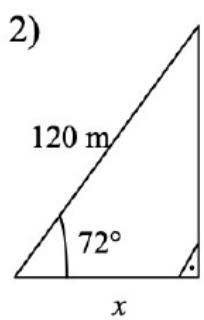
Figure 1



On utilise le sinus : sin(62°)=x/47.

Donc x=47·sin(62°)≈41,50 cm.

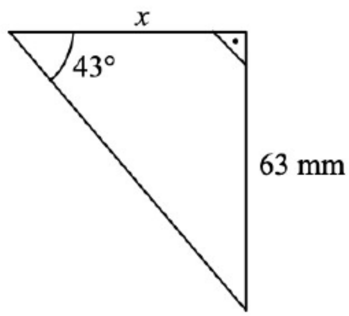
Figure 2



On utilise le cosinus : cos(72°)=x/120.

Donc x=120·cos(72°)≈37,08 m.

Figure 3

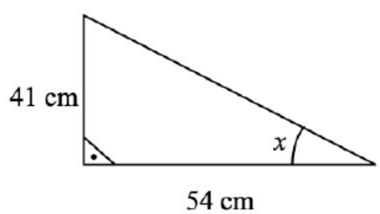


On utilise la tangente : tan(43°)=63/x.

Donc x=63/tan(43°)≈67,56 mm.

Figure 4

4)

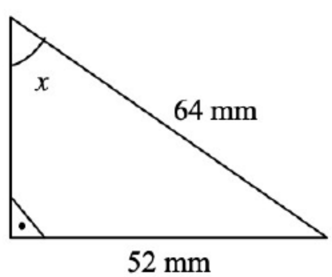


On utilise la tangente : tan(x)=41/54.

Donc x=arctan(41/54)≈37,21°.

Figure 5

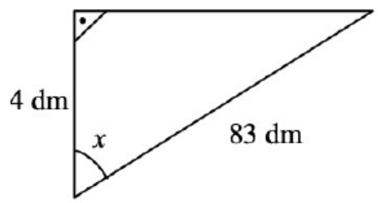
5) 6)



On utilise le sinus : sin(x)=52/64.

Donc x=$\sin^{-1}$(52/64)≈54,34°.

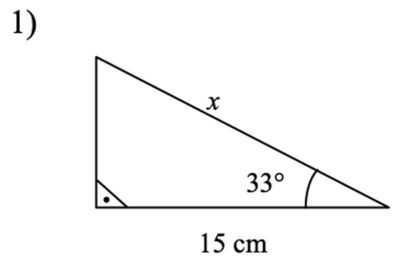
Figure 6



On utilise le cosinus : cos(x)=64/83.

Donc x=cos^{-1}(64/83)≈39,55°.

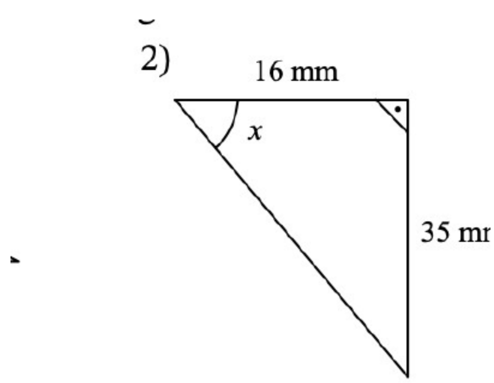
Figure 7



On utilise le cosinus : cos(33°)=15/x.

Donc x=15/cos(33°)≈17,89 cm.

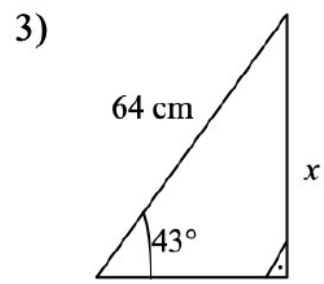
Figure 8



On utilise la tangente : tan(x)=35/16.

Donc x=tan^{-1}(35/16)≈65,43°.

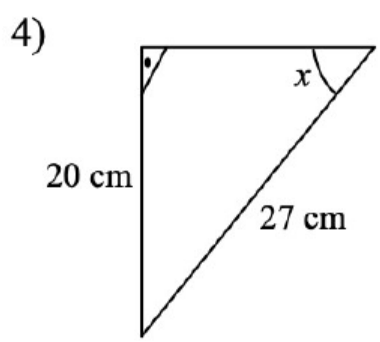
Figure 9



On utilise le sinus : sin(43°)=x/64.

Donc x=64·sin(43°)≈43,65 cm.

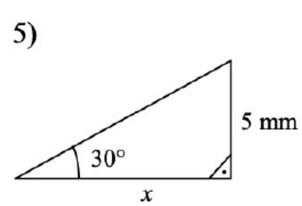
Figure 10



On utilise le sinus : sin(x)=20/27.

Donc x=$\sin^{-1}$(20/27)≈47,79°.

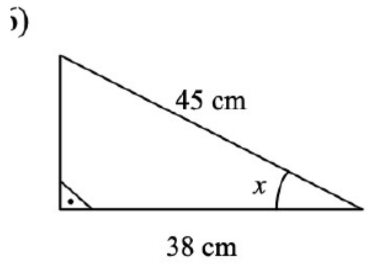
Figure 11



On utilise la tangente : tan(30°)=5/x.

Donc x=5/tan(30°)≈8,66 mm.

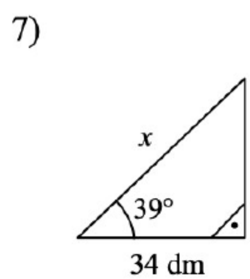
Figure 12



On utilise le cosinus : cos(x)=38/45.

Donc x=$\cos^{-1}$(38/45)≈32,39°.

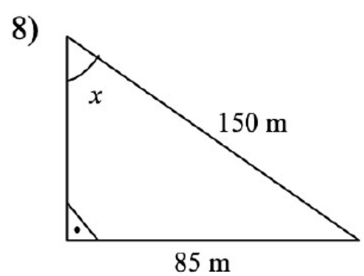
Figure 13



On utilise le cosinus : cos(39°)=34/x.

Donc x=34/cos(39°)≈43,75 dm.

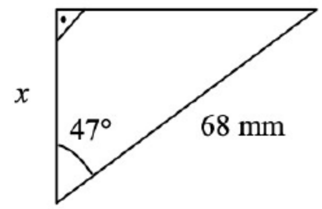
Figure 14



On utilise le sinus : sin(x)=85/150.

Donc x=$\sin^{-1}$(85/150)≈34,52°.

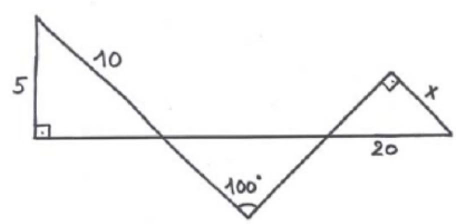
Figure 15



On utilise le cosinus : cos(47°)=x/68.

Donc x=68·cos(47°)≈46,38 mm.

Figure 16

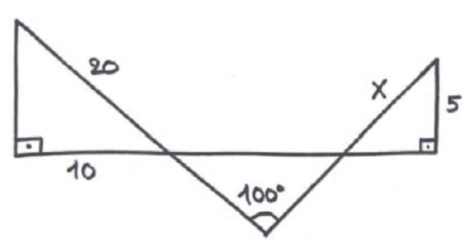


Dans le triangle de gauche, l’angle avec l’horizontale vaut 30° car le côté vertical vaut 5 et l’hypoténuse 10.

Au point bas, l’angle entre les deux segments est 100°, donc le segment de droite fait 50° avec l’horizontale.

Dans le triangle de droite, le côté de base 20 est l’hypoténuse, donc x=20·sin(50°)≈15,32.

Figure 17



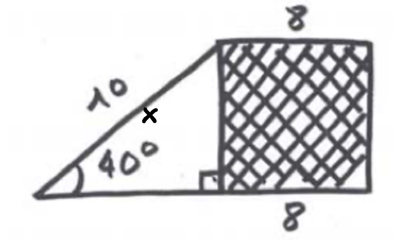
Dans le triangle de gauche, cos(θ)=10/20=1/2, donc θ=60°.

Au point bas, l’autre segment fait alors 20° avec l’horizontale puisque 60°+100°+20°=180°.

Dans le triangle de droite, sin(20°)=5/x.

Donc x=5/sin(20°)≈14,62.

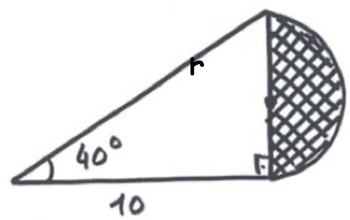
Figure 18



La partie hachurée est un rectangle de côté 8.

X=10.sin(40°) donc l'aire du rectangle = 8. 10.sin(40°) ≈ 51,42

Figure 19

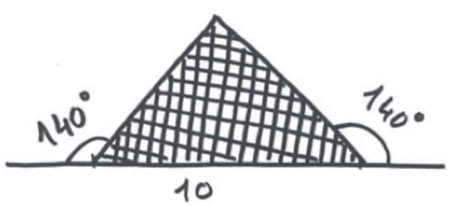


La partie hachurée est un demi-disque dont le diamètre est la hauteur du triangle rectangle.

Hauteur = 10·tan(40°), donc rayon r=5·tan(40°).

Aire = $\frac{1}{2}\cdot\pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(5\cdot\tan(40°))^2 \approx 27{,}65$.

Figure 20

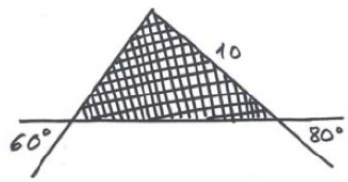


Les angles extérieurs de 140° donnent des angles intérieurs de base de 40°.

La hauteur vaut h=5·tan(40°).

Aire = ½·10·h = 25·tan(40°)≈20,98.

Figure 21



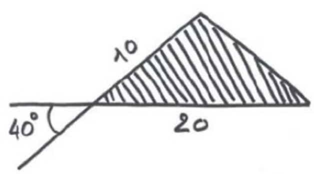
Les angles à la base valent 60° et 80° ; l'angle au sommet vaut donc 40°.

Le côté marqué 10 est opposé à l'angle de 60°.

Par la loi des sinus, l'autre côté vaut $a=10\cdot\sin(80°)/\sin(60°)$.

Aire = $\frac{1}{2}\cdot a\cdot 10\cdot\sin(40°)\approx 36{,}55$

Figure 22



La base vaut 20 et le côté gauche vaut 10. L'angle intérieur à gauche vaut 40°.

La hauteur vaut $h=10\cdot\sin(40°)$.

Aire = $\frac{1}{2}\cdot 20\cdot h = 100\cdot\sin(40°)\approx 64{,}28$.

Figure 23

Carré inscrit dans un cercle
de 10 cm de rayon

Carré inscrit dans un cercle de rayon 10 : le diamètre du cercle est la diagonale du carré.

Diagonale = 20,

Aire du carré = ½.20.20= 200 cm^2.

Figure 24

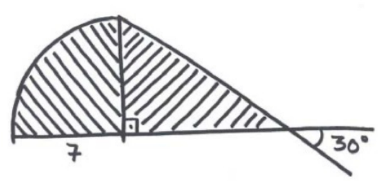
Pentagone inscrit dans un cerc

Pour un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 10, l'aire vaut

$A=(5/2)\cdot R^2\cdot\sin(72°)$.

Donc $A=(5/2)\cdot 10^2\cdot\sin(72°)\approx 237{,}76\ cm^2$.

Figure 25



La figure hachurée est composée d'un quart-disque de rayon 7 et d'un triangle rectangle de hauteur 7.

À droite, l'angle vaut 30°, donc la base du triangle vaut 7/tan(30°).

Aire du triangle = $½\cdot 7\cdot 7/\tan(30°)$

Aire totale = $\pi.7^2/4+ ½\cdot 7\cdot 7/\tan(30°)\approx 80{,}92\ u^2$.

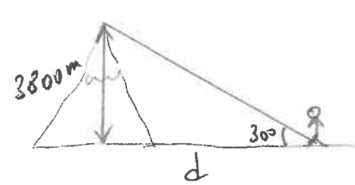
Exercices rédigés

Exercice 8 – Distance jusqu'au Mt Fuji

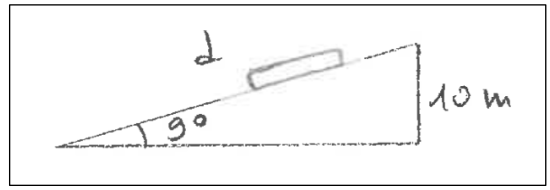
On modélise la situation par un triangle rectangle dont la hauteur vaut 3 800 m et l'angle d'élévation 30°.

$\tan(30°)=3800/d$, donc $d=3800/\tan(30°)\approx 6\ 581{,}79$ m.

Distance cherchée : environ 6,58 km.



Exercice 9 – Les blocs de Stonehenge

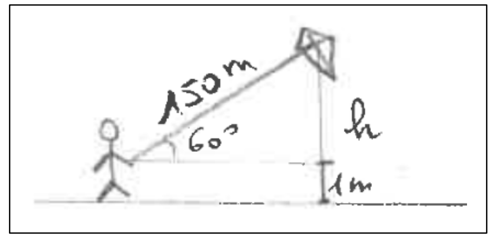


La pierre est montée sur une rampe faisant un angle de 9° avec l'horizontale.

$\sin(9°)=10/d$, donc $d=10/\sin(9°)\approx63{,}92$ m.

Distance parcourue sur la rampe : environ 63,9 m.

Exercice 10 – Hauteur d'un cerf-volant



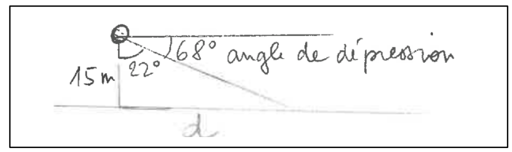
Le fil mesure 150 m et fait un angle de 60° avec l'horizontale.

La hausse verticale vaut $150\cdot\sin(60°)\approx129{,}90$ m.

Comme la main est à 1 m du sol, hauteur totale $\approx129{,}90+1=130{,}90$ m.

Hauteur du cerf-volant : environ 130,9 m.

Exercice 11 – Topographie

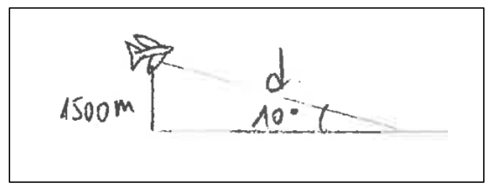


L'angle de dépression est égal à l'angle d'élévation depuis l'objet, donc 68°.

$\tan(68°)=15/d$, donc $d=15/\tan(68°)\approx6{,}06$ m.

Distance horizontale : environ 6,06 m.

Exercice 12 – Atterrissage d'un avion

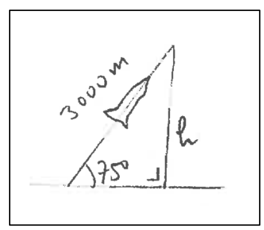


On cherche la distance directe entre l'avion et les numéros de piste.

$\sin(10°)=1500/d$, donc $d=1500/\sin(10°)\approx8\,638{,}16$ m.

À 100 m près : environ 8 600 m.

Exercice 13 – Altitude d'une fusée

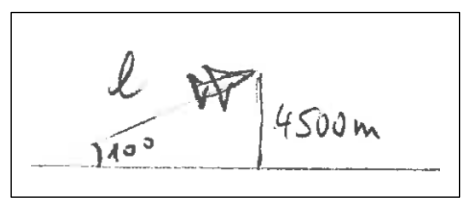


L'altitude est la composante verticale du trajet.

$h=3000\cdot\sin(75°)\approx2\,897{,}78$ m.

Au mètre près : 2 898 m.

Exercice 14 – Décollage d'un avion

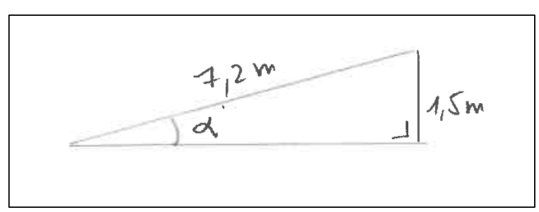


La vitesse verticale est $75\cdot\sin(10°)\approx13{,}02$ m/s.

Le temps nécessaire pour atteindre 4 500 m est donc $t=4500/(75\cdot\sin(10°))\approx345{,}53$ s.

Cela représente environ 5 min 46 s.

Exercice 15 – Construction d'une rampe

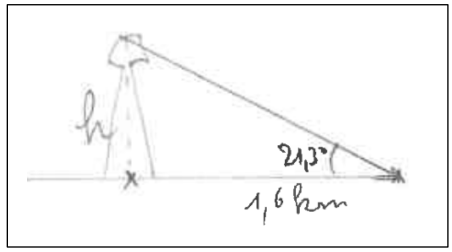


On connaît l'hypoténuse 7,2 m et le côté opposé 1,5 m.α

$\sin(\alpha)=1{,}5/7{,}2$, donc $\alpha=\sin^{-1}(1{,}5/7{,}2)\approx12{,}02°$.

Angle recherché : environ 12,0°.

Exercice 16 – Tour de télévision

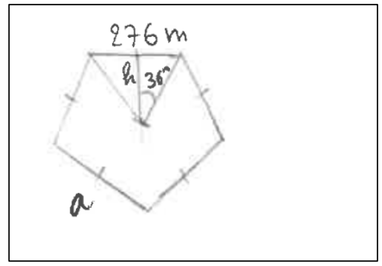


Distance horizontale : 1,6 km = 1 600 m.

$h=1600\cdot\tan(21{,}3°)\approx623{,}81$ m.

Au mètre près : 624 m.

Exercice 17 – La surface du Pentagone

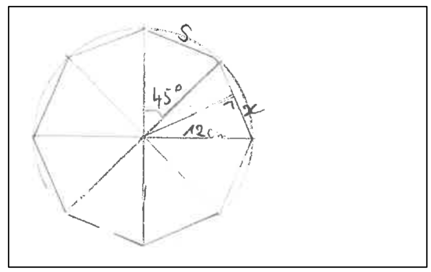


Pour un pentagone régulier de côté a, l'aire vaut $A=5a^2/(4\cdot\tan(36°))$.

$A=5\cdot276^2/(4\cdot\tan(36°))\approx131059.09$ m^2.

Aire de la base : environ 131 059,09 m^2.

Exercice 18 – Un octogone régulier



Dans un octogone régulier inscrit dans un cercle de rayon 12,

la longueur d'un côté vaut $s=2R\cdot\sin(22{,}5°)=24\cdot\sin(22{,}5°)\approx9{,}1844$ cm.

Périmètre = 8s ≈ 73,48 cm.

Exercice 20 – Aire du quadrilatère ABCD

On découpe le quadrilatère en deux triangles : ABD et DBC.

Dans ABD, $\tan(35°)=AD/50$, donc $AD\approx35.01$ cm.

$Aire(ABD)=½\cdot50\cdot AD\approx875.26$ cm^2.

De plus, $DB=50/\cos(35°)\approx61.04$ cm.

Dans DBC, l'angle en B vaut 90° et BC=60, donc $Aire(DBC)=½\cdot DB\cdot60\approx1831.16$ cm^2.

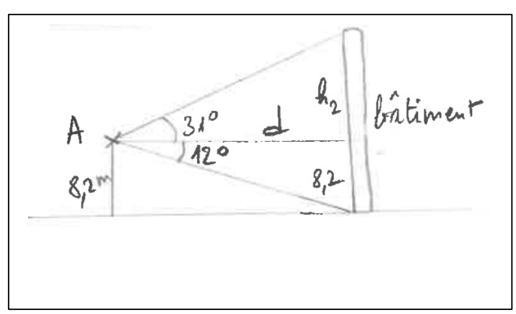
Aire totale ≈ 2706.42 cm^2.

Exercice 21 – Calcul de la hauteur d'un mât

$\tan(30°)=h/7{,}5$, donc $h=7{,}5\cdot\tan(30°)\approx4{,}33$ m.

Hauteur du mât : environ 4,33 m.

Exercice 22 – Hauteur d'un bâtiment



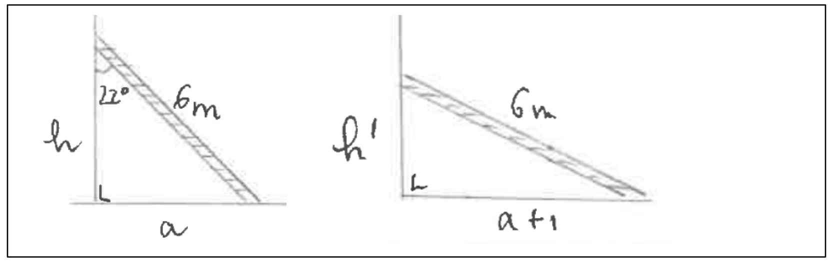
La distance horizontale au bâtiment vaut $d=8{,}20/\tan(12°)\approx38{,}88$ m.

La partie située au-dessus du point A vaut $h_2=d\cdot\tan(31°)\approx23{,}18$ m.

Hauteur totale du bâtiment ≈ 8,20+23,18 = 31,38 m.

Exercice 23 – Calculs d’échelles

(a) L’angle entre l’échelle et le mur vaut 22°, donc la distance au mur est $a=6\cdot\sin(22°)\approx2.25$ m.



(b) La hauteur initiale vaut $h=6\cdot\cos(22°)\approx5.56$ m.

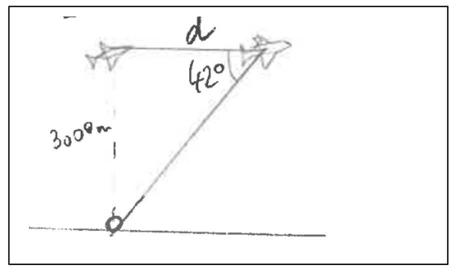
La nouvelle distance au mur est $a+1=2.25+1\approx3.25$ m.

La nouvelle hauteur vaut $h'=\sqrt{(6^2-(3.25)^2)}\approx5.05$ m.

Le point d’appui descend donc d’environ $h-h'=0.52$ m.

Exercice 24 – Vitesse d’un avion

Une minute après être passé à la verticale de l’objet, la distance horizontale vaut $d=3000/\tan(42°)\approx3\,331{,}84$ m.

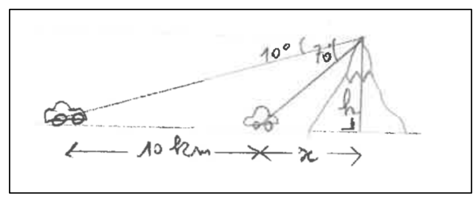


En 1 minute, l’avion parcourt donc environ 3,332 km.

Sa vitesse est donc $3{,}332\times60\approx199{,}91$ km/h.

À 1 km/h près : 200 km/h.

Exercice 25* – Hauteur d’une montagne



En 10 minutes à 60 km/h, le motocycliste parcourt 10 km.

Si h est la hauteur de la montagne et d la distance initiale à son pied, alors

$\tan(10°)=h/d$ et $\tan(70°)=h/(d-10)$.

En résolvant, on obtient $h\approx1.884$ km, soit environ 1 884 m.

Exercice 26* – Valeurs remarquables

À partir du triangle équilatéral de côté 20 (coupé en deux) et du carré de côté 20, on retrouve :

$\sin(30°)=1/2$; $\cos(30°)=\sqrt{3}/2$; $\tan(30°)=\sqrt{3}/3$.

$\sin(60°)=\sqrt{3}/2$; $\cos(60°)=1/2$; $\tan(60°)=\sqrt{3}$.

$\sin(45°)=\sqrt{2}/2$; $\cos(45°)=\sqrt{2}/2$; $\tan(45°)=1$.

Exercice 27* – Démonstration des identités

Dans le triangle rectangle, par définition : $\sin(\alpha)=a/c$, $\cos(\alpha)=b/c$ et $\tan(\alpha)=a/b$.

1) $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=a^2/c^2+b^2/c^2=(a^2+b^2)/c^2=1$, d’après le théorème de Pythagore.

2) $\sin(\alpha)/\cos(\alpha)=(a/c)/(b/c)=a/b=\tan(\alpha)$.

3) L’angle complémentaire de α vaut $90°-\alpha$. Dans le même triangle, le cosinus de $90°-\alpha$ est égal au rapport côté adjacent / hypoténuse, soit a/c.

Donc $\cos(90°-\alpha)=a/c=\sin(\alpha)$.